Problemas de Cálculo. Curso 2007/08
Números Reales.

1.- Calcular la fracción irreducible equivalente a $\frac{22321}{28785}$.

2.- ¿Cuál es mayor $a = \frac{1234567890}{1234567891}$ ó $b = \frac{1234567891}{1234567892}$? Encontrar $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$.

3.- Expresar en forma de fracción los números decimales: $1'232$, $2'3333\ldots$ y $3'125434343\ldots$

4.- ¿Tiene solución en $\mathbb{Q}$ la ecuación $\frac{2x}{x+1} = 5 - x$?

5.- Demostrar que si p es primo $\sqrt{p}$ no es racional.

6.- Probar que para $x \in \mathbb{R}$ se verifican las implicaciones:

a) $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$. b) $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$. ¿Qué ocurre para x<0?.

7.- Probar que si $0 < x < y$, entonces:

a) $x^2 < y^2$ b) $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ c) $x < \sqrt{xy} < y$.

8.- Demostrar que si $0 < x < y$ entonces $x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y$.

9.- Probar que si x e y no son ambos nulos se verifica que $x^2 + xy + y^2 > 0$.

10.- Encontrar los números reales que verifican cada una de las inecuaciones siguientes:

a) $x^2 < 3x + 4$ b) $x^2 + x + 1 > 2$ c) $\frac{x-1}{x+1} > 0$ d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$ e) $\frac{(x+3)(x-4)}{x^3 - 2x^2 - 3x} < 0$.

11.- Probar que $|x - a| < \epsilon \Leftrightarrow x \in (a - \epsilon,\ a + \epsilon)$.

12.- Si $a < x < b$ y $a < y < b$, probar que $|x - y| < b - a$.

13.- Encontrar los números reales que verifican cada una de las inecuaciones siguientes:

a) $|x + 2| < 3$. b) $|x^2 - 2| \leq 1$. c) $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$ d) $|x^2 - 2| \leq 1$ e) $|x^2 - 2x + 2| \geq 5$

f) $|x - 1| < |x|$ g) $\left|\frac{x+1}{x-3}\right| \geq 5$.

14.- Demostrar que si $|x| \leq 1$, entonces $\left|x^4 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{16}\right| < 2$.

15.- Sabiendo que $2 \leq x \leq 3$, acotar la expresión $\frac{|2x^2 - 3x + 1|}{|2x + 1|}$.

16.- Si $3 \leq x \leq 10$, $15 \leq y \leq 25$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, encontrar los valores entre los que está r.

17.- Determinar el conjunto de pares de números reales (x,y) que satisfacen cada una de las igualdades:

a) $|x| = |y|$. b) $|xy| = 2$. c) $|x| - |y| = 2$. d) $|x| + |y| = 1$.

18.- Calcular cotas, extremos, máximos y mínimos de los siguientes conjuntos de números reales:

a) $\left\{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. b) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 8\}$ c) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - x + 1 < 0\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq \frac{x-1}{x+1} < 2\right\}$

19.- Usando la propiedad arquimediana, probar que

a) No existe un número real mayor que todo los números reales.

b) Si $x > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < x$.

20.- Sea x un número real positivo. Demostrar que existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq x < n+1$. Tal n se denomina la parte entera de x.

21.- Sean $0 < x < y \in \mathbb{R}$. Probar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.