TEMA2. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

2.1 SUCESIONES DE NUMEROS REALES

2.1.1 Definición de sucesión de números reales

Definición: Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales en los reales:

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to x(n)$$

- Una sucesión asigna a cada número natural un número real determinado de manera única.

- A cada elemento de la sucesión lo denotamos por $x_n = x(n)$ y lo llamaremos término.

- La sucesión se denota por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ó simplemente (x_n)

- Al elemento x_n se le llama término n-ésimo de la sucesión.

Definición: Una sucesión en forma recursiva o inductiva vendrá dada cuando demos el valor de x_1 y una fórmula para obtener x_{n+1} a partir de x_n.

Operaciones con sucesiones

Definición: Si (x_n) y (y_n) son dos sucesiones de números reales , se define:

Suma: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$

Producto: $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$

Cociente: Si (z_n) es una sucesión con $z_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\dfrac{(x_n)}{(z_n)} = \left(\dfrac{x_n}{z_n}\right)$

2.1.2 Sucesiones convergentes

Definición: Diremos que el número real l es el límite de la sucesión (x_n) y escribimos como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

si $\forall \epsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$
$\Rightarrow |x_n - l| < \epsilon$

Definición: Se dice que la sucesión (x_n) es convergente si existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Unicidad del límite

Teorema: Una sucesión (x_n) si tiene límite, este es único, es decir, si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ entonces $a = b$.

Propiedades de las sucesiones convergentes

Teorema: Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones de números reales que convergen a x e y respectivamente y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x + y$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n = xy$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda x$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{x}{y}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0.$

Nota: Igualmente para sucesiones convergentes se tiene:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln x_n) = \ln \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ln x$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = a^x$ con $a > 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^{y_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = x^y$

Desigualdades entre sucesiones convergentes

Teorema: Sea (x_n) una sucesión convergente de números reales , con $x_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0$.

Teorema: Sea (x_n) y (y_n) dos sucesiones convergentes con $x_n \leq y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces :

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Teorema: Sean $(x_n), (y_n)$ y (z_n) sucesiones de números reales tales que $x_n \leq y_n \leq z_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ y que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$. Entonces :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Teorema: Sea (x_n) una sucesión de números reales estrictamente positivos, tales que $L = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Si $L < 1$, entonces (x_n) converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.1.3 Sucesiones acotadas

Definición: Una sucesión (x_n) es acotada si $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por tanto una sucesión (x_n) está acotada si y sólo si el conjunto $\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ de sus términos, está acotado en $\mathbb{R}$.

Teorema: Toda sucesión de números reales convergente, está acotada.

2.1.4 Sucesiones monótonas

Definición: Sea (x_n) una sucesión de números reales . Diremos que (x_n) es monótona creciente si :

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots\ldots\ldots x_n \leq x_{n+1}$$

Diremos que es monótona decreciente si:

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots\ldots\ldots x_n \geq x_{n+1}.$$

Teorema de la convergencia monótona:

Una sucesión de números reales monótona es convergente $\Leftrightarrow$ es acotada. Además:

a) Si (x_n) es creciente y acotada , entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup x_n$.

b) Si (y_n) es decreciente y acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf y_n$.

2.1.5 Subsucesiones

Definición: Sea (x_n) una sucesión y sea $r_1 < r_2 < \ldots\ldots\ldots < r_n < \ldots\ldots$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Entonces a la sucesión (x_n^*)

$x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_n}, \ldots.$ se le llama subsucesión de (x_n).

Teorema: Si un sucesión (x_n) converge a x, entonces cualquier subsucesión suya también converge a x.

2.1.6 **Sucesiones divergentes**

Definición: Diremos que la sucesión (x_n) tiene límite $+\infty$ y escribimos como

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$$

Si $\forall M, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ $\Rightarrow x_n > M$.

Diremos que la sucesión (x_n) tiene límite -∞ y escribimos como

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$$

Si $\forall M, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ $\Rightarrow x_n < M$.

Definición: Las sucesiones que tienden a

$\pm\infty$, se llaman divergentes.

