Escuela Superior de Informatica
Universidad de Castilla-La Mancha

CURSO CERO.

Departamento de Matemáticas.

Profesor: Raúl Martín Martín

Sesiones 18 y 19 de Septiembre

Capítulo 1

La demostración matemática. Demostración por inducción

El razonamiento por inducción es una de las técnicas que más se utilizan para demostrar propiedades de objetos discretos.

Se trata de demostrar una proposición P del tipo $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se verifica $P(n)$, siendo $P(n)$ una propiedad que se refiere al número natural n.

1.1. Procedimiento de inducción

1. Se comprueba que $P(1)$ (para el primer caso posible) es verdadera, es decir la proposición se verifica cuando $n = 1$.

2. Se demuestra que si $P(h)$ es cierta entonces $P(h+1)$ también es cierta, es decir, que si se verifica la proposición para el caso h, a esto es lo que llamamos *hipótesis de inducción (H.I.) también se verifica para el siguiente* $(h+1)$, *tesis de inducción (T.I.).*

En estas circunstancias se verifica que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ P(n)$ es verdadera.

Ejemplo 1.1. *Determinar para que valores de* $n \in \mathbb{N}$ *es verdadera la desigualdad*

$$2^n > n^2 + 4n + 5$$

En primer lugar buscamos el primer o primeros valores para los que se verifica la desigualdad. Observamos que para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ *la desigualdad es incorrecta, pero es verdadera para* $n = 7$. *Por lo tanto trataremos de demostrar que la desigualdad es verdadera para* $n \geq 7$.

Paso 1. Si $n = 7$,

$$2^7 = 128 > 7^2 + 4 \cdot 7 + 5 = 82$$

Para $n = 7$ *es correcta*

Paso 2. (H.I.) Suponemos que para $n = h$ *la desigualdad es correcta*

$$2^h > h^2 + 4h + 5$$

Paso 3. (T.I.) A partir de H.I. tenemos que demostrar que

$$2^{h+1} > (h+1)^2 + 4(h+1) + 5.$$

Usando la hipótesis de inducción

$$2^{h+1} = 2^h 2 >_{H.I.} (h^2 + 4h + 5)2 = 2h^2 + 8h + 10 = (h+1)^2 + 4(h+1) + 5 + h^2 + 2h$$

Como $h^2 + 2h > 0$ *para todo* $h \geq 7$ *por tanto* $2^{h+1} > (h+1)^2 + 4(h+1) + 5$.

Ejercicio 1.2. *Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:*

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.
3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$.

Ejercicio 1.3. *Determinar los números naturales para los cuales*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 2^n.$$

Ejercicio 1.4. *Comprobar que si*

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_2 &= 10 \\ a_n &= 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \end{aligned}$$

entonces $a_n = 3^n + 1$ *para* $n \geq 3$.

Capítulo 2

Las Matrices

2.1. Introducción a las Matrices: Definición, operaciones y propiedades.

Definición 2.1. *Se llama matriz de dimensiones $n \times m$ sobre el cuerpo de los números reales a toda aplicación*

$$I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(i,j) \longrightarrow a(i,j) = a_{ij}$$

siendo $I = \{1, \dots, n\}$ el conjunto formado por los subíndices de fila y $J = \{1, \dots, m\}$ el conjunto formado por los subíndices de columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

2.1.1. Clasificación de matrices

Definición 2.2. *Se llama matriz cuadrada a aquella matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas (n=m).*

Al número común de filas y de columnas se le llama dimensión de la matriz cuadrada.

Definición 2.3. *Se llama matriz fila a toda matriz de dimensiones $1 \times m$.*

Definición 2.4. *Se llama matriz columna a toda matriz de dimensiones $n \times 1$.*

Definición 2.5. *Se llama matriz nula a aquella que tiene todos sus elementos nulos.*

Definición 2.6. *Se llama matriz diagonal a toda matriz cuadrada en la cual todos los elementos son nulos salvo los de la diagonal principal.*

Definición 2.7. *Se llama matriz triangular a toda matriz cuadrada en la que son nulos todos los elementos que están por encima (o por debajo) de la diagonal superior (matriz triangular superior o inferior, respectivamente).*

Definición 2.8. *Se llama matriz unidad de orden n a una matriz cuadrada de dicha dimensión que es diagonal y todos los elementos de la diagonal son 1.*

