TEMA 4. FUNCIONES DE VARIABLE REAL

4.1 Definición de función real

Definición: Una función real de variable real es una aplicación de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

$$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

El dominio de una función es el conjunto de números reales donde está definida la función.

$$Domf = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in \mathbb{R}\}$$

La imagen de una función es el conjunto de números reales que se obtiene al aplicar f a su dominio

$$\mathrm{Im} f = \{y \in \mathbb{R} \ / \ \exists \ x \in \mathbb{R} \text{ con } f(x) = y\}$$

4.2 Operaciones con funciones

Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $A = Domf$ y $B = Domg$.

Definimos:

$i)\ (f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad \forall x \in A \cap B$

$ii)\ (f.g)(x) = f(x).g(x) \qquad \forall x \in A \cap B$

$iii)\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in A$

$iv)\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}\ \forall x \in A \cap B - \{x\, /g(x) =$

Definición: Dadas dos funciones $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$, se define la función compuesta $g \circ f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$

Definición: Sea $f : A \to B$ una función biyectiva , entonces existe una única función que llamaremos función inversa de f, $f^{-1} : B \to A$ que verifica:

$f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in A$ y $f\ (f^{-1}(y)) = y$, $\forall y \in B$

4.3 Propiedades de las funciones.

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de varible real, diremos que:

$i)$ f es monótona creciente si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

$ii)$ f es monótona decreciente si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de varible real, diremos que:

$i)$ f es par si $f(x) = f(-x)$

$ii)$ f es impar si $f(x) = -f(-x)$

Nota: La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas, la gráfica de una funión par es simétrica respecto al eje OY.

Definición: Una función real de variable real está acotada superiormente si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq K \quad \forall x \in A$.

Está acotada superiormente si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq K \quad \forall x \in A$.

Definición: Una función está acotada si lo está superior e inferiormente.

Definición: Una función es periódica si $\exists$ un $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, tal que $f(x+h) = f(x)$ $\forall x \in A$.

4.4 Limite de una función en un punto

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que la función f tiene por **límite** l en el punto a, y escribimos como $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ /\ 0 < |\ x - a\ | < \delta$$
$$\Rightarrow |\ f(x) - l\ | < \epsilon$$

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que el **límite por la derecha** de la función f en el punto a es l y escribimos como $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ si

$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \;/ a < x < a + \delta$
$\Rightarrow |\; f(x) - l \;| < \epsilon$

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ diremos que el **límite por la izquierda** de la función f en el punto a es l y escribimos como $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ si

$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \;/ a - \delta < x < a$
$\Rightarrow |\; f(x) - l \;| < \epsilon$

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que una función tenga límite en un punto, es que el límite por la derecha y por la izquierda valgan lo mismo.

4.5 Propiedades de los límites

Proposición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ si

$\lim_{x \to a} f(x)$ existe, este es único, es decir, si

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \text{ y } \lim_{x\to a} f(x) = m \Rightarrow l = m$$

<u>Proposición</u>: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ donde $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$ $\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = l$.

<u>Proposición</u>: Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y

$\lim_{x\to a} g(x) = m$ . . Entonces:

$i)$ $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = l + m$

$ii)$ $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = l\, m$

$iii)$ $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ $m \neq 0$,$g(x) \neq 0$

$vi)$ $\lim_{x\to a} \ln f(x) = \ln l$

$v)$ $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = l^{\,m}$

4.6 Límites infinitos y en el infinito

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ diremos que la función f tiene por **límite** ∞ en el punto a, y escribimos como $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ si

dado $M, \exists\ \delta > 0$ / $0 <|\ x - a\ |< \delta$ $\Rightarrow f(x) > M.$

Diremos que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si

dado $M, \exists\ \delta > 0$ / $0 <|\ x - a\ |< \delta$ $\Rightarrow f(x) < M.$

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ diremos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ si

$\forall \epsilon > 0, \exists\ M \in \mathbb{R}$ / $x > M \Rightarrow |\ f(x) - l\ |< \epsilon.$

Diremos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ si

dado $\forall \epsilon > 0, \exists\ M \in \mathbb{R}$ / $x < M$ $\Rightarrow |\ f(x) - l\ |< \epsilon$

4.7 Cálculo de límites

A la hora de calcular límites nos podemos encontrar con indeterminaciones, éstas se podrán resolver utilizando.

Operaciones algebraicas.

Infinitésimos equivalentes .

Regla de L'Hopital.

