CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER

Sea $f(x)$ una función definida para todo x, con periodo 2π. Entonces, bajo condiciones muy generales, la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ para todo x. Describiremos un conjunto de condiciones que asegura dicha convergencia, estas se ilustran en la figura de abajo. Damos también algunas indicaciones acerca de por qué debe esperarse la convergencia. La función f es continua en cada intervalo de longitud 2π excepto en un número finito de discontinuidades de salto, donde el valor de f es el promedio de sus límites por la izquierda y por la derecha. Además, en cada intervalo de longitud 2π, la función f tiene una derivada continua, excepto en los puntos de salto y en un número finito de esquinas. En los puntos de salto y en las esquinas hay un valor límite para la derivada por la derecha y por la izquierda (sugerida por las líneas tangentes dibujadas). La función f que satisfaga estas condiciones se llama una *función continua a trozos.* Así,***la serie de Fourier de una función f(x) continua a trozos, de periodo 2*** π ***converge a f(x) para todo x***.

Convergencia uniforme.

Para una función como la anterior, es demasiado esperar que la serie de Fourier de f converja uniformemente cuando $0 \leq x \leq 2\pi$, ya que la suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas debe ser continua, mientras que la función de la figura anterior, tiene discontinuidades de salto. Sin embargo, **si f no tiene discontinuidades de salto (aunque tenga ¡¡esquinas¿¿) entonces la convergencia debe ser uniforme**. Además, *aun cuando f tenga salto, la convergencia es uniforme en cada intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ que no contenga puntos de salto.*

Idea de la demostración de la convergencia. Nos basamos en el concepto de la función delta de Dirac $\delta(t)$. Esta función surge al estudiar la densidad. Para la masa distribuida a lo largo del eje x, habría una densidad $\rho(x)$ tal que

$$\int_a^b \rho(x)dx = masa\ entre\ a\ y\ b.$$

Supongamos que la masa total es 1 y sigamos un proceso de límite, concentrando la masa más y más cerca de $x = 0$. Entonces, la densidad correspondiente es como la figura de abajo. La función $\delta(x)$ se define como la densidad límite cuando la masa tiende a concentrarse en el punto

$x = 0$. Como el total de masa es 1, para $a < 0 < b$ debemos tener

$$\int_a^b \delta(x)dx = 1.$$

Sin embargo, $\delta(x) = 0$ para todo x excepto 0 y $\delta(0) = +\infty$. Es posible fundamentar de manera razonable estas propiedades en cierto modo notables. Podemos pensar en $\delta(x)$ como la densidad de una partícula de masa unitaria en $x = 0$ o como el caso limite de la densidad $\rho(x)$ cuando la amplitud del pulso tiende a 0.

Para una partícula de masa unitaria en x_0, la densidad correspondiente es $\delta(x - x_0)$. Para varias partículas de masa $m_1, \ldots, m_n$ en $x_1, \ldots, x_n$, respectivamente, la densidad es $m_1\delta(x - x_1) + \ldots + m_n\delta(x - x_n)$.

Definición 1. *Momentos de las distribuciones.- Llamamos $k -$ ésimo momento alrededor del origen a la integral*

$$\int_a^b x^k \rho(x)dx.$$

En general, requerimos integrales del tipo

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx$$

con f continua.

Si ahora tenemos una solo partícula de unidad de masa en x_0, en el intervalo $x_0 - c < x < x_0 + c$, entonces $\rho(x) = \delta(x - x_0)$ y el k-ésimo momento alrededor de 0 es simplemente x_0^k; Así:

$$\int_{x_0-c}^{x_0+c} x^k \delta(x - x_0)dx = x_0^k.$$

Análogamente, para una función continua $f(x)$ en general y cada $c > 0$, tenemos

$$\int_{x_0-c}^{x_0+c} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

o, si hacemos $t = x - x_0$,

$$\int_{-c}^{c} f(x_0 + t)\delta(t)dt = f(x_0).$$

Volvamos a las series de Fourier. Usemos el hecho de que la función

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}cost + \ldots + \frac{1}{\pi}cosnt$$

puede considerarse que tiene a $\delta(t)$ como límite, para $-\pi \leq t \leq \pi$, cuando $n \to \infty$.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P_n(t) = \delta(t)$$

Podemos demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)P_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\delta(t)dt = f(x),$$

siempre que f sea continua en x y exista $f'(x)$.

La n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f es

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1cosx + b_1senx + \ldots + a_ncosnx + b_nsennx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du + \frac{cosx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)cosudu + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\frac{1}{2} + cosxcosu + senxsenu + \ldots)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)[\frac{1}{2} + cos(u-x) + cos2(u-x) + \ldots + cosn(u-x)]du.$$

Por tanto,

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)P_n(u-x)du.$$

Si hacemos $u = x + t$ y aprovechamos la periodicidad, concluimos que

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)P_n(t)dt.$$

Tomando límites tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\delta(t)dt = f(x)$$

Esto asegura la convergencia mencionada, al menos cuando f es continua y existe $f'(x)$.

