TEMA 5. FUNCIONES DERIVABLES. TEOREMA DE TAYLOR

5.1 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

5.1.1 Definición de derivada

Definición: Sea I in intervalo abierto, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in I$. Diremos que f es derivable en a si existe y es finito el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$$

En este caso, el límite se designa por $f\,'(a)$ y recibe el nombre de derivada de f en a.

Si este límite existe cuando $h \to 0^+$ ó $h \to 0^-$, a este límite se le llama derivada por la derecha ó derivada por la izquierda de f en a (derivadas laterales) y se escriben como $f_+\,'(a)$, $f_-\,'(a)$ respectivamente.

Proposición: La condición necesaria y suficiente para que una función sea derivable en un punto es quelas derivadas laterales existan y sean iguales.

Definición: (Función derivable en un intervalo)

Sea I un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Si f es derivable en cada uno de los puntos de I diremos que f es derivable en I.

Diremos que f es derivable en un intervalo $[a, b]$ siempre que sea derivable en el intervalo abierto(a, b) y, además, existan las derivadas laterales $f_+\,'(a)$ y $f_-\,'(b)$

5.1.2 Interpretación geométrica de la derivada

1.De entre todas las rectas que pasan por el punto $(a, f(a))$, la tangente es la que mejor aproxima a la curva $y = f(x)$ en las proximidades de $x = a$.

2. La ecuacion de la recta tangente en el punto $x = a$ sería:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

3. Si la función admite derivada por la derecha en el punto $x = a$, entonces puede hablarse de semitangente por la derecha a la curva en el punto $(a, f(a))$. Dicha semitangente es la semirecta:

$$y = f(a) + f_+'(a)(x - a) \qquad x \geq a$$

Análogamente, si existe la derivada por la izquierda $f'_-(a)$, se define la semitangente por la izquierda.

De hecho si tiene derivadas laterales finitas y distintas, la gráfica presenta un pico en el punto $x = a$ y se suele decir que el punto a es un punto anguloso.

4. Si $f'(a) = 0$, la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto a es una recta horizontal.

5. La recta perpendicular a la tangente en el punto $(a, f(a))$ es la normal a la curva en dicho punto.

La ecuación de la normal a f en a, si

$f'(a) \neq 0$ es:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Si $f'(a) = 0$, la normal sería $x = a$

6. En el caso en el que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty.$$

La gráfica va presentar una tangente vertical.

5.1.3 Tabla de derivadas

Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$
c constante	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\log_a x \ \ (a > 0)$	$\frac{1}{x \log a}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$a^x \ \ (a > 0)$	$a^x \log a$
e^x	e^x

$senx$	$\cos x$
$\cos x$	$-senx$
tgx	$1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cot gx$	$-1 - \cot^2 x = \dfrac{-1}{sen^2 x}$
$arcsenx$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$arctgx$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$
shx	chx
chx	shx

5.2 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

5.2.1 Continuidad de las funciones derivables

Teorema: Si f es derivable en $x = a \Rightarrow f$ es continua en $x = a$.

El recíproco es falso.

5.2.2 Propiedades algebraicas

Teorema: Sean f y g dos funciones reales definidas en I, si son derivables en $x = a \Rightarrow$

$i)$ $(f+g)$ es derivable en $x = a$, siendo

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$ii)$ (fg) es derivable en $x = a$, siendo

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$$

$iii)$ $\dfrac{f}{g}$ es derivable en $x = a$, si $g(a) \neq 0$, siendo

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f\,'(a)g(a) - g\,'(a)f(a)}{(g(a))^2}$$

$vi)$ kf es derivable en $x = a,\ k \in \mathbb{R},$ siendo

$$(kf)\,'(a) = kf\,'(a)$$

5.2.3 Derivada de la función compuesta y del la inversa

Teorema: Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset \mathbb{R}.$ Si f es derivable en el punto $x = a$ y g es derivable en $f(a) \in J$, entonces $h = g \circ f$ es derivable en $x = a$ y su derivada es:

$$(g \circ f)\,'(a) = g\,'(f(a))f\,'(a).$$

Teorema: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ derivable en $x = a$, con $f\,'(a) \neq 0,$ y sea $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ la inversa de f, cuya existencia suponemos. Entonces f^{-1} es derivable en $f(a)$ y se cumple.

$$(f^{-1})\,'(b) = \frac{1}{f\,'(f^{-1}(b))}$$

5.3 EXTREMOS LOCALES DE FUNCIONES

Definición: Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I , y sea x_0 un punto interior de I, diremos que x_0 es un máximo relativo si $f(x_0) \geq f(x)\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$

Diremos que x_0 es un mínimo relativo si $f(x_0) \leq f(x)\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$

Diremos que x_0 es un máximo absoluto si $f(x_0)\ \geq\ f(x)\ \forall\ x \in I.$

Diremos que x_0 es un mínimo absoluto si $f(x_0)\ \leq\ f(x)\ \forall\ x \in I.$

A los máximos y mínimos relativos se les llama extremos relativos.

