UNIVERSIDAD DE

CASTILLA-LA MANCHA

Departamento de Matemáticas.

PROBLEMAS DE CÁLCULO

1° INFORMÁTICA DE SISTEMAS

1. Cálculo diferencial

1. Probar que $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$, siendo $a > 0$. Utilizar estas desigualdades para calcular los conjuntos de puntos que verifican:

   a) $|x-2| < 3$.
   b) $|5-3x| \leq 2$.
   c) $|4-2/x| < 1$.
   d) $|x^2-3| < 2$.
   e) $|x+1| \geq 3$.
   f) $|x-4| < |x+2|$.

2. Sea $f(x) = (x-2)(8-x)$ para $2 \leq x \leq 8$.

   a) ¿Cuál es el domino de definición?
   b) Calcula $f(1-2t)$ e indica el dominio de definición.
   c) Dibujar la gráfica de $f(x)$.

3. a) Demostrar que $g(x) = 5 + \sqrt{9-x}$ es estrictamente decreciente en $[0, 9]$.
   b) ¿Tiene $g(x)$ inversa? ¿Cuál es?.

4. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$
   b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 5x + 6}$
   c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{ln(2-x)}$
   d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}$
   e) $f(x) = \sqrt{-x} + 1$
   f) $f(x) = \arcsin\left(ln\dfrac{x+3}{7}\right)$

5. Estudiar la paridad de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^2 - |x|$
   b) $f(x) = ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
   c) $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$, con $a > 1$
   d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x) + x + x^3}{x^2 + \cos(x) + 4}$

6. Para $f(x) = \frac{x}{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, encuentre el valor (si es posible)

   a) $(f+g)(2)$
   b) $(f \cdot g)(0)$
   c) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(3)$
   d) $(f \circ g)(0)$
   e) $(f \circ g)(\sqrt{8})$
   f) $(g \circ f)(0)$

7. Se consideran las funciones:

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = e^x \qquad h(x) = \log(x) \qquad k(x) = \operatorname{tg}(x).$$

Hallar las expresiones explícitas de

$$(h \circ f \circ f)(x) \qquad (g \circ k)(x) \qquad (k \circ f \circ g)(x).$$

8. Se considera la función $f\colon \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Hallar la función inversa, si existe, y calcular su dominio.

9. Decidir si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas. Demostrar las afirmaciones.

   a) La suma de dos funciones pares.

   b) La suma de dos funciones impares.

   c) El producto de dos funciones pares.

   d) El producto de dos funciones impares.

   e) El producto de una función par y una impar

10. Determinar una función que sea par e impar simultáneamente.

11. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas. En caso afirmativo hallar su inversa:

$$a)\ f(x) = (5 + 2x^4)^7 \qquad b)\ g(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 3 - x^3 & \text{si } < 0 \end{cases}$$

12. Simplificar las siguientes expresiones:

$$a)\ \operatorname{sen}(\arccos(x)) \qquad b)\ \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen}(x)) \qquad c)\ \operatorname{sen}(2 \operatorname{arc\,sen}(x))$$

13. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera, explicar por qué; si es falsa dar un ejemplo que refute la proposición.

   a) Si f es inyectiva, entonces $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

   b) Si $x_1 < x_2$ y f es decreciente, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

   c) Si f es una función cualquiera, entonces $f(x+y) = f(x) + f(y)$

14. Calcular los límites

$$a)\ \lim_{x\to -1} \frac{x-2}{x^2+4x-3} \qquad d)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$$

$$b)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right) \qquad e)\ \lim_{x\to 9} \frac{9-x}{3-\sqrt{x}}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{(x-5)^2-25}{x} \qquad f)\ \lim_{x\to 0} \frac{(3+x)^{-1}-3^{-1}}{x}$$

15. Si $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ con $a_n \neq 0$ y $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ con $b_m \neq 0$, estudiar el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

16. Calcular, cuando se pueda, el límite de las siguientes funciones:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} \qquad d)\ \lim_{x\to(-1)^+} \ln(\sqrt{x+1})$$

$$b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+2^{\tan(x)}} \qquad e)\ \lim_{x\to 4} \arctan\left(\frac{x}{x-4}\right)$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty} \tan(e^{-x}) \qquad f)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-1}$$

17. *a)* Si $1 \leq f(x) \leq x^2+2x+2$, calcular $\lim_{x\to -1} f(x)$.

b) Si $1 \leq f(x) \leq x^3+2$, calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$.

18. Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} \qquad f)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+2}\right)^{x^2}$$

$$b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} \qquad g)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x} \qquad h)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x^3-27}}{\sqrt[3]{x^2+6x-27}}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-a^x}{2x\ln(a)} \qquad i)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{1-\tan(x)}$$

$$e)\ \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x}+x\right)x^2 \qquad j)\ \lim_{x\to -\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$$

19. **Asíntotas de una función.** Hay tres tipos de asíntotas:

Asíntotas verticales. $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$ si cumple:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \text{ o bien } \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ o bien } \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Asíntotas horizontales. $y = b$ es una asíntota horizontal si

$$\lim_{x \to \infty} = b \text{ o bien } \lim_{x \to -\infty} = b.$$

Asíntotas oblicuas. La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de $f(x)$ cuando existen y son finitos los siguientes límites:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Estudiar las asíntotas verticales y horizontales de las funciones:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Estudiar las asíntotas oblicuas de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

20. Encontrar los valores de a para que exista

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}.$$

21. Calcular, si existen

a) $\lim_{x \to 0} (x + e^{2x})^{1/x}$

b) $\lim_{x \to \infty} x\,(\log(x-1) - log(x))$

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(a^x - 1)\log(1 - x^2)}{[(1 - x^2)^m - 1]\operatorname{arc\,sen}(x)}$

22. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones según los valores del parámetros k:

$$(a)\ \ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 1 \leq x \\ kx & \text{si } x < 1 \end{cases} \qquad (b)\ \ f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } x \neq 2 \\ 2k - 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$$(c)\ \ f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2k & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad (d)\ \ f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2k & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

23. Probar que la función $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. ¿Puede definirse $f(0)$ de manera que la función resultante sea continua en $\mathbb{R}$?

24. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$(a)\ \ f(x) = \begin{cases} (x-3)\sqrt{x^2 - x - 6} & \text{si } x \neq 3 \text{ y } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 3 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases} \qquad (b)\ \ f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$(c)\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad (d)\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{1+e^{1/x^2}}{1-e^{1/x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

25. Sea $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq c \\ ax + b & \text{si } x > c \end{cases}$ siendo a, b, c constantes. Si b y c son números fijos, hallar todos los valores de a (si existe alguno) para los que $f(x)$ es continua en el punto c.

26. Demostrar que si n es un número natural cualquiera y a un número real positivo, existe un único número real positivo b tal que $b^n = a$. (Es decir: existe una única raíz n-ésima de números positivos $b = \sqrt[n]{a}$).

   Indicación: Tomar $c > 1$ y $c > a$, y razonar con la función $f(x) = x^n$ en el intervalo $[0, c]$.

27. Sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   a) Estudiar su continuidad.

   b) Si se consideran definidas sobre $[-1, 2]$, ¿están acotadas?, ¿alcanzan su máximo y su mínimo?.

   c) Hallar $f([-1, 2])$.

28. Se consideran las funciones reales de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x + ln(x) & \text{si } x > 1 \\ x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   a) Probar que f y g con continuas en todo $\mathbb{R}$.

   b) ¿Está acotada $g \circ f$ en el intervalo [-1,2]?.

   c) Probar que existen dos puntos x_1, x_2 en el intervalo $(1, e^2)$ tal que $f(x_1) = \frac{\pi}{2}$ y $f(x_2) = \frac{3\pi}{2}$.

   d) Deducir del apartado anterior que existe x_0 en el intervalo $(1, e^2)$ tal que $(g \circ f)(x_0) = 0$.

29. Probar que las siguientes ecuaciones tienen al menos una raíz real:

$$(a)\, x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 1 = 0 \qquad (b)\, x^{50} + \frac{133}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 70$$

$$(c)\, x2^x = 1 \qquad (d)\, \frac{x^4 + 2x^2 + 5}{x - 1} + \frac{x^6 + 2x^4 + 6}{x - 7} = 0$$

30. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{x-3}$ definida en (3,7). ¿Es continua?. ¿Está acotada superiormente?. ¿Contradice algún teorema?.

31. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[-1, 1]$ y tal que $f(-1) = f(1)$. Demuéstrese que existe algún punto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = f(c - 1)$.