Definición 2.9. *Se llama matriz traspuesta (A^t, A') de una dada A, a la que se obtiene al intercambiar en la matriz inicial las filas por las columnas.*

Definición 2.10. *Una matriz A es simétrica si es igual a su traspuesta, $A = A^t,\ a_{ij} = a_{ji}$.*

Definición 2.11. *Una matriz A es antisimétrica si su opuesta es igual a su traspuesta, $A^t = -A,\ a_{ji} = -a_{ij}$.*

¿Cómo son los elementos de la diagonal de una matriz antisimétrica? ____

Al conjunto de matrices de dimensiones $n \times m$ lo representamos por $\mathbb{M}_{n\times m}$

2.1.2. Operaciones y propiedades de las matrices

Suma de matrices La suma de dos matrices sólo existe cuando tienen la misma dimensiones. Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times m}$. Entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

(Se suma elemento a elemento)

Producto de un número real por una matriz Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{M}_{n\times m}$,

$$\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})$$

(Se multiplica cada elemento de la matriz por α)

Propiedades

1. Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C),\ A, B, C \in \mathbb{M}_{n\times m}$
2. Conmutativa: $A + B = B + A,\ A, B \in \mathbb{M}_{n\times m}$
3. Elemento neutro: $A + B = B + A = A,\quad A, B \in \mathbb{M}_{n\times m}$

$$B = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right)$$

4. Elemento opuesto: $A + \widetilde{A} = \widetilde{A} + A = U,\ U \in \mathbb{M}_{n\times m}, U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$A = (a_{ij}) \Rightarrow \widetilde{A} = (\quad)$

5. Distributiva respecto de la suma en $\mathbb{M}_{n\times m}$

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B, \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad A,B\in\mathbb{M}_{n\times m}$$

6. Distributiva respecto de la suma en $\mathbb{R}$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \quad A\in\mathbb{M}_{n\times m}$$

7. Asociativa mixta

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \quad A\in\mathbb{M}_{n\times m}$$

8. $A\in\mathbb{M}_{n\times m}, \quad 1\in\mathbb{R}$. Se verifica que $1\cdot A=A$

Producto de matrices

El producto de dos matrices exige que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda. Así, sean $A=(a_{ij})\in\mathbb{M}_{n\times m}$ y $B=(b_{ij})\in\mathbb{M}_{m\times r}$ la matriz producto $A.B=C, \ C=(c_{ij})\in\mathbb{M}_{n\times r}$ se obtiene del siguiente modo:

$$c_{pq}=\sum_{l=1}^{m}a_{pl}blq$$

es decir, el elemento que ocupa la fila p y la columna q se obtiene multiplicando la fila p de la primera matriz por la columna q de la segunda matriz.

Ejercicio 2.12. *Calcula el producto de las matrices*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices

1. El producto de matrices _____ conmutativo.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Si $A\cdot B=0$, ¿son alguna de las matrices A o B la matriz nula?

3. Asociativa $A(BC)=(AB)C$

4. Distributiva respecto de la suma de matrices

$$(A+B)C=AC+BC$$

5. Existencia del elemento neutro para el producto de matrices cuadradas. ¿Cuál es dicho elemento?

$$Neutro = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

6. En general, NO existe una matriz inversa de una matriz cuadrada respecto al producto de matrices, es decir, en ocasiones no existe $\hat{A}$ tal que $A \cdot \hat{A} = I$

2.1.3. Propiedades de la matriz traspuesta

Sean $A \in \mathbb{M}_{n\times m}$ y $A^t \in \mathbb{M}_{m\times n}$ se verifican las siguientes propiedades:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

2.2. Matrices estocásticas y cadenas de Markov

Supongamos que una población puede variar entre un conjunto finito de estados $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Por ejemplo, los residentes de una determinada localidad los podemos clasificar en un determinado momento como: no fumadores, fumadores de una o menos de una cajetilla de tabaco diario, fumadores de más de una cajetilla diaria. Esta situación no es estable porque se producen transiciones entre un estado y otro.

