Problemas de Cálculo. Curso 2007/08
Números Complejos.

1.- Siendo $z_1 = 2 - i, z_2 = i, z_3 = 2 + i$ y $z_4 = 3i$, calcular $\frac{z_1 z_2 - z_3 z_4}{z_1 - z_2}$.

2.- Calcular el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

a) -5, b) $\dfrac{1+i}{10}$, c) $1 + \sqrt{3}\,i$, d) $\dfrac{2}{3-i}$, e) $9i$, f) $\dfrac{3}{1+\sqrt{3}\,i}$

3.- Representar en el plano $z = 6e^{i\frac{\pi}{6}}$, $w = 3e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z \cdot w$, $z \cdot w^{-1}$ y $w \cdot z^{-1}$.

4.- Señalar en el plano los conjuntos de números complejos definidos por:

a) $|z| = 3$, b) $|z-1| < 1$ c) $|z+1| < |z-1|$, d) $|z| < |2z+i|$, e) $z^2 = \bar{z}$, f) $z + \bar{z} = |z|^2$.

5.- Calcular:

a) $\sqrt[4]{-16}$, b) $\sqrt{1+i}$, c) $\sqrt{\dfrac{1}{3-4i}}$, d) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}}$, e) $\sqrt[5]{\dfrac{32}{i}}$.

6.- Resolver las ecuaciones:

a) $z^4 - 1 = 0$, b) $z^5 + 32 = 0$, c) $z^2 - (5-14i)z - 2(12+5i) = 0$, d) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$,
e) $z^{10} - 2z^5 + 1 = 0$, f) $z^n = \bar{z}$.

7.- Hallar la suma y el producto de las raíces n-ésimas de la unidad.

8.- Siendo z una raíz n-ésima de la unidad, $z \neq 1$, hallar el valor de $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}$.

9.- Calcular:

a) $\log(-4)$, b) $\log(1+i)$, c) $\log_{-1} i$ d) $(-1)^i$ e) $(1+i)^i$, f) 2^{1+i}, g) $\cos i$, h) $\operatorname{sen}(1-i)$.

10.- Verificar que $\forall z \in \mathbb{C}$ $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ y que $\forall z, w \in \mathbb{C}$
$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$.

11.- Resolver las ecuaciones $\cos z = 0$ y $\operatorname{sen} z = 0$.

12.- Sean z_1, z_2 y z_3 tres número complejos de módulo 1 y tales que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Probar que son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en el círculo de centro el origen y radio 1.

13.- Un triángulo equilátero tiene el centro en el punto $(1,1)$ y uno de sus vértices es el punto $(1,3)$. Hallar los otros dos vértices.

14.- Sea z un número complejo de módulo 1. Probar que $z = \dfrac{1+ai}{1-ai}$ para algún $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

15.- Sea $z = \dfrac{3-2ai}{4-3i}$. Determinar a para que z verifique en cada caso:

a) Sea un número real.

b) Sea un número imaginario puro.

c) Esté sobre la bisectriz del primer cuadrante.

16.- Encontrar los números complejos z tales que $\frac{\pi}{2}$ es un argumento de $\dfrac{z+1}{z+2}$.

17.- Determinar todos los números complejos z tales que 1, z y $1 + z^2$ estén alineados.