TEMA 3. SERIES NUMÉRICAS

3.1 DEFINICIÓN DE SERIE DE NÚMEROS REALES

Definición: Dada una sucesión de números reales (x_n) , se considera una nueva sucesión (s_n) de la forma :

$$s_1 = x_1$$

$$s_2 = x_1 + x_2$$

$$s_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

.

.

$$s_k = s_{k-1} + x_k$$

Al par ordenado $((x_n),(s_n))$ se le llama serie infinita o simplemente serie y la escribiremos como $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

- A la sucesión (s_n) se le denomina sucesión de sumas parciales.

- A los x_k términos de la sucesión .

- En ocasiones no empezaremos la serie por $n = 1,$ sino que será conveniente empezar por $n = 5, n = 0, \ldots$ Aún cuando por lo general los subíndices de los elementos de una serie son los números naturales.

Carácter de una serie

- Si (s_n) es convergente, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, diremos que la serie es convergente y s será la suma de la serie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = s$.

- Si (s_n) es divergente, diremos que la serie es divergente y su suma será $\mp \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \mp \infty.$$

- Si (s_n) no tiene límite , diremos que la serie es oscilante.

<u>Nota:</u> El carácter de una serie no se altera si se suprime un número finito de sumandos

3.2 SERIES CONVERGENTES. PROPIEDADES

Teorema:

$i)$ Si las series $\sum x_n$ y $\sum y_n$ convergen, entonces la serie $\sum(x_n + y_n)$ converge y su suma será :

$$\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$$

$ii)$ Si la serie $\sum x_n$ converge y $c \in \mathbb{R}$, entonces la serie $\sum cx_n$ converge y su suma será :

$$\sum cx_n = c\sum x_n$$

Teorema:(condición necesaria de convergencia)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

3.3 SERIES DE TÉRMINOS NO NEGATIVOS.

Definición: Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es de términos positivos (o no negativos) si $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Las series de términos negativos se tratan de forma análoga a la de terminos positivos.

- Se pueden considerar y tratar como serie de términos positivos aquellas para las que $x_n \geq 0,\ \forall n > N_0$.

Teorema: Una serie de términos positivos, o es convergente o divergente, no puede ser oscilante.

Criterios de convergencia

Definición: Dadas dos series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

tal que $x_n \geq y_n, \ \forall n \geq n_0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n, \ \forall n \geq n_0$.

3.3.1 Criterios de comparación

Criterio de comparación de la mayorante.

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ series de términos positivos.

$i)$ Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente.

$ii)$ Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente.

Comparación con paso al límite

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dos series de términos positivos con $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, \infty]$.

$i)$ Si $l \neq 0$ y $l \neq \infty$, las dos series tienen el mismo carácter, es decir, convergen o divergen simultáneamente.

$ii)$ Si $l = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

Si $l = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente.

$iii)$ Si $l = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es divergente$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

Si $l = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente.

Serie armónica

Definición: Llamamos serie armónica generalizada de orden $\alpha \in \mathbb{R}$ a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

Teorema: (Convergencia de la serie armónica generalizada).

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$.

3.3.3 **Criterio de la raíz**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos con

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in [0,\infty]$$

Entonces se cumple:

i) Si $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

ii) Si $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

iii) Si $l = 1$ no se sabe.

3.3.4 **Criterio del cociente**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos con

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0,\infty]$$

Entonces se cumple:

i) Si $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

ii) Si $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

iii) Si $l = 1$ no se sabe.

3.3.4 **Criterio de Raabe**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos con

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = l$$

Entonces se cumple:

$i)$ Si $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

$ii)$ Si $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es divergente.

$iii)$ Si $l = 1$ no se sabe.

3.4 Series alternadas

Definición: Diremos que una serie de términos reales es alternada si sus sumandos son alternativamente positivos y negativos . Es decir si $x_n \cdot x_{n+1} < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nota 1: La forma más común de

presentar una serie alternada es $\sum(-1)^{n+1}x_n$ ó $\sum(-1)^n x_n$ con $x_n > 0$.

Nota 2: La serie $\sum x_n$ también puede considerarse alternada si $x_n \bullet x_{n+1} < 0$, $\forall n > n_0$.

Criterio de Leibnitz

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}x_n$ una serie alternada. Si la sucesión de términos positivos (x_n) verifica:

$i)$ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$ii)$ $x_{n+1} \leq x_n \ \forall n$ (monótona decreciente).

Entonces la serie alternada es convergente.

Nota1: Observar que las condiciones para aplicar el criterio son dos, no hay que olvidar la monotonia.

Ej: $\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{5^n} + \ldots$

Esta serie es divergente aunque su término general tienda a cero. Falla la monotonía.

Nota 2: El criterio de Leibnitz es una condicion suficiente pero no es necesaria.

Ej: $\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}$

Esta serie es convergente , aunque no sea monótona.

3.5 SERIES DE TÉRMINOS ARBITRARIOS.CONVERGENCIA ABSOLUTA

<u>Definición:</u> Una serie de términos arbitrarios, es aquella que no es necesariamente ni de términos positivos ni alternada.

<u>Definición:</u> Diremos que una serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente si $\sum |x_n|$

es convergente.

Teorema: Si una serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Nota: El teorema anterior es una estrategia a seguir cuando intentamos estudiar el carácter de una serie de términos arbitrarios. Estudiamos previamente $\sum |x_n|$ que es de términos positivos y que por tanto tenemos los criterios para deducir su carácter.

Definición: Una serie es condicionalmente convergente cuando es convergente pero no absolutamente convergente.

1. Criterio de Dirichlet.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ es convergente si se cumple:

$i)$ La sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ está acotada.

$ii)$ (y_n) es una sucesión monótona decreciente con $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

2. Criterio de Abel.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ esconvergente si se cumple:

$i)$La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente.

$ii)$ (y_n) es una sucesión monótona y acotada.

3.6 SUMA DE SERIES

3.6.1 Series aritmético -geométricas

Son de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) r^n$$

Donde $P(n)$ es un polinomio de grado mayor o igual que 1 y r es la razón.

Será convergente cuando $\mid r \mid < 1$.

La suma se obtiene de forma similar a las geométricas.

3.6.2 Series hipergeométricas

Son la que cumplen $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{an+b}{an+c}$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Son convergentes cuando $c - b > a$.

Su suma vale $S = \dfrac{x_1 c}{c - a - b}$

3.3.3 Series cuyo término general es de la forma $\dfrac{P(n)}{(n+k)!}$.

Se hace la descomposición en fracciones simples del término general (en $p+1$) y entonces a partir de la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots . + \frac{1}{n!} + .. = e$$

se suman todas las series.

3.3.4 Series telescópicas.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ es telescópica si su término general se puede poner de la forma.

$x_n = y_n - y_{n+1}$ donde y_n es otra sucesión.

La serie será convergente cuando

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l$$

En este caso $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_1 - l.$

3.3.5 Series de Stirling

Son aquellas cuyo término general es el cociente de dos polinomios de la forma:

$$x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

donde $P(n)$ es un polinomio de grado p y $Q(n)$ es un polinomio de grado $m \geq p + 2$.

$$x_n = \frac{P(n)}{(n + b_1)(n + b_1 + b_2) + \ldots + (n + b_1 + b_m)}$$

donde $b_1 \in \mathbb{R}$, $b_2, b_{3,\ldots\ldots\ldots,} b_m \in \mathbb{Z}$.

Se hace la descomposición en fracciones simples y al identificar coeficientes llegamos a que:

$a_0 + a_1 + \ldots\ldots\ldots + a_m = 0.$

Una vez hecho esto se suman las series de las fracciones.