TEMA 1. NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

1.1 DEFINICIÓN AXIOMATICA DE LOS NÚMEROS REALES

1.1.1 Axiomas de cuerpo

En $\mathbb{R}$ admitimos la existencia de dos operaciones internas la suma y el producto, con estas operaciones se van a verificar las siguientes propiedades:

Respecto a la suma:

1. Conmutativa: $a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$.

2. Asociativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

3. Neutro: $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$, tal que $a+0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$.

4. Opuesto: Dado $a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}$ tal que $a+(-a) = 0$.

Respecto al producto:

5. Conmutativa: $a \bullet b = b \bullet a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

6. Asociativa: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$,

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

7. Neutro: $\exists\ 1 \in \mathbb{R},$ tal que $a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{R}$.

8. Existencia de inverso: dado $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0,\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

9. Propiedad distributiva:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Consecuencias de los axiomas de cuerpo

Proposición: Si a, b, c son números reales, entonces:

1. $a \cdot 0 = 0$
2. $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$
3. Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$

1.1.2. Axiomas de orden

Vamos a definir una relación de orden en $\mathbb{R}$, a partir de los dos siguientes axiomas

En $\mathbb{R}$ existe un subconjunto , llamado de los reales positivos, $\mathbb{R}^+$, que verifica:

Axioma1: Para cada $a \in \mathbb{R}$ se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:

$i)\ a = 0$

$ii)\ a \in \mathbb{R}^+$

$iii)\ -a \in \mathbb{R}^+$

Axioma 2: Si a y $b \in \mathbb{R}^+$ entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$ y $a \bullet b \in \mathbb{R}^+$

Estos axiomas de orden nos permiten definir la relación de orden total que utilizamos habitualmente en $\mathbb{R}$

Orden en $\mathbb{R}$

Se define el orden en $\mathbb{R}$ mediante la relación:

$a \leq b \iff b - a \in \mathbb{R}^+$

También podemos definir el orden estricto:

$a < b \iff a \leq b$ y $a \neq b$

Consecuencias de los axiomas de

orden

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se verifica:

1. Si $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$.
2. Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.
3. Si $a > b$ y $c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac > bc$.
4. Si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$.
5. Si $a > b$ y $c > d \Rightarrow a + c > b + d$.
6. Si $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$.
7. Si $ab > 0 \Rightarrow$

   $i)$ $a > 0$ y $b > 0$ o bien,

   $ii)$ $a < 0$ y $b < 0$.

1.1.3 **Axioma del supremo**

Definición: Sea S un conjunto no vacío de números reales, supongamos que existe un b tal que $x \leq b$, $\forall x \in S$, entonces decimos que S está acotado superiormente y que b es una cota superior de S.

Definición: Si b es una cota superior y pertenece al conjunto, diremos que b es el máximo de S.

Definición: Diremos que b es el supremo del conjunto S cuando:

$i)$ b es cota superior.

$ii)$ b es la menor de las cotas superiores.

Definición: Sea S un conjunto no vacío de números reales, supongamos que existe un b tal que $b \leq x, \ \forall x \in S,$ entonces decimos que S está acotado inferiormente y que b es una cota inferior de S.

Definición: Si b es una cota inferior y pertenece al conjunto, diremos que b es el mínimo de S.

Definición: Diremos que b es el ínfimo del conjunto S cuando:

$i)$ b es cota inferior.

$ii)$ b es la mayor de las cotas inferiores.

Observaciones

1. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}$, o bien no tiene ninguna cota superior, o bien tiene infinitas.

2. Si existe el máximo de un conjunto, éste es el supremo. Lo mismo con el mínimo.

3. El máximo ó el mínimo de un conjunto acotado no siempre existen.

<u>Axioma del supremo</u>: Todo conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente, tiene supremo, es decir, $\exists b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \sup S$.

Lo mismo para el ínfimo.

Consecuencias del axioma del supremo

1. Propiedad Arquimediana

Teorema: Si $x \in \mathbb{R},$ entonces existe un

$n_x \in \mathbb{N}$ / $x < n_x$

2. Densidad de los racionales en los reales.

Teorema: Si x e y son dos númeos reales con $x < y$, entonces existe un número racional r tal que $x < r < y$.

Es mas existen infinitos racionales.

3. Densidad de los irracionales en los reales.

Teorema: Si x e y son dos númeos reales con $x < y$, entonces existe un número irracional z tal que $x < z < y$.

