PROBLEMAS TEMA2. Curso 2007/2008.

Sucesiones Numéricas.

1.- Probar las siguientes afirmaciones.

a) Si $a > 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$; **b)** Si $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a < b$ entonces $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \geq n_0 \Rightarrow a_n < b$

2.- Probar que las siguientes sucesiones, dadas en forma recurrente, son convergentes y calcular su límite:

a) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - a_n}$; **b)** $0 < a_1 < 1,\ a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$;

c) $a_1 = \dfrac{1}{2},\ 7a_{n+1} = a_n^3 + 6$

3.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ con $0 < a < b$; **b)** $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + an + 1} - \sqrt{n^2 + bn - 1}\right)$;

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^2 - 1}\right)$; **d)** $\lim_{n\to\infty} (n + 2^n)^{\frac{1}{2 + 3n}}$; **e)** $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}$;

f) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n^2 + 1}\right)^{\frac{2n^3 + 3}{n}}$; **g)** $\lim_{n\to\infty} \left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$; **h)** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1! + 2! + 3! + \ldots + n!}{n!}$;

i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + \ldots + n\sqrt[n]{n}}{n^2}$; **j)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + 1} + i\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

k) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 + 1}{3n^2 - 3}\right)^{\frac{2n - 1}{3n}} + i\sqrt[n]{3^n + 2^n}$.

4.- Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, probar que:

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_0}{2^n} + \dfrac{a_1}{2^{n-1}} + \dfrac{a_2}{2^{n-2}} + \ldots\ldots + \dfrac{a_{n-1}}{2} + a_n\right) = 2a$;

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_1 + 4a_2 + \ldots + n^2 a_n}{n^3}\right) = \dfrac{a}{3}$

5.- Probar, utilizando acotaciones, que los siguientes límites son ciertos:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)=0;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)=+\infty$

c)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\sqrt{1}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\ldots.(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n!}})=\infty;$

6.- Determinar, en función del parámetro p ($p\geq 0$), los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{p}{(1+p)(1+p^2)\ldots(1+p^n)}}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1^3}+\sqrt{2^3}+\ldots+\sqrt{n^3}}{n^p}$

7.- Hallar la relación entre a y b para que se verifique, en cada caso, las igualdades siguientes:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+b}{n+2}\right)^{4+nb}$; **b)**$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+b}{n+2}\right)^{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{an+1}$