A los máximos y mínimos absolutos se les llama extremos absolutos.

Teorema(condición necesaria de extremo relativo):Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $x_0 \in I$. Si x_0 es interior de I y f tiene un extremo relativo en x_0 , entonces $f'(x_0) = 0$

Observaciones

1. La condición anterior no es una condición suficiente para la existencia de extremo relativo.

2. La condición anterior deja de ser cierta si el punto x_0 deja de ser interior, es decir, si x_0 es el origen ó el extremo de I.

3. La condición anterior asegura que la existencia de un tal extremo de f en x_0 implica que si existe $f'(x_0)$ esta es cero. Pero si la derivada no existe el teorema no es de aplicación. La función puede tener un extremo relativo en un punto donde la función no sea derivable.

5.4 EXTREMOS ABSOLUTOS

Daremos un procedimiento para resolver el siguiente problema:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Encontrar sus extremos absolutos.

1. Calculamos los candidatos a extremos absolutos, estos serían:

$i)$ Los puntos x_0 que hacen cero la primera derivada, siendo f derivable en x_0 y x_0 interior.

$ii)$ Los extremos del intervalo.

$iii)$ Los puntos donde la función no sea derivable.

2. Se evalúa f en todos los puntos obtenidos en el apartado anterior. El valor máximo de todas estas evaluaciones corresponde al máximo (o máximos) absoluto; y el valor mínimo de todas ellas corresponde al mínimo (o mínimos)

absoluto.

5.5 TEOREMA DE ROLLE

<u>Teorema de Rolle:</u> Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, con f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) si $f(a) = f(b),$ entonces existe un

$c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

5.6 TEOREMAS DEL VALOR MEDIO DE LAGRANGE. CONSECUENCIAS

Teorema del valor medio de Lagrange:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, con f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists\ c \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Consecuencias del teorema del valor medio

1. Teorema: Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), con $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ entonces la función f es constante.

2. Teorema: Si f y g son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) con $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$ entonces $\exists\ c \in (a,b)$ tal que $f(x) = g(x) + cte$

3. Funciones monótonas derivables:

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable en I, entonces :

$i)$ $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ es monótona creciente.

$ii)$ $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ es monótona decreciente.

$iii)$ Si $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente.

$iv)$ Si $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente.

Condiciones suficientes de extremo relativo

Teorema. Sea $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en (a,b) y derivable en todos los puntos de (a,b) salvo a lo mas en un punto c $\in (a,b)$. Supongamos que se cumple.

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{si } x \in (a,c)$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{si } x \in (c,b)$$

Entonces f tiene en c un mínimo relativo.

Si se cumple que:

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{si } x \in (a,c)$$
$$f'(x) \leq 0 \quad \text{si } x \in (c,b)$$

Entonces f tiene en c un máximo relativo relativo.

Nota: La continuidad de la función f en el intervalo (a,b) es imprescindible.

5.7 TEOREMA DE CAUCHY. REGLA DE L´HOPITAL

Teorema de Cauchy: Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$y derivables en (a,b) entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$$

Supongamos que además se cumple alguna de las siguientes condiciones:

i) $g'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$

ii) $g(b) \neq g(a)$ y $f'(x)$ y $g'(x)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto $x \in (a,b)$.

Entonces la conclusión anterior se puede expresar:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Regla de L´Hôpital.

$\boxed{\text{Caso1. } \frac{0}{0}}$

Teorema: Sean f y g continuas en $[a,b]$y derivables en (a,b)con $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Si se cumple que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$\boxed{\text{Caso2. } \frac{\infty}{\infty}}$

En las mismas condiciones que el teorema anterior si se cumple

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Nota: El punto a puede ser un número real ó $\pm\infty$. Lo mismo que l puede ser real ó $\pm\infty$

5.8 DERIVADAS SUCESIVAS .

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo I, es decir, en todos los puntos del intervalo I. Se llama función derivada o derivada de orden uno a:

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f'(x).$$

Si existe la derivada de f' en un punto a de I a ésta se le llamará derivada segunda y se denotará por $f''(a)$.