Propiedades de las sucesiones divergentes

Teorema: Una sucesión de números reales monóptona es divergente $\Leftrightarrow$ es no acotada.

a) Si (x_n) es creciente y no acotada $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

b) Si (x_n) es decreciente y no acotada $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

Teorema: Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones de números reales con $x_n \leq y_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

2.1.7 Cálculo de límites

Indeterminaciones

Cuando se opera con límites infinitos se pueden producir indeterminaciones (no se sabe el valor del límite) .Estas pueden resolverse utilizando operaciones algebraicas, infinitésimos o el Criterio de Stolz.

Recordemos los distintos tipos de indeterminaciones.

a) tipo suma:

Si $a_n \to \infty$ y $b_n \to \infty$, $(a_n - b_n)$ es una indeterminación de tipo $\infty - \infty$

b) tipo producto o cociente:

$b_1)$ Producto: Si $a_n \to \infty$ y $b_n \to +\infty$,

$(a_n b_n)$ da lugar a una indeterminación $0.\infty$

$b_2)$ Cociente: Si $a_n \to 0$ y $b_n \to 0,$ o si $(a_n b_n)$ $a_n \to \infty$ y $b_n \to \infty$ $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ da lugar a indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, respectivamente.

c) tipo potencial-exponencial

$c_1)$ Si $a_n \to 1$ y $b_n \to +\infty,\ ((a_n)^{b_n})$

da lugar a una indeterminación 1^∞.

Nota: El número e es el límite de una sucesión de este tipo; de hecho, es igual a e^λ donde $\lambda = \lim_{n\to\infty} b_n(a_n - 1)$

$c_2)$ Si $a_n \to 0$ y $b_n \to 0,\ ((a_n)^{b_n})$ da lugar a la indeterminacion 0^0

$c_3)$ Si $a_n \to \infty$ y $b_n \to 0,\ ((a_n)^{b_n})$ da lugar a la indeterminacion ∞^0

Nota: No son indeterminaciones $0^\infty = 0, 0^{-\infty} = \infty,\ \infty^\infty = \infty, \infty^{-\infty} = 0$

Infinitésimos

Definición: Se dice que (x_n) y (y_n) son equivalentes si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1.$ Lo escribiremos como $x_n \sim y_n$

- Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$ a la sucesión (x_n) se le dice que es un infinitésimo.

- Si $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, a la sucesión (x_n) se le dice que es un infinito.

Proposición: Sean $(x_n), (y_n)$ y (z_n) sucesiones de números reales tales que $x_n \sim y_n$, entonces:

$i)$ Si $\lim_{n\to\infty} x_n z_n$ existe $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n z_n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n z_n = \lim_{n\to\infty} y_n z_n$

$ii)$ Si $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{x_n}$ existe $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n}$ existe y $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n}$

Tabla de infinitésimos equivalentes

Sea a_n un infinitésimo, entonces se verifica:

1) $\sin a_n \sim \tan a_n \sim \log(1 + a_n) \sim a_n$

2) $1 - \cos a_n \sim \frac{(a_n)^2}{2}$

3) $a_n - \sin a_n \sim \dfrac{(a_n)3}{6}$

4) $\tan a_n - a_n \sim \dfrac{(a_n)3}{3}$

5) $c^{a_n} - 1 \sim \log(c^{a_n})$

6) Si $\lim b_n = 1 \Rightarrow \log b_n \sim b_n - 1$

7) Si $a > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} - 1 \sim \dfrac{1}{n} \log a$

Criterio de Stolz

Criterio de Stolz: Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones. Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ existe $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ siempre que :

$i)$ (y_n) sea estrictamente creciente y

$ii)$ $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$.

2.2 **Sucesiones de números complejos**

Definición: Se llama sucesión de números complejos a una aplicación $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, que denotaremos por $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente (z_n), con $z_n \in \mathbb{C}$.

<u>Definición:</u> Diremos que una sucesión (z_n) de números complejos onverge a $l \in \mathbb{C}$ si $\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \ / \ \forall n > N_0 \ |z_n - l| < \epsilon$.

<u>Proposición:</u> Sea $z_n = x_n + y_n i$ y $l = a + bi$ las expresiones en forma binómica de z_n y l respectivamente, entonces se tiene que

$$z_n \to l \Leftrightarrow x_n \to a \text{ e } y_n \to b$$