Un indicio de que $P_n(t)$ tiende en realidad a $\delta(t)$ como límite, para $-\pi \leq t \leq \pi$, lo proporciona el siguiente cálculo formal. Buscamos los coeficientes de Fourier de la función igual a $\delta(t)$ para $-\pi \leq t \leq \pi$. (Con $x_0 = 0$)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)dt = \frac{1}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)cosntdt = \frac{1}{\pi}, n = 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)senntdt = 0, n = 1, 2, \ldots$$

Entonces podemos esperar que:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}cost + \frac{1}{\pi}cos2t + \ldots =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}cost + \ldots + \frac{1}{\pi}cosnt) = lim_{n\to\infty}P_n(t).$$

Observación.- Como $P_n(t)$ tiene periodo 2π, su límite debe ser una función delta periódica que coincide con $\delta(t)$ para $-\pi \leq t \leq \pi$.

Serie coseno de Fourier, serie seno de Fourier

Sea $f(x)$ una función definida solamente para $0 \leq x \leq \pi$ y sea f continua a trozos en este intervalo. Reflejando la gráfica de f en el eje y, obtenemos una función par definida en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, que coincide con f para $0 \leq x \leq \pi$. Mediante la periodicidad extendemos la nueva función para todo x y obtenemos una función f_1 que es par, tiene periodo 2π y coincide con f para $0 \leq x \leq \pi$. A f_1 le llamamos la extensión periódica par de f.

La función f_1 satisface las condiciones de la convergencia vistas anteriormente. Por tanto, la serie de Fourier de f_1 converge a f_1 para todo x. Como f_1 es par, $b_n = 0$ para todo n y

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_1(x)cosnxdx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx, \quad para\ todo\ x.$$

En la fórmula para a_n podemos reemplazas la función f_1 por f, ya que $f_1 = f$ para $0 \leq x \leq \pi$. También por la misma razón:

$$f(x) = f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx, para\ 0 \leq x \leq \pi$$

Por tanto, concluimos que cada función $f(x)$ definida en $0 \leq x \leq \pi$ y continua a trozos, podemos desarrollarla en una serie que incluya solamente cosenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

y

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)cosnxdx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Esta serie se llama la *serie coseno de Fourier de f*. La serie converge a f para $0 \leq x \leq \pi$ y converge a la extensión periódica PAR de f fuera del intervalo.

Igualmente podemos desarrollar la misma función f en una serie que incluye solamente senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sennxdx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Esta serie se llama *serie seno de Fourier de f*. La serie converge a $f(x)$ para $0 \leq x \leq \pi$ y converge a la extensión periódica IMPAR de f fuera de este intervalo.

Nota.- Pueden aparecer saltos en 0 y $+\pi$, lo cual nos obliga a usar un nuevo valor en estos puntos. Dado que la función es impar y periódica, el nuevo valor es 0. También nos obliga a dar ese valor a la forma de la serie $\sum b_n sennx$ que converge a 0 para $x = 0, \pi\ o\ -\pi$.

Ejemplo. Sea $f(x) = \pi - x$ para $0 \leq x \leq \pi$. Calcular la extensión periódica par de f y su serie de Fourier.

Cambio de periodo

Si $f(x)$ tiene periodo T, y no necesariamente 2π, podemos reducir f a una función de periodo 2π mediante un cambio de escala:

$$x_1 = \frac{2\pi}{T} x = \omega x, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

y expresar f en términos de $x_1:\ f(x) = f(\frac{x_1}{\omega})$. Obtenemos una serie de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 cosx_1 + b_1 senx_1 + \ldots = \frac{a_0}{2} + a_1 cos\omega x + b_1 sen\omega x + \ldots$$

Aquí:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{x_1}{\omega}) cosnx_1 dx_1, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{x_1}{\omega}) sennx_1 dx_1.$$

Podemos también usar que $x = \frac{x_1}{\omega}$ como variable de integración:

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x) cosn\omega x dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) cosn\omega x dx,$$

y hay una fórmula análoga para b_n. Así, definimos la serie de Fourier de f, con periodo T, como la serie:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 cos\omega x + b_1 sen\omega x + \ldots + a_n cos\ n\omega x + b_n sen\ n\omega x + \ldots,$$

donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, y

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) cos\ n\omega x dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) sen\ n dx.$$

Como la integral de una función de periodo T, calculada en un intervalo de longitud T, tiene el mismo valor para cada uno de dichos intervalos, podemos integrar (en $a_n,\ b_n$) de 0 a T o sobre cualquier intervalo de longitud T. Así, podemos reemplazar las ecuaciones anteriores por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) sen \frac{2n\pi x}{T} dx.$$

Ejemplo.- Sea $f(x) = \pi - x$ para $0 < x < \pi$ y f con periodo π. Obtener la serie de Fourier.

Convergencia en media (cuadrática). Desigualdad de Bessel. Relación de Paserval

Definimos la convergencia en media cuadrática del siguiente modo: Si $\{f_n\}$ y f son integrables Riemann en $[a,b]$, se dice que $\{f_n\}$ converge a f en media cuadrática si

$$lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f_n - f|^2\right) = 0.$$

Sea $f(x)$ una función real continua a trozos en $[-\pi,\pi]$ y que se extiende a todo $\mathbf{R}$ por periodicidad. Consideremos la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier asociada

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k coskx + b_k senkx),$$

donde $\{a_k, b_k\}$ son los coeficientes de Fourier de $f(x)$.