Si esta derivada segunda existe para todo punto x de I podremos hablar de derivada segunda como

$$f'' : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f''(x).$$

En general hablaremos la existencia de la derivada n-ésima ó derivada de orden n en el punto x cuando la función es derivable n-veces en el punto x y escribiremos como $f^{(n}(x)$. Si la función es derivable n-veces en I, hablaremos de la función derivada n-ésima.

Derivada de orden n de un producto. Regla de Leibnitz.

Dadas las funciones f y g que admiten derivada de orden n en el punto x. Entonces $f.g$ admite derivada de orden n en x , verificándose:

$$(fg)^{(n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k}(x) g^{(k}(x) =$$

$$= \binom{n}{0} f^{(n}(x)g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1}(x)g´(x) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \binom{n}{n} f(x)g^{(n}(x)$$

5.9 TEOREMA DE TAYLOR.

<u>Teorema</u>: Sea f una función con derivada n-ésima en el punto x_0 . Entonces existe un polinomio $P(x)$ y sólo uno de grado $\leq n$ que llamaremos de Taylor que

satisface :

$$f(x_0) = P(x_0);\; f'(x_0) = P'(x_0);\; ......; f^{n)}(x_0) = P^{n)}(x$$

Dicho polinomio viene dado por:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}f^{n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Nota: Este polinomio proporciona una aproximación razonable de f en los puntos cercanos a x_0.

Nota: Cuando el desarrollo lo hacemos en el punto $x_0 = 0$, decimos al polinomio de Mac-Laurin.

Teorema: Sea $n \in \mathbb{N}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que f y sus derivadas $f', f'', \ldots, f^{n)}$ son continuas en $[a,b]$ y $f^{n+1)}$ existe en (a,b). Si $x_0 \in [a,b]$ entonces para cualquier x en $[a,b]$ existe un c entre x y x_0 tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 +$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}f^{n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$$

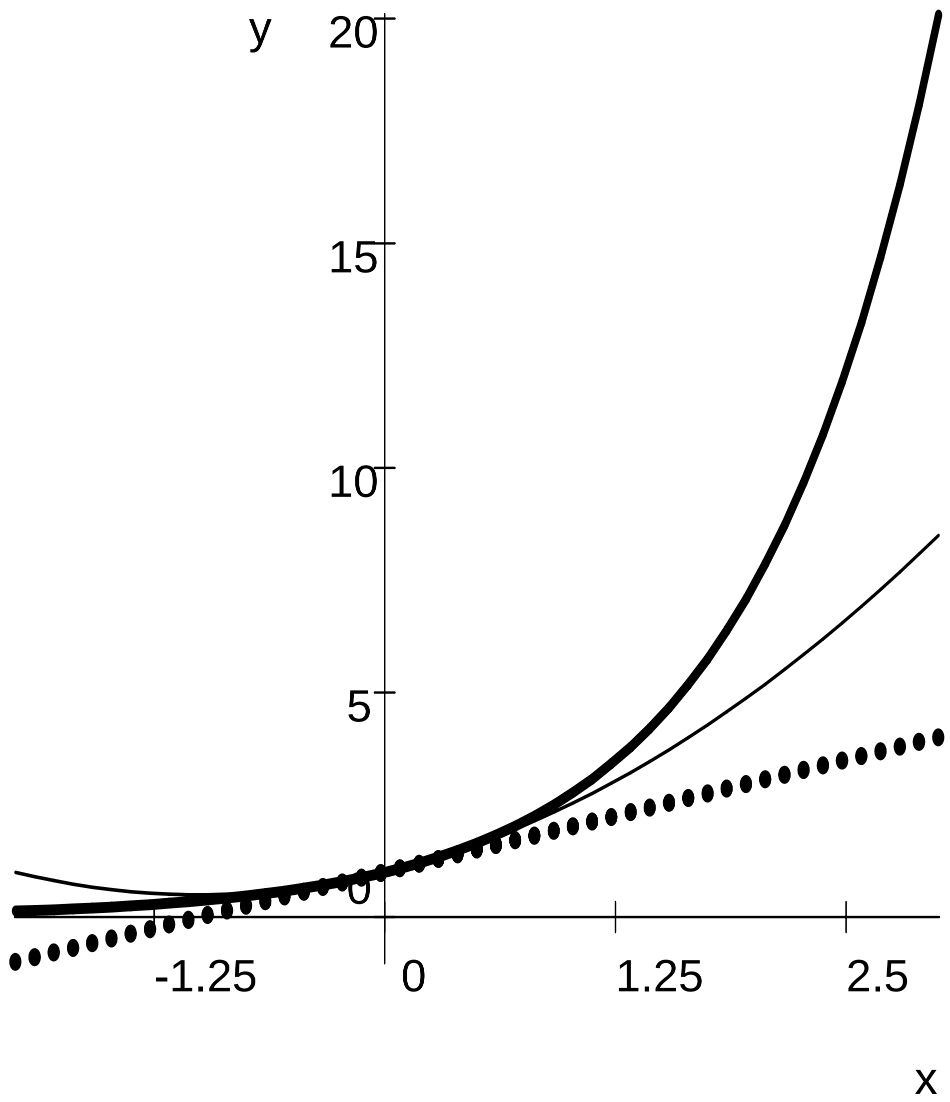
donde $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}$ y le llamaremos resto de Lagrange.