La probabilidad de que un miembro de esa población cambie de un estado e_1 a otro e_2 vendrá dada por un número comprendido entre 0 y 1. Siendo 0 una probabilidad nula de camio y el 1 supone un cambio seguro del estado e_1 al e_2. Podemos representar estas probabilidades de transición mediante una matriz:

$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{4}{c}{\text{del estado} \ \ldots} & \\ \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \cdots & \mathbf{e_n} & \text{al estado} \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \mathbf{e_1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & \mathbf{e_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} & \mathbf{e_n} \end{array}$$

Así la probabilidad de cambio del estado e_1 al e_2 viene dada por p_{21}. De igual modo p_{n1} es la probabilidad de cambiar del estado e_1 al e_n, p_{12} es la probabilidad de cambiar del estado e_2 al e_1.

Esta matriz que representa las probabilidades de transición de un estado a otro de los miembros de una población se llama **matriz de probabilidades de transición**. Su interpretación consiste en los siguiente: En horizontal colocamos los estados actuales y en vertical los estados a los que se puede pasar. Por último colocamos las probabilidades de transición de un estado a otro.

Como las probabilidades de un estado a otro oscilan entre 0 y 1, todos los elementos de la matriz de probabilidades de transición están entre estos dos valores. Además, las columnas reflejan las probabilidades de transición del estado de la columna j al resto por lo tanto la suma de todos los valores de la columna tiene que ser igual a 1 (suma todas las probabilidades posibles). A este tipo de matrices se les llama matriz estocástica.

Definición 2.13. *Una matriz estocástica es aquella que todos sus elementos tienen un valor comprendido entre 0 y 1 y además la suma de los elementos de cada columna es igual a 1.*

Por último es útil identificar la que se llama **matriz de estado**. Esta matriz representa el estado actual de la población en cada uno de los estados posibles. Así por ejemplo si nos dicen que de la población total de estudio que son 10000 personas hay 5500 que no fuman, 3000 que fuman una o menos de una cajetilla y 1500 fuman más de una, la matriz de estado sería

$$\begin{pmatrix} 5500 \\ 3000 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

2.3. Ejercicios

1. Hallar todas las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Obtener $A + A^t,\ A - A^t,\ AA^t$ y A^n.

3. Calcular $a)\ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n \quad ; \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ *siendo* $n \in \mathbb{N}$.

4. Calcular A^n siendo:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indicación: usar $\binom{n}{2} = 1, 2, 3, 10, 15 \ldots, \ \forall\ n \geq 2$

5. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^n = 2^{n-1}A$.

6. Calcular $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{30}$.

7. Sea A una matriz arbitraria. Demostrar que $A + A^t$ es una matriz simétrica y que $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

8. Sea A una matriz antisimétrica. Demostrar que A^2 y A^4 son simétricas.

9. Determinar los parámetros a y b para que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes.

10. El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20 % de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30 % de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. ¿Cuántos lo comprarán al mes próximo? ¿y dentro de dos meses?.

11. En una población de 10000 habitantes, 5000 no fuman, 2500 fuman uno o menos de un paquete diario y 2500 fuman más de un paquete diario. En un mes hay un 5 % de probabilidad de que un fumador comience a fumar un paquete diario, o menos, y un 2 % de que un no fumador pase a fumar más de un paquete diario. Para los que fuman un paquete, o menos, hay un 10 % de probabilidad de que dejen el tabaco, y un 10 % de que pasen a fumar más de un paquete diario. Entre los que fuman más de un paquete, hay un 5 % de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10 % de que pasen a fumar un paquete, o menos. ¿Cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes? ¿Y dentro de dos meses?

Capítulo 3

Determinantes

3.1. Definición.

El determinante de una matriz cuadrada A es un número asociado a dicha matriz que se representa por $|A|$ o $\det(A)$ o $D(A)$ y nos indica lo siguiente:

1. Si es igual a cero, los vectores que componen la matriz son linealmente dependientes, es decir, al menos uno de ellos es combinación lineal de los restantes.

2. Si es diferente de cero, los vectores que componen la matriz son linealmente independientes. Ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los restantes.

3. Si es diferente de cero, la matriz tiene inversa.

4. Su valor absoluto es el área del paralelogramo construido con los vectores que forman la matriz (matriz de orden 2×2) o el volumen del paralelepípedo construido con los vectores que forman la matriz (matriz 3×3).

