PROBLEMAS TEMA 4. Curso 2007/2008

Funciones, límites y continuidad

1.- Encontrar el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$; b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 5x + 6}$; c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln(2-x)}$;
d) $i(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}$;$j(x) = \sqrt{-x} + 1$

2.- Estudiar la paridad de las siguientes funciones:
a) $f(x) = x^2 - |x|$; **b)** $g(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$; **c)** $h(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$, con $a > 1$

3.- Calcular , cuando se pueda, el límite de las funciones:
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1 + 2^{\tan x}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \tan(e^{-x})$; **d)** $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \ln\sqrt{x+1}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 4} arctg\left(\dfrac{x}{x-4}\right)$

4.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m}{x^n - 1}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^x$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - a^x}{2x\ln a}$
f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)x^2$; **g)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$; **h)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4}}$;
i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - 27}}{\sqrt[3]{x^2 + 6x - 27}}$; **j)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$ **k)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(1 - \cos(1/x))$;

5.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones según los valores de **a**

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & x \neq 2 \\ 2a - 3 & x = 2 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \leq 0 \\ x + 2a & x > 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 4.3^x & x \leq 0 \\ x + 2a & x > 0 \end{cases}$

6.- Sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

a) Estudiar su continuidad.
b) Si se consideran definidas sobre[-1,2], ¿están acotadas?, ¿alcanzan su máximo y su mínimo?.
c) Hallar $f([-1,2])$.

7.- Se consideran las funciones reales de variable real :

$f(x) = \begin{cases} x + \ln x & x > 1 \\ x^2 & x \leq 1 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x > 0 \\ e^x & x \leq 0 \end{cases}$

a) Probar que f y g son continuas en todo $\mathbb{R}$
b) ¿Está acotada $g \circ f$ en el intervalo$[-1,2]$?
c) Probar que existen dos puntos x_1, x_2 en el intervalo $(1, e^2)$

tal que $f(x_1) = \frac{\pi}{2}$ y $f(x_2) = \frac{3\pi}{2}$

d) Deducir del apartado anterior que existe x_0 en el intervalo $(1, e^2)$ tal que $(g \circ f)(x_0) = 0$

8.- Probar que las siguientes ecuaciones tienen al menos una raíz real:

a) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 1 = 0$, **b**)$x^{50} + \dfrac{133}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 70$ *c*) $x2^x = 1$;

d) $\dfrac{x^4 + 2x^2 + 5}{x - 1} + \dfrac{x^6 + 2x^4 + 6}{x - 7} = 0$

9.- Se considera la función $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ definida en $(3, 7)$. ¿Es continua?. ¿Está acotada superiormente?.¿Contradice algún teorema?.

10.- Calcular $f([-1, 4])$ siendo $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$, $\forall x \in [-1, 4]$.

11.- sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua en [-1,1] y tal que $f(-1) = f(1)$.

Demuestra que existe algún punto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = f(c - 1)$.