Infinitésimos

Definición: Se dice que la función $f(x)$ es un infinitésimo cuando x tiende a a si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y es cribimos como $< f(x), a >$.

Diremos que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos del mismo orden si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Cualquier infinitésimo que aparezca como factor o divisor en la expresión de un límite puede sustituirse por otro infinitésimo equivalente.

4.8 continuidad de una función en un punto.

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que la función f es continua en el punto a, si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir,

$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ /\ 0 < |\ x - a\ | < \delta$
$\Rightarrow |\ f(x) - f(a)\ | < \epsilon$

Si una función no es continua en un punto, decimos que es discontinua en dicho punto.

Clasificación de discontinuidades

$i)$ Discontinuidad evitable.

Se produce este tipo de discontinuidad cuando $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, pero la función en ese punto no está definida o no existe .

$ii)$ Discontinuidad de salto o de 1ª especie.

Se tiene una discontinuidad de salto

(finito ó infinito) en el punto $a \in \mathbb{R}$, si existen $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y ambos son distintos.

$iii)$ Discontinuidad esencial o de 2ª especie.

Se produce este tipo de discontinuidad cuando alguno de los límites laterales no existe o los dos.

Continuidad lateral.

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que f es continua por la **derecha** en el punto a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Diremos que f es continua por la **izquierda** en el punto a si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que una función sea continua en un punto, es que lo sea por la derecha y por la izquierda.

4.9 Propiedades de las funciones continuas

Teorema: Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

funciones continuas en $a,$ entonces $f + g$ y $f . g$ son continuas en a.

Si además $g(a) \neq 0,$ entonces $\frac{f}{g}$ es continua en a

Continuidad de las funciones elementales

Las funciones elementales que hemos estudiado son continuas en su dominio, de hecho, tenemos lo siguiente:

1. $f(x) = a^x$ continua en $\mathbb{R}, \ a > 0$
2. $f(x) = \lg_a x$ continua en $(0, \infty), \ \ a > 0$
3. Las funciones polinómicas, las trigonométricas y las raíces de índice natural son continuas en su dominio de definición.

Definición: Una función es continua en un conjunto cuando lo es en cada punto del conjunto.

Teorema: Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to B,\ g : B \subset \mathbb{R} \to C$ dos funciones. Si f es continua en $a \in A$ y g es continua en $b = f(a)$. Entonces la función compuesta $h = g \circ f : A \to C$ es continua en el punto a. De hecho se tiene:

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a)) = g(\lim_{x \to a} f(x))$$

Teorema (de acotacion local): Sea f función continua en el punto a, entonces existe un $\delta > 0,$ tal que f está acotada $\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$

Teorema (de conservación del signo): Sea f función continua en el punto a, con $f(a) > 0$ entonces existe un $\delta > 0,$ tal que $f(x) > 0\ \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$.

4.10 Continuidad de una función en

$[a, b]$.

Definición: Una función es continua en un conjunto cuando lo es en cada punto del conjunto.

Definición: Sea $f[a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ diremos que f es continua en el intervalo $[a, b]$, cuando lo sea en cada punto del intervalo, entendiendo que es continua en $x = a,$ cuando lo sea por la derecha y en $x = b$ por la izquierda.

Teorema de Bolzano: Sea f continua en

$[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0.$

Nota: El teorema de Bolzano no dice nada sobre el nº de raices que tiene f.

Teorema de los valores intermedios o de Darboux: Sea f continua en $[a, b]$ con $f(a) \neq f(b) \Rightarrow f$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir, $\forall y \in (a,b)$, $\exists x \in (a,b)$ tal que $f(x) = y$.

Teorema de acotabilidad en un intervalo: Sea f continua en $[a,b] \Rightarrow f$ está acotada en $[a,b]$, es decir, $\exists\, K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tal que $K_1 < f(x) < K_2 \qquad \forall x \in [a,b]$

Definición: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que f alcanza en $x_1 \in A$ un máximo absoluto si $f(x_1) \geq f(x_2) \;\; \forall x \in A$.

La función f alcanza en $x_2 \in A$ un mínimo

absoluto si $f(x_2) \leq f(x_1) \;\; \forall x \in A$.

Teorema de Weirstrass: Sea f continua en $[a,b] \Rightarrow f$ alcanza el máximo y el mínimo absoluto en $[a,b]$, es decir, existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \;\; \forall x \in [a,b]$.

Teorema: Si f es continua en $[a,b] \Rightarrow$ su imagen es otro intervalo cerrado y acotado, es decir, $f([a,b]) = [m,M]$