Definición.- Diremos que la serie de Fourier de $f(x)$ convergen en media a $f(x)$ si

$$lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - s_n(x)]^2 dx = 0.$$

Es inmediato ver que

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)s_n(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)dx.$$

Usando quién es $s_n(x)$ y la definición de los coeficientes de Fourier:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k coskx + b_k senkx),$$

y

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)senkxdx$$

tenemos lo siguiente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)s_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k coskx + b_k senkx)\right) =$$

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)senkxdx\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n}\pi a_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx + \sum_{k=1}^{n} b_k\pi\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)senkxdx =$$

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n}\pi a_k^2 + \sum_{k=1}^{n}\pi b_k^2 = \frac{a_0^2\pi}{2} + \pi\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

Por otro lado,

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k coskx + b_k senkx)\right)^2 dx =$$

$$= 2\pi \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2).$$

Teniendo en cuenta estos dos resultados previos, la desigualdad de arriba la podemos reescribir como:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\left(\frac{a_0^2 \pi}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right) + 2\pi \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2),$$

por tanto

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx, \ \forall n \in N$$

Como la sucesiíon que aparece en el término de la izquierda está acotada, en el límite $n \to \infty$, tenemos que:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$

expresión que se conoce con el nombre de *DESIGUALDAD DE BESSEL*. Esta desigualdad, nos permite enunciar el siguiente resultado:

Teorema.- Para toda función $f(x) \in L^2([-\pi, \pi])$ la suma de los cuadrados de sus coeficientes de Fourier es una serie convergente.

Demostración.- Es inmediata de la desigualdad de Bessel.

Corolario.-

$$\lim_{k \to \infty} |a_k| = \lim_{k \to \infty} |b_k| = 0.$$

De la demostración de la desigualdad de Bessel, se sigue que si la serie de Fourier converge en media a $f(x)$, entonces en lugar de una desigualdad, tenemos una igualdad estricta, *la RELACIÓN DE PASERVAL*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$

Teorema.- La serie de Fourier de una función $f(x) \in L^2([-\pi, \pi])$ converge en media, y por tanto verifica la relación de Paserval.

(No damos la demostración)

Convergencia uniforme

Teorema Sea $f(x)$ una función continua de $\Re$ a C de periodo 2π y sea $f'(x)$ continua a trozos en $[-\pi, \pi]$. La serie de Fourier de $f(x)$ converge absoluta y uniformemente.

(El mismo resultado es válido si $f(x)$ sólo está definida en el intervalo $[-\pi, \pi)$ y $f(-\pi) = f(\pi)$, ya que esto permite extender la función de forma periódica y continua a todo $\Re$.

Demostración.- Haremos uso del criterio M de Weierstrass. Tenemos que analizar la convergencia uniforme de la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k coskx + b_k senkx).$$

El criterio M de Weierstrass nos dice que esta serie converge absoluta y uniformemente en $[-\pi, \pi]$ (y por tanto también puntualmente) si podemos encontrar unas constantes positivas $M_k,\ k = 1, 2, \ldots$ tales que

$$|a_k coskx + b_k senkx| \leq M_k, \quad \forall\ x \in [-\pi, \pi],$$

siendo, además $M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$ una serie convergente. Veamos que, en efecto, podemos construir esta serie numérica convergente. En primer lugar consideremos las series de Fourier de $f(x)$ y $f'(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k coskx + b_k senkx),$$

$$f'(x) \sim \frac{\widehat{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\widehat{a_k} coskx + \widehat{b_k} senkx).$$

Los coeficientes de cada serie se calculan usando las fórmulas ya conocidas:

$$\widehat{a_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} [f(x)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

ya que $f(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$ y periódica.

Los otros coeficientes se calculan análogamente:

$$\widehat{a_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) coskx dx = \frac{1}{\pi} \left\{ [f(x) coskx]_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) senkx dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} [f(\pi) cosk\pi - f(-\pi) cosk\pi + k_k] = k b_k;$$

$$\widehat{b_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) senkx dx = \frac{1}{\pi} \left\{ [f(x) senkx]_{-\pi}^{\pi} - k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) coskx dx \right\} = -k a_k.$$

Asi pues, podemos acotar de manera trivial utilizando estos resultados y obtenemos:

$$|a_k coskx + b_k senkx| \leq |a_k| + |b_k| = \frac{|\widehat{a_k}|}{k} + \frac{|\widehat{b_k}|}{k} := M_k.$$

Falta probar que la suma de estas constantes M_k converge. Esto se sigue con facilidad de lo siguiente:

$$0 \leq \left(|\widehat{a_k}| - \frac{1}{k}\right)^2 = |\widehat{a_k}|^2 + \frac{1}{k^2} - \frac{2|\widehat{a_k}|}{k},$$

de modo que:

$$\frac{|\widehat{a_k}