Luego $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

Teorema: Si f es una función n veces derivable en el punto x_0 y $P_n(x)$ es su polinomio de Taylor se cumple:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Polinomios de Taylor de orden 1 y 2 de la función $f(x) = \exp x$



5.9.1 Aplicación al cálculo aproximado de valores de una función

1. El R_n en el teorema de Taylor se puede usar para estimar el error al aproximar una función mediante su polinomio de Taylor.

Si el número n se fija de antemano, entonces se plantea la cuestión de la precisión de la aproximación .

Si se especifica la precisión entonces la cuestión será encontrar un n adecuado.

2. La sustitución de una función por su polinomio de Taylor tiene validez local, es decir, la aproximación es buena en un entorno del punto.

3. La fórmula de Taylor también puede evaluarse si una función cumple los requisitos del teorema de Taylor en un intervalo $[x, x_0]$ teniendo en cuenta que, en ese caso, c pertenecería al intervalo (x, a).

5.9.2 Aplicación al cálculo de extremos relativos

Una forma de determinar si c es un máximo ó mínimo relativo (o ninguno de los dos), es usar el criterio de la primera derivada (estudiando el signo de la primera derivada a ambos lados del punto).

Las derivadas n-ésimas, en caso de existir, también se pueden utilizar para determinar si el punto crítico es un extremo relativo.

Teorema: Sea I un intervalo, sea x_0 un punto interior de I y sea $n \geq 2$. Supongamos que existen las derivadas $f',f'',\ldots\ldots,f^{n)}$ y que son continuas en un entorno del punto x_0 y que

$f'(x_0) = \ldots = f^{n-1)}(x_0) = 0,$ pero $f^{n)}(x_0) \neq 0.$

$i)$ Si n es par y $f^{n)}(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

$ii)$ Si n es par y $f^{n)}(x_0) < 0$, entonces f

tiene un máximo relativo en x_0.

iii) Si n es impar, entonces f no tiene un máximo relativo ni un mínimo relativo en x_0.

5.9.3 Aplicación al estudio de la curvatura de una función

Definición: Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sea $c \in (a,b) \subset D$ con f derivable en c. Diremos que f es cóncava en $x = c$ cuando en un entorno de c, la gráfica de la función f queda por encima de la recta tangente a la gráfica en $(c,f(c))$.

Diremos que f es convexa en $x = c$ cuando en un entorno de c, la gráfica de la función f queda por debajo de la recta tangente a la gráfica en $(c,f(c))$.

Definición: Una función es cóncava(convexa) en un intervalo de su dominio, si lo es en cada uno de sus puntos.

Definición: Diremos que la función tiene en c un punto de inflexión si la función es cóncava en $(c-\delta, c)$ y convexa en $(c, c+\delta)$ ó viceversa.

Caracterización de la concavidad y la convexidad

Teorema: Sea f una función n veces derivable en a y que verifica $f''(a)=0,\ldots,f^{n-1)}(a)=0,\ f^{n)}(a)\neq 0, n\geq 2.$ Entonces se tiene:

$i)$ Si n es par y $f^{n)}(a)>0\Rightarrow f$ es concava en a.

$ii)$ Si n es par y $f^{n)}(a)<0\Rightarrow f$ es convexa en a.

$iii)$ Si n es impar y $\Rightarrow f$ presenta un punto de inflexión en a.

5.10 ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCIÓN

Definición: Una recta no vertical de ecuación $y=mx+n$ se llama asíntota oblicua de la gráfica de la función f si:

$$\lim_{x \to \mp\infty} \left(f(x) - (mx + n)\right) = 0.$$

Para el caso particular de $m = 0$, se llama asíntota horizontal.

Cálculo de asíntotas.

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$\lim_{x \to \mp\infty} \left(f(x) - mx\right) = n$$

Si ambos límites existen y son finitos, tendremos una asíntota oblicua de ecuación $y = mx + n$.

Definición: Una recta vertical de ecuación $y = c$ se llama asíntota vertical de la gráfica de la función f si:

$$\lim_{x \to c^{\mp}} f(x) = \mp\infty$$