1.1.4 Intervalos

A partir del orden establecido se pueden considerar los siguientes tipos de conjuntos en $\mathbb{R},$ que se llaman intervalos

$i)$ Acotados

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$$
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$$

$ii)$ No acotados

$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < \infty\}$$
$$[a,\theta) = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < \infty\}$$
$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R}/-\infty < x < a\}$$
$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R}/-\infty < x \leq a\}$$

1.1.5 Valor absoluto

<u>Definición:</u> Sea $a \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de a, denotado por $|a|$, se define como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades

Para todo a y $b \in \mathbb{R}$, se cumple:

1. $|a| \geq 0,$ y $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

2. $|-a| = |a|$

3. $|ab| = |a||b|$

4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$

5. Si $a > 0$, se cumple :

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ó } x \leq -a$$

6. $-|a| \leq a \leq |a|$

7. $|a+b| \leq |a| + |b|$

8. $|a-b| \leq |a| + |b|$

9. $\sqrt{a^2} = |a|$

1.1.6 Inecuaciones

Una inecuación real es una condición definida en el cuerpo de los números reales en la que intervienen una o más variables ligadas por un signo de desigualdad ,$\leq, <, \geq, >$.

Resolver una inecuación consiste en hallar todas las soluciones , es decir, determinar los valores que lo verifican , para ello utilizaremos las propiedades de los axiomas de orden.

Ejemplo:

Resolver la siguiente inecuación

$$5x - 3(x + 2) \geq 5$$

$$5x - 3x - 6 \geq 4$$

$$2x \geq 10$$

$$x \geq 5$$

1.2 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

1.2.1 Definición de número complejo

Definición: Llamamos número complejo al par de números reales de la forma $z = (a, b)$, donde a es la parte real y b es la parte imaginaria.

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

En $\mathbb{C}$ definimos las operaciones suma y producto de la siguiente forma:

Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Producto: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Con estas dos operaciones $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ tiene estructura de cuerpo.

El elemento neutro para la suma es: $(0, 0)$

El neutro para el producto es: $(1, 0)$

El opuesto de (a, b) es $(-a, -b)$.

El inverso de (a, b) no nulo es $(a, b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \right)$

1.2.2 La unidad imaginaria i.

Definición: Llamamos unidad imaginaria i al número complejo $(0, 1)$ y tiene la propiedad de que su cuadrado es -1.

Teorema: Todo número complejo (a, b) puede expresarse de la forma $(a, b) = a + bi.$ Dicha forma se llama forma binómica de un número complejo.

1.2.3 Módulo y argumento.

Definición: Al número positivo $r,$ que representa la distancia de $z = (a,b)$ al origen de coordenadas se llama módulo y lo escribimos como

$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Definición: El ángulo θ es un argumento de $z = (a,b),$ lo escribiremos como $\arg z$ y es el ángulo que forma el segmento que une el origen de coordenadas y $z = (a,b)$ con el eje OX.

Observaciones:

1. El ángulo lo expresaremos en radianes.

2. El argumento de un número complejo no es único , también lo serían los de la forma $\theta + 2k\pi,$ con $\pi \in \mathbb{Z}$.

3. Llamaremos argumento principal , $Arg(z),$ al único ángulo entre los argumentos de z que se encuentra entre $[0, 2\pi)$.

Propiedades del módulo:

Para todo $z \in \mathbb{C}$, se cumple:

1. $|z| \geq 0,$ y $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $\left|z_1 - z_2\right| = \left|z_2 - z_1\right|$
3. $\left|z_1 + z_2\right| \leq \left|z_1\right| + |z_2|$
4. $\left|z_1 z_2\right| = \left|z_1\right||z_2|$

1.2.4 Complejo conjugado

Definición: Sea $z = a + bi$ un número complejo, llamamos complejo conjugado de z al número $\bar{z} = a - bi$.

Nota: Geométricamente, el conjugado de un número complejo $z = a + bi$, se obtiene en el plano, haciendo la simetría del punto (a, b) respecto al eje de abscisas.

Propiedades:

Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Se cumple:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

4. $z\ \overline{z} = |z|^2$

1.2.6 **Exponencial compleja**

Definición: Sea $\theta \in \mathbb{R}$ se define

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Así dado un número complejo $z = a + bi$ la exponencial de z es:

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

Propiedades:

Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Se cumple:

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
2. $e^0 = 1$
3. $e^z \neq 0$

Teorema: Todo número complejo $z \neq 0$ puede expresarse de la forma $z = re^{i\theta}$, donde r es el módulo del número y θ el argumento. Esta forma, se le llama forma polar.

1.2.6 **Operaciones con complejos**

Producto:

Sean $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ y $z_2 = r_2 e^{i\alpha}$ dos números complejos expresados en forma polar. Entonces:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta} r_2 e^{i\alpha} = r_1 r_2 e^{i\theta} e^{i\alpha} = r_1 r_2 e^{i(\theta+\alpha)}$$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Cociente:

Sean $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ y $z_2 = r_2 e^{i\alpha}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta}}{r_2 e^{i\alpha}} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta-\alpha)i}.$$

Raices n-ésimas de un número complejo:

Definición: Sea $z \neq 0 \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, llamaremos raíz n-ésima de z a todo número complejo

$$w = \sqrt[n]{z} \quad \text{tal que} \quad z = w^n$$

Teorema: Todo número complejo $z = r_\theta \neq 0$ admite n raices n-esimas y estas son:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_\theta} = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\theta+2k\pi}{n}} \text{ con } k = 0, 1, ..n - 1$$