TEMA 6. INTEGRAL DE RIEMANN

6.1 INTEGRAL DE RIEMANN

6.1.1 Partición de un intervalo

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $|\ f(x)\ | < K$ $\forall x \in [a,b]$.

Definición: Una partición de $[a,b]$ es un conjunto ordenado y finito de números reales y distintos

$$P = \{x_0 = a, \ldots\ldots, x_k, \ldots, x_n = b\}$$

tales que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots\ldots\ldots < x_n = b$$

Definición: Diremos que la partición Q es más fina que la P si se verifica que todo punto de P pertenece a y escribiremos $P \leq Q$.

La partición va a determinar en $[a,b]$ n subintevalos parciales.

6.1.2 Sumas superiores e inferiores. Propiedades

Consideremos el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Llamaremos:

$$M_k = \sup\{f(x) / x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$m_k = \inf\{f(x) / x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

La <u>suma inferior</u> de f correspondiente a P se define como $L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$

La <u>suma superior</u> de f correspondiente a P se define como

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

Propiedades de las sumas

i) Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada, P una partición de $[a,b]$, entonces

$$L(f,P) \leq U(f,P)$$

ii) Si Q es más fina que P entonces

$$L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P)$$

iii) Si P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$$

6.1.3 Integral superior e inferior

Llamemos ***P***$([a,b])$ al conjunto de todas las particiones, podemos considerar dos clases de conjuntos .

El conjunto formado por las sumas superiores y el formado por las inferiores.

Cualquier suma superior es un cota superior del conjunto de la sumas inferiores

Definición: Llamamos integral inferior y escribimos como $\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f,P),\ P$ una partición$\}$

Cualquier suma inferior es un cota inferior del conjunto de la sumas superiores

Definición: Llamamos integral superior y escribimos como $\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,P),\ P$ una partición$\}$

6.1.4 Integral de una función acotada

Definición: Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada . Entonces f es una función integrable Riemann en $[a,b]$ si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

A este número común se le designa por integral de f en $[a,b]$ y escribimos $\int_a^b f(x)dx$.

Asímismo, se define

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \ ,$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

NOTA: Si f es integrable

$$L(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P)$$

para todas las particiones P de $[a,b]$. Además $\int_a^b f(x)dx$ es el único elemento con esta propiedad.

Caracterización de la integral

Teorema: Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable en $[a,b] \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \ \exists \ P_1$ de $[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

Corolario: Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable en $[a,b] \Leftrightarrow \exists$ una sucesión $P_1, \ldots, P_n$ de particiones de $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} (U(f,P) - L(f,P)) = 0.$$

y en tal caso :

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} U(f,P) = \lim_{n\to\infty} L(f,P)$$

NOTA: Las funciones continuas, las monótonas y las que tienen un conjunto finito de discontinuidades son integrables.

6.1.5 Propiedades de la integral

1. Linealidad:

Sean $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones integrables, sea $k \in \mathbb{R},$ entonces las funciones kf y $f+g$ son integrables en I y:

$$i)\ \int_a^b kf = k\int_a^b f$$

$$ii)\ \int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

2. Monotonía.

$i)$ Si $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

$ii)$ Si $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

3. Acotación.

Si $m \leq f(x) \leq M$

$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$

4. Aditividad respecto al intervalo.

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable. Sea c

con $a < c < b$. Entonces f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, reciprocamente si f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ entonces es integrable en $[a,b]$ y se tiene

$$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$$

5. <u>Integrabilidad del producto y del cociente</u>

Sean f y g dos funciones reales integrables en $[a,b]$ entonces:

$i)$ La función producto es integrable en $[a,b]$

$ii)$ Si $|\ g(x)\ | \geq c,$ siendo $c > 0$. Entonces la función f/g es integrable en $[a,b]$.

6. <u>Valor absoluto</u>.

Si f es integrable $\Rightarrow |\ f\ |$ es integrable.

$$|\ \int_a^b f(x)\ | \leq \int_a^b\ |\ f(x)\ |$$

7. <u>Composición</u>.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable. Sea $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ una funcion continua tal que $f([a,b]) \subset [c,d]$. Entonces la composición $h = g \circ f$: $[a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$.

Teorema del valor medio para integrales:

Sea f continua en $[a,b]$ y g integrable en $[a,b]$ tal que $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$. Entonces existe un punto $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) = f(c) \int_a^b g(x)$$

Corolario: Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) = f(c)(b-a)$$

6.2 TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CALCULO

6.2.1 Integral indefinida

Definición: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función intregrable. Para todo $x \in [a,b]$ la restricción de f al intervalo $[a,x]$ es integrable. Por tanto, se puede definir una función $F_a : [a,b] \to \mathbb{R}$ que llamaremos integral indefinida de f en $[a,b]$.

$$F_a(x) = \int_a^x f(x)dx \qquad x \in [a,b]$$

Teorema: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, entonces la función $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua.