Definición 3.1. *El determinante de una matriz cuadrada de orden n es la suma (o resta) de todos los posibles productos de n elementos de manera que cada uno pertenezca a filas y columnas distintas.*

3.1.1. Determinante de una matriz cuadrada de orden 2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el determinante de esta matriz es el número

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 3.2. *Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ como $|A| = -13$ entonces esto significa:*

1. *Al ser el determinante distinto de cero, los vectores fila $(-1, 3)$ y $(4, 1)$ son linealmente independientes, es decir, no son paralelos entre sí.*

2. *Además al ser el determinante distinto de cero, la matriz posee inversa.*
3. *Además al ser distinto de cero, el valor absoluto de este, es decir,* 13 *es el área del paralelogramo construido sobre dichos vectores*

3.1.2. Determinante de una matriz cuadrada de orden 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. El determinante de esta matriz es

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

3.2. Propiedades de los determinantes

1. Si A es una matriz triangular el determinante de A es el producto de los elementos de la diagonal principal.
2. $|A| = |A^t|$
3. Si los elementos de una fila o columna son cero, el determinante es cero.
4. Si multiplicamos o dividimos todos los elementos de una fila o columna por un número, el determinante queda multiplicado o dividido por ese número.
5. Si se permutan entre sí dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.
6. Si una matriz tiene 2 filas o 2 columnas iguales el determinante es cero.
7. Si una matriz tiene una fila o una columna proporcional a otra su determinante es cero.
8. Si cada elemento de una fila o columna se expresa como suma de varios sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes de las matrices que se van formando al sustituir dicha líneas por los primeros, segundos, ... sumandos.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\tilde{a}_{31} & a_{32}+\tilde{a}_{32} & a_{33}+\tilde{a}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{vmatrix}$$
9. Si una fila o columna se cambia por ella misma mas una combinación lineal de las restantes el determinante no cambia.
10. Si una fila o columna de una matriz es una combinación lineal de las restantes el determinante es cero.
11. El determinante del producto de 2 matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes
$$|AB| = |A||B|$$

3.3. Determinante de matrices cuadradas de orden superior a tres

Definición 3.3. *Sea A una matriz cuadrada de orden n, se llama* ***menor complementario del elemento*** a_{ij} *al determinante de la matriz que resulta al eliminar en A la fila i y la columna j. Se denota por α_{ij} o también por M_{ij}*

Ejemplo 3.4. *Si* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *entonces el menor complementario de a_{23} es*

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$$

Definición 3.5. *Se llama* ***adjunto*** *del elemento a_{ij} al menor complementario de a_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Se representa por A_{ij}*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Teorema 3.6. *El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera multiplicados por sus correspondientes adjuntos*

Ejemplo 3.7. *Si desarrollamos la fila i*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Si desarrollamos la columna j

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Ejercicio 3.8. *Calcular*

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Definición 3.9. *Sea A una matriz de dimensiones $n \times m$. Se llama* ***menor de orden*** k ***de*** A *al determinante de la matriz cuadrada formada tomando k filas y k columnas*

Definición 3.10. *Se llama* ***menor principal*** *de una matriz A a todo menor no nulo de orden k de manera que todos los menores de orden mayor que k son nulos.*

Definición 3.11. *Se llama* ***rango*** *de una matriz al número de filas o columnas linealmente independientes que tiene la matriz.*

Observa que el rango de una matriz coincide con el orden de cualquier menor principal de la matriz

Ejercicio 3.12. *Calcular el rango de las siguientes matrices*

$$a)\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 6 & 3\end{pmatrix} \qquad b)\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 7\\ 4 & 5 & 3 & 13\end{pmatrix}$$

3.3.1. Determinante de Vandermonde

Se verifica que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

3.4. Cálculo de la inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n; la matriz inversa, si existe, debe ser una matriz B también de orden n tal que

$$A\cdot B = B\cdot A = I_n$$

A la inversa de A se la suele denotar por A^{-1}

Teorema 3.13. *Una matriz cuadrada A de dimensión $n\times n$ tiene inversa si $|A|\neq 0$. En este caso la inversa es:*

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|}\end{pmatrix}.$$

Para realizar el cálculo de la inversa de una matriz

1. Comprobamos que $|A|\neq 0$
2. Escribimos A^t
3. Sustituimos cada elemento de A^t por su adjunto
4. Dividimos cada adjunto por $|A|$

Ejemplo 3.14. *Calcular la inversa de* $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$

1. $|B|=-1\neq 0$ *por tanto podemos calcular* B^{-1}
2. $B^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

3. Sustituimos cada elemento de B^t por su adjunto, de modo que resulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Finalmente dividimos cada adjunto por el determinante de B

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3.5. Geometría analítica en relación con el cálculo de determinantes

- El área de un triángulo dado por sus vértices $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3)$ viene dada por

  $$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

  Tomando siempre el resultado positivo.

- La ecuación de la recta que pasa por dos puntos $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2)$ se puede obtener a partir de la expresión:

  $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ejercicio 3.15. *1. Calcular el área de un triángulo con vértices* $(1, 0), (2, 2), (4, 3)$

2. Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 4)$ *y* $(-1, 3)$

3.6. Ejercicios

1. Siendo x, y, z números enteros cualesquiera, demostrar sin desarrollar que $\begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix}$ es múltiplo de $(x + y + z)$

2. Obtener la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

3. Calcular el rango de las siguientes matrices según los valores de t:

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 2t & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ -1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{pmatrix}$$

5. Una matriz cuadrada se llama **ortogonal** cuando su inversa es igual a su traspuesta. Calcular x e y para que la siguientes matriz sea ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 1 \\ c & z & 1 \end{vmatrix} = 2$, calcula

$$\begin{vmatrix} 2a-x & x+1 & a-2 \\ 2b-y & y+1 & b-2 \\ 2c-z & z+1 & c-2 \end{vmatrix}$$

Capítulo 4

Sistemas de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal con n incógnitas es una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b.$$

Los valores de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son conocidos, mientras que los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denominados incógnitas, son desconocidos.

Ejemplo 4.1. *1.* $5x_1 = 15$. *Ecuación lineal con una incógnita.*

2. $3x_1 + 4x_2 = 26$. *Ecuación lineal con dos incógnitas.*

3. $4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$. *Ecuación lineal con tres incógnitas*

Si en 1. reemplazamos x_1 *por 3, se obtiene* $5 \cdot 3 = 15$. *Decimos que* 5 *es solución de la ecuación. Además es la* ***única****.*

Si en la segunda ecuación reemplazamos x_1 *por 2 y* x_2 *por 5, se verifica que* $3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 26$. *Decimos que el par* $(2, 5)$ *es una solución de la ecuación. En este caso la solución no es única. Otra solución sería* $(9, -1/4)$*. Esta ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Si las representamos gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas obtenemos una recta.*

Lo mismo ocurre en la tercera ecuación. Por ejemplo (3, 12, 0), existiendo infinitas soluciones. Todas ellas se encuentran situadas en un plano.

4.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 4.2. *Se denomina sistema de* m *ecuaciones con* n *incógnitas a un conjunto de expresiones algebraicas de la forma:*

$$\left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n. \end{array} \right.$$

Al tratar de resolver un sistema, nos podemos encontrar con una de estas tres posibilidades:

1. Si el sistema tiene una única solución se dice que es **compatible determinado**.
2. Si el sistema tiene infinitas soluciones se dice que es **compatible indeterminado**.
3. Si el sistema no tiene soluciones se dice que es **incompatible**.

Podemos escribir el sistema en forma matricial del siguiente modo

$$A \cdot X = B, \quad \text{siendo}$$

A la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matriz de incógnitas y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ la matriz de términos independientes.

Definición 4.3. *Se llama **matriz ampliada** a la resultante de añadir a la matriz de coeficientes una columna formada por los términos independientes.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

4.1.1. Sistemas equivalentes

Definición 4.4. *Dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.*

Teorema 4.5. ***Teorema fundamental de equivalencia.*** *Si en un sistema de ecuaciones se sustituye la ecuación i-ésima por una combinación lineal de ella misma y las restantes, el sistema que se obtiene es equivalente al dado.*

Corolario 4.6. *Si en un sistema de ecuaciones se suprime una ecuación que es combinación lineal de las restantes el sistema obtenido es equivalente al dado.*

4.1.2. Sistemas de Cramer

Definición 4.7. *Un sistema de ecuaciones se llama* ***sistema de Cramer*** *si el número de ecuaciones es igual an número de incógnitas* $(m = n)$ *y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero* $|A| \neq 0$.

