PROBLEMAS DE CÁLCULO. Curso 2007/2008.
(Integral de Riemann. Integrales Impropias)

1.- Estudiar si es integrable en el intervalo [0,4] la función dada por: $f(x)=\begin{cases} x\,;\, x\neq 1 \\ 3\,;\, x=1 \end{cases}$

2.- a) Probar que es integrable en el intervalo [1,4] la función: $f(x)=\begin{cases} 0\,;\, \text{si } x\neq 3 \\ 1\,;\, \text{si } x=3 \end{cases}$

b) Utilizar el apartado a) para probar que la función $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ es derivable y que F´(x)=0 para todo x del intervalo (1,4). ¿Contradice el teorema fundamental?

3.- Probar que toda función monótona en un intervalo [a, b] es integrable-Riemann en dicho intervalo.

4.- Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

a) $F(x)=\int_0^x \sqrt{e^t+1}\,dt$; b) $G(x)=sen\int_{-x}^{x}\frac{dt}{1+sen^2 x}$; c) $H(x)=\int_o^{x^2} sen^3 t\,dt$; d) $I(x)=\int_a^b \frac{x}{1+\cos^3 t}dt$

5.- Determinar una función continua, f y un número real, a tales que $\int_a^x f(t)dt=\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.-a) Hallar el valor de $\mu\in\Re$ tal que $\int_1^3 f(x)dx=2\,\mu$, siendo $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } 1\leq x<2 \\ 2 & \text{si } 2\leq x\leq 3 \end{cases}$

b) ¿Existe algún punto c del intervalo [1, 3] tal que f(c)=μ ?
c) ¿Contradice el teorema del valor medio para integrales?

7.- Calcular la ecuación de la recta tangente en x = 2 a la función $f(x)=\int_4^{x^2}\ln(t^3+4)dt$.

8.- Sea $f(x)=\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}dt$. ¿Es evitable la discontinuidad de la función f en x=0? Razónalo.

9.- Estudiar razonadamente si se puede aplicar la regla de L´Hôpital y calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} sen\sqrt{t}dt}{x^3}$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{sen^2 t}{t}dt}{x^2}$

10.- Probar que la función $F(x) = -1 + \int_0^x e^{t^2}\,dt$ tiene una sola raíz real en [0,1].

11.- Sea f(x) una función derivable en todos los números reales, verificando que f(0)=0 y f´(x)>0 para todo x real. Estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos de la función: $F(x) = \int_0^{x^2-3x+2} f(t)\,dt$.

12.- Sin resolver las integrales, indicar razonadamente dónde hay máximos y mínimos relativos de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_0^x (t-1)(t+1)\,dt$; b) $G(x) = \int_0^x \left(t^3 - 4t\right)dt$; c) $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$, con $x > 0$.

13.- En el intervalo [0,4] se define $F(x) = \int_0^x \sqrt{16 - t^2}\,dt$. Calcular F´(2) y F(2).

14.- Si f es una función continua en $\Re$ tal que $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\,dt = x$, $\forall x \in \Re$. Calcular f(2).

15.- Calcular, cuando existan, los valores de las integrales impropias siguientes:

a) $\int_0^1 \ln x\,dx$; b) $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^\alpha (x)}$, $\alpha > 0$; c) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$; d) $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$, e) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; f) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

g) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - senx}}\,dx$; h) $\int_1^\infty (1-x)e^{-x}\,dx$; i) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; j) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$; k) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$

16.- Estudiar, aplicando criterios de convergencia, el carácter de las integrales:

a) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2}$, b) $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $\int_0^\infty \frac{arctgx}{\sqrt{x^3}}\,dx$; d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + 4x^3}}$; e) $\int_0^\infty \frac{e^{-x} senx}{\sqrt{x+1}}\,dx$; f) $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{2x}+1}{\sqrt{senx}}\,dx$

g) $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$, h) $\int_1^2 \frac{x+1}{4-x^2}\,dx$, i) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 15}$; j) $\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+5}\,dx$; k) $\int_0^1 \frac{3sen^2 x + 5\cos^2 x}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$