1^{er} Teorema fundamental del Cálculo:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y sea $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ la integral indefinida. Entonces $F_a(x)$ es derivable en cualquier punto $c \in [a,b]$ en el que f es continua siendo $F_a'(c) = f(c)$

6.2.3 Función primitiva. Regla de Barrow

Definición: Definimos función primitiva de f en $[a,b]$ a aquella función , si existe, $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ que es derivable en $[a,b]$ y tal que $F'(x) = f$ en $[a,b]$. Si f admite una primitiva F, entonces admite infinitas, que son de la forma $F(x) + k$.

Observaciones:

1. En el 1^{er} teorema fundamental del cálculo se supone que la función f es continua en $[a,b]$, y se deduce que f admite primitiva (la integral indefinida) .

Pero si f deja de ser continua en algún punto de $[a,b]$, aunque siga siendo integrable (admite integral indefinida) puede no admitir primitiva.

2. Utilizando el 1^{er} teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, se

van a poder derivar muchas funciones .

2º Teorema fundamental del Cálculo:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de f en $[a,b]$ ($F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$). Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

6.3 CÁLCULO DE PRIMITIVAS

6.3.1Primitivas inmediatas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C; \quad \int \frac{1}{sen^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -arc \cot x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C \quad ; \quad \int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arg \sinh x + C, \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \mathrm{arg}$$

Utilizando la regla de la cadena, las integrales inmediatas se pueden generalizar de acuerdo a la siguiente tabla.

$$\int f^{p}(x)f'(x)dx = \frac{f^{p+1}(x)}{p+1} + C; p \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int a^{f(x)}f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

$$\int \cos f(x)f'(x)dx = \sin f(x) + C$$

$$\int \sin f(x)f'(x)dx = -\cos f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^{2}f(x)}dx = \tan f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^{2}f(x)}dx = -\cot f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx = \arcsin f(x) + C = -\arccos f(x) +$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan f(x) + C = -arc\cot ag(x) +$$

$$\int \cosh(f(x))f'(x)dx = \sinh f(x)x + C \quad ;$$

6.4 INTEGRALES IMPROPIAS

6.4.1 Integrales impropias de primera especie

Definición: Sea f una función acotada e integrable en un intervalo de la forma $[a,b]$, entonces:

(1) $$\int_a^\infty f\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b fdx.$$

$i)$ Si este límite existe, diremos que la integral es convergente.

$ii)$ Si vale ∞ diremos que es divergente.

$iii)$ Si no existe el límite, no hay

integral.

De la misma forma se define:

(2) $$\int_{-\infty}^{b} f\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} fdx.$$

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty} fdx = \int_{-\infty}^{c} fdx + \int_{c}^{\infty} fdx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} fdx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} fdx.$$

6.4.2 Integrales impropias de segunda especie

Definición: Sea f una función no acotada en el punto x=a, e integrable en un intervalo de la forma $[c,b] \subset (a,b]$, entonces:

(1) $$\int_{a}^{b} f\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b} fdx.$$

$i)$ Si este límite existe, diremos que la integral es convergente.

ii) Si vale ∞ diremos que es divergente.

iii) Si no existe el límite, no hay integral.

Si $f(x)$ no está a cotada en $x = b$

(2) $$\int_a^b f\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} fdx.$$

Si $f(x)$ no está acotada en $x = c$ con $a < c < b$

(3) $$\int_a^b f\,dx = \lim_{\epsilon_1\to 0}\int_a^{c-\epsilon_1} fdx + \lim_{\epsilon_2\to 0}\int_{c+\epsilon_2}^{b} fdx.$$

Será convergente si existen y son finitos los dos límites del segundo miembro y será divergente si uno al menos es infinito.

Observación:

Puede ocurrir que el segundo miembro de (3) sólo exista cuando $\epsilon_1 = \epsilon_2$, en ese caso al límite le llamaremos valor principal de la integral.

6.4.3 Criterios de convergencia

1. Para integrales impropias de primera especie

1.1. Criterio de comparación:

Sean $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$, con $g(x) \leq f(x)$.

$i)$ Si $\int_a^\infty f(x)dx$ converge$\Rightarrow$ $\int_a^\infty g(x)dx$ converge.

$ii)$ Si $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge$\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

1.2. Criterio de comparación con paso al límite.

Sean $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$, con $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, entonces :

$i)$ Si $l \in \mathbb{R} - \{0\}$ las integrales convergen o divergen simultáneamente.

$ii)$ Si $l = 0$ y $\int_a^\infty g(x)$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)$ converge.

$iii)$ Si $l = \infty$ y $\int_a^{\infty} g(x)$ diverge $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)$ diverge.

2. Para integrales impropias de segunda especie

Los mismos criterios que en la de primera especie, teniendo en cuenta aquí que en el criterio de paso al límite, el límite tendremos que calcularlo en el punto donde la función no esté acotada.