Teorema 4.8. *Todo sistema de Cramer tiene solución única y el valor de la incógnita i-ésima es*

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & b_m & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}}.$$

Ejercicio 4.9. *Resolver los siguientes sistemas:*

$$a) \left\{ \begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \right. \qquad b) \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0. \end{aligned} \right. \qquad c) \left\{ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Teorema 4.10. ***Teorema de Rouché Frobenius***

- *Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución* $\Leftrightarrow$ *la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen el mismo rango,* r.
- *Si el rango* r *es igual al número de incógnitas* n *, el sistema es compatible determinado (solución única)*
  Si el rango r *es menor que el número de incógnitas* n*, el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). En este caso, el conjunto de soluciones depende de* $n - r$ *parámetros.*

Ejemplo 4.11. *Clasifica y resuelve el sistema:*

$$\left\{ \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \right.$$

Consideremos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que rango(A) = 2 = rango(A^*) por tanto por el teorema de Rouché Frobenius el sistema tiene solución. Por otro lado como rango = r = 4 ¡ número de incógnitas =2, el sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado). Además el conjunto de soluciones dependerá de $4 - 2 = 2$ *parámetros.*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -1 + x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 = 2 - x_3 \end{cases}$$

Consideremos estos $x_3 = \lambda$ y $x_4 = \mu$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = -1 + \lambda - \mu \\ x_1 - x_2 = 2 - \lambda \end{cases}$$

De modo que tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y ahora lo podemos tratar como un sistema de Cramer y aplicar las fórmulas anteriores, así

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1+\lambda+\mu & 2 \\ 2-\lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3+\lambda+\mu}{-4} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1+\lambda+\mu \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5+3\lambda-\mu}{-4}$$

Ejercicio 4.12. *Clasifica y resuelve los siguientes sistemas:*

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ x - y + 4z = 12 \\ x + y - 6 = 1 \\ 5x - y = 15. \end{cases}$$

4.1.3. Sistemas homogéneos

Definición 4.13. *Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo si los términos independientes son todos nulos.*

Ejemplo 4.14.

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{cases}$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius como

$$rango \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 \end{pmatrix}$$

el sistema tiene solución. Evidentemente siempre se tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.

Teorema 4.15. *Un sistema homogéneo tiene solución distinta de la trivial* $\Leftrightarrow$ *el rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas.*

Ejercicio 4.16. *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + y - 7z = 0 \\ x - y - 3z = 0. \end{cases}$$

4.2. Método de eliminación de Gauss-Jordan

Este método está basado en el teorema fundamental de equivalencia y su corolario. Consiste en llegar a un sistema "escalonado" transformando la matriz ampliada en una matriz escalonada por filas.

Ejemplo 4.17. *Resolver el sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 5x - y + 2z = 2. \end{cases}$$

La matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Buscamos obtener un 1 en el primer elemento de la primera columna. En este ejemplo no se requiere ninguna transformación puesto que ya es la unidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow_{\substack{2^a fila = (-2)\cdot 1^a fila + 2^a fila \\ 3^a fila = -5\cdot 1^a fila + 3^a fila}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{3^a fila = 6\cdot 2^a fila + 3^a fila} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 25 & 3 \end{pmatrix}$$

Incorporamos a los coeficientes de la matriz las incógnitas y los signos de igualdad con lo que queda un sistema escalonado equivalente al primero, de modo que tenemos:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 25z = 3. \end{cases}$$

Y vamos resolviendo de la última ecuación a la primera:

$25x = 3 \;\Rightarrow\; z = \frac{3}{25}$
$y + 3 \cdot \frac{2}{25} = 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{16}{25}$
$x + \frac{16}{25} - \frac{3}{25} = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{12}{25}$
Se trata por tanto de un sistema compatible determinado.

Ejercicio 4.18. *Resolver los sistemas por el método de eliminación de Gauss.*

$$a)\left\{\begin{aligned} 3x+3y+11z-t&=8\\ 2x+5z+3t&=4\\ x-y+2z+2t&=2. \end{aligned}\right. \qquad b)\left\{\begin{aligned} -y+z&=-2\\ x+2y+4z&=3\\ 2x+4y+8z&=1. \end{aligned}\right.$$

Ejercicio 4.19. *Resolver los siguientes sistemas según los distintos valores del parámetro a y resolverlos cuando sea posible.*

$$a)\left\{\begin{aligned} 2x+y+az&=4\\ x+z&=2\\ x+y+z&=2. \end{aligned}\right. \qquad b)\left\{\begin{aligned} ax+y+z&=0\\ x+ay&=0\\ 2x+az&=0. \end{aligned}\right. \qquad c)\left\{\begin{aligned} -y+z&=a+1\\ x+(1+a)y+z&=a+3\\ x+y+(a+1)z&=-2a-4. \end{aligned}\right.$$