32. Utilizando la definición y las propiedades elementales de la derivada, comprobar las afirmaciones de la siguiente *"tabla de derivadas"*:

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$nx^{n-1} \qquad (n \in N)$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
x^a	$ax^{a-1} \qquad (a \in R)$
a^x	$a^x \log(a) \qquad (a > 0)$
e^x	e^x
$\log(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
$\operatorname{tg}(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x)\operatorname{tg}(x)$
$\operatorname{cosec}(x)$	$-\operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotg}(x)$
$\operatorname{cotg}(x)$	$\dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)} = -1 - \operatorname{cotg}^2(x)$
$\operatorname{arc\,sen}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arc\,cos}(x)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arc\,tg}(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec}(x)$	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arccosec}(x)$	$\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arccotg}(x)$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$
$\operatorname{th}(x)$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$
$\operatorname{arcth}(x)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

33. Hallar la recta tangente a la curva $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

34. Probar que las gráficas de las funciones $y = 3x^2$ e $y = 2x^3 + 1$ tienen recta tangente común en el punto $(1, 3)$. Hacer un dibujo aproximado de dichas gráficas.

35. Dada la función $y = 1 - x^2 + x^3$, determinar los puntos en los que la tangente es paralela al eje de abscisas, así como la ecuación de la tangente en el punto de abscisa $x = 1$. Determinar los puntos de la curva en los que la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

36. La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T (en grados Kelvin) y la presión P (en atmósferas), con un volumen V (en litros), es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0,0821$ es la constante de los gases. Supongamos que en cierto instante $P = 8$ atm y aumenta a razón de $0,10$ atm/min, y $V = 10$ l y disminuye a razón de $0,15$ l/min. Encontrar la razón de cambio de T respecto al tiempo en ese instante, si $n = 10$ moles.

37. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $e^{\cos(x^2)}$ *b)* $\operatorname{sen}\left((2x+5)^2\right)$ *c)* $\left(3\log(x^2+1) - x^3\right)^{1/2}$

d) $\dfrac{x^p}{x^m - a^n}$ *e)* $\dfrac{\log(x)}{x^2+3}$ *f)* $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}$

g) $\dfrac{1}{\log(x^{1/2} + 2x)}$ *h)* $\dfrac{\operatorname{tg}(x/2) + \operatorname{cotg}(x/2)}{x}$ *i)* $\operatorname{sen}\left(\log(x) + \dfrac{1}{x}\right)$

38. Utilizar logaritmos para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = x^{\operatorname{sen}(x)}$ *b)* $y = (\operatorname{sen}(x))^x$ *c)* $y = \operatorname{sen}(x)^{\operatorname{tg}(x)}$

d) $y = x^{\operatorname{arc\,sen}(x)}$ *e)* $y = x^x$ *f)* $y = x^{x^x}$

39. Calcular $a \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x-3)} + a & \text{si } x \leq 3 \\ \log(x^2 - 3x + 2) & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

sea continua en $x = 3$. ¿Es f derivable en $x = 3$?.

40. Aplicar la regla de L'Hôpital para calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \log(x)\ (\alpha > 0)$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccotg}(x)}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ *e)* $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}(\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ *f)* $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\operatorname{sen}(3x))}{\log(\operatorname{sen}(x))}$ *h)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arc\,sen}(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}$ *i)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}(x)}$

j) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$ *l)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\sin(x))}{\ln x}$

41. Sea la función definida mediante la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{3}x^3 - 2\log(1+x^2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   a) Probar que es continua y derivable en 0.

   b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de f.

   c) Hallar los máximo y mínimos relativos y absolutos de f, si los hay.

42. Demostrar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ sólo tiene una raíz real.

43. Demuéstrese que el polinomio $x^5 + x^3 + 2x + 5$ tiene exactamente una raíz real, e indicar un intervalo de longitud 1 en el que esté dicha raíz.

44. Considerar la función f definida por $f(x) = 5 + (x-1)^4(x+2)^3$. Probar:

   a) $f'(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo (-2,1), sin calcular la expresión de f'.

   b) $f(x) = 0$ sólo tiene una solución menor que -2.

   c) $f(x) = 0$ no tiene ninguna solución mayor que 1.

45. Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 con resto de Lagrange de la función $y = \sqrt{x}$ en el punto $a = 1$.

46. Calcular $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ con un error menor que 10^{-3}.

47. Utilizar la forma infinitesimal del resto de Taylor para calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos(x/2)}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x^2} - 6\sin x + 5x}{\sin^5(2x)} \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^2x - (1+4x)^{1/2}}{\ln(1-x^2)}$$

48. Probar que si f es una función derivable en todo $\mathbb{R}$ con $f(0) = 0$ y $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces: $|f(x)| < |x|$ para todo $x \neq 0$.

49. Hallar los máximos y mínimos relativos de las funciones:

   a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$.

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$.

c) $f(x) = \mathrm{sen}(x)\cos^2(x)$.

50. Hallar los extremos absolutos en el intervalo $[-2, 2]$ de las funciones del problema anterior.

51. Sea $f(x)$ una función tal que $|f(x)| < x^2$. Demostrar que $f(x)$ es derivable en cero.

52. Supóngase que $f(x) = xg(x)$ para alguna función $g(x)$ que es continua en el origen. Demostrar que $f(x)$ es derivable en cero y hallar $f'(0)$ en términos de $g(x)$.

53. Hay que hacer una finca rectangular cercada por tres de sus cuatro lados con tela metálica y lindante por el cuarto lado con una larga pared de piedra. ¿Qué forma será más conveniente dar a la superficie para que su área sea máxima si se dispone en total de l metros de tela?

54. Un depósito abierto de hoja de lata, con fondo cuadrado debe tener capacidad para V litros. ¿Qué dimensiones deberá tener dicho depósito para que en su fabricación se necesite la menor cantidad de hoja de lata?

55. ¿Cuál de los cilindros de volumen dado tiene menor superficie total?

56. Inscribir en una esfera dada un cilindro de volumen máximo.

57. Un recipiente abierto está formado por un cilindro terminado en su parte inferior en una semiesfera (el espesor de la pared es constante). ¿Qué dimensiones deberá tener dicho recipiente para que, sin variar su capacidad, se gaste en hacerlo la menor cantidad de material?

58. De una hoja circular hay que cortar un sector tal que enrollado nos dé un cono de la mayor capacidad posible. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones?

59. Una hoja de lata de anchura a debe ser curvada longitudinalmente en forma de canalón abierto. ¿Qué ángulo central debe tomarse para que el canalón tenga la mayor capacidad posible?

60. Se traza una recta desde el punto $(0, a)$ hasta el eje horizontal, y desde allí otra a $(1, b)$. Demostrar que la longitud total es mínima cuando los ángulos que forman con el eje horizontal sean iguales.

2. Cálculo Integral

61. Calcular las siguientes integrales utilizando el método de cambio de variables:

$$a)\ \int \cos(3x)\,dx \qquad c)\ \int \sqrt{2-x}\,dx$$
$$b)\ \int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx \qquad d)\ \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$$

62. Calcular las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

$$a)\ \int \operatorname{arc\,sen}(x)\,dx \qquad c)\ \int x^2e^x\,dx$$
$$b)\ \int e^{-\sqrt{x}}\,dx \qquad d)\ \int \operatorname{arc\,tg}(1/x)\,dx$$

63. Calcular las siguientes integrales de funciones racionales y trigonométricas:

$$a)\ \int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx \qquad c)\ \int \cos^3(x)\,dx$$
$$b)\ \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)\cos^3(x)} \qquad d)\ \int \sqrt{1-\cos(x)}\,dx$$

64. Probar si son o no integrables las siguientes funciones:

$$(a)\ f(x)=c \quad \forall\ \ x\in[a,b], \ \ \text{siendo} \ \ c\in\mathbb{R}$$

$$(b)\ f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } \ x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

65. Calcular las funciones derivadas de:

$$(a)\ A(x)=\int_0^x (t^2+a)\,dt; \qquad (b)\ B(x)=\int_1^{2x} (t+t^2)\,dt$$

66. Calcular las siguientes integrales definidas:

$$(a) \int_{-1}^{1} |x-2|\,dx \qquad (b) \int_0^4 |x^2-5x+6|\,dx$$

67. Hallar el valor medio integral de la función $f(x) = x(x-1)$ en $[0,1]$, así como el punto $c \in [0,1]$ en el que se alcance.

68. Siendo
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ (2-x)^2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases} .$$

   a) Verificar directamente que la función $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es continua en $[0,3]$ y que su derivada en un punto cualquiera de $[0,3]$ existe y es igual a $f(x)$.

   b) Calcular $\int_0^3 f(x)\,dx$.

69. Hallar todos los valores de c tales que:
$$(a) \ \int_0^c x(1-x)\,dx = 0; \qquad (b) \ \int_0^c |x(1-x)|\,dx = 0.$$

70. Hallar un polinomio de grado 3, $P(x)$, tal que $P(0) = 0 = P(-2)$, $P(1) = 15$ y $3\int_{-2}^0 P(x)\,dx = 4$.

71. Demostrar que $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$.

72. Demostrar que si $f(x)$ es par, es decir, $f(-x) = f(x)$ se tiene que $\int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx$.

73. Estudiar si es integrable en el intervalo $[0,4]$ la función dada por: $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \ x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

74. *a*) Probar que es integrable en el intervalo $[1,4]$ la función
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

   b) Utilizar el apartado a) para probar que la función $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ es derivable y que $F'(x) = 0$ para todo x del intervalo $(1,4)$. ¿Contradice el teorema fundamental?

75. Probar que toda función monótona en un intervalo $[a,b]$ es integrable-Riemann en dicho intervalo.

76. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

$$a)\ F(x) = \int_0^x \sqrt{e^t + 1}\, dt \qquad c)\ H(x) = \int_0^{x^2} \sin^3 t\, dt$$

$$b)\ G(x) = \int_{-x}^x \frac{dt}{1 + \sin^2 t} \qquad d)\ I(x) = \int_a^b \frac{x}{1 + \cos^3 t}\, dt$$

77. Determinar una función continua, f y un número real, a tales que $\int_a^x f(t)\, dt = \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

78. *a*) Hallar el valor de $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\int_1^3 f(x)\, dx = 2\mu$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

   b) ¿Existe algún punto c del intervalo $[1, 3]$ tal que $f(c) = \mu$?

   c) ¿Contradice el teorema del valor medio para integrales?

79. Calcular la ecuación de la recta tangente en $x = 2$ a la función $f(x) = \int_4^{x^2} \ln(t^3 + 4)\, dt$.

80. Sea $f(x) = \frac{x}{1-e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2}\, dt$. ¿Es evitable la discontinuidad de la función f en $x = 0$?. Razónalo.

81. Estudiar razonadamente si se pude aplicar la regla de L'Hôpital y calcular los siguientes límites:

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt}{x^3} \qquad (b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\, dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\, dt} \qquad (c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\, dt}{x^2}$$

82. Probar que la función $F(x) = -1 + \int_0^x e^{t^2}\, dt$ tiene una sola raíz real en $[0, 1]$.

83. Sea $f(x)$ una función derivable en todos los números reales, verificando que $f(0) = 0$ y $f'(x) > 0$ para todo x real. Estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos de la función: $F(x) = \int_0^{x^2-3x+2} f(t)\, dt$.

84. Sin resolver las integrales, indicar razonadamente dónde hay máximos y mínimos relativos de las funciones siguientes:

$$(a)\ F(x) = \int_0^x (t-1)(t+1)\, dt \quad (b)\ G(x) = \int_0^x (t^3 - 4t)\, dt \quad (c)\ H(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt, \ \text{ con } x > 0$$

85. En el intervalo $[0,4]$ se define $F(x) = \int_0^x \sqrt{16-t^2}\,dt$. Calcular $F'(2)$ y $F(2)$.

86. Si f es una función continua en $\mathbb{R}$ tal $\int_0^{x^2(1+x)} f(t), = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Calcular $f(2)$.

87. Calcular, cuando existan, los valores de las integrales impropias siguientes:

$a)\ \displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

$b)\ \displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^\alpha(x)} \quad \alpha > 0$

$c)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

$d)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$

$e)\ \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$f)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$g)\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx$

$h)\ \displaystyle\int_1^\infty (1-x)e^{-x}\,dx$

$i)\ \displaystyle\int_1^x \frac{dx}{x\sqrt{3}\ln x}$

$j)\ \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

$k)\ \displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$

88. Estudiar, aplicando criterios de convergencia el carácter de las integrales:

$a)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{(1-x^2)^2}\,dx$

$b)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

$c)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}\,dx$

$d)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+4x^3}}$

$e)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+15}\,dx$

$f)\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{e^{2x}+1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

$g)\ \displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$

$h)\ \displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{4-x^2}\,dx$

$i)\ \displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{e^x+15}$

$j)\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+5}\,dx$

$k)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{3\sin^2 x+5\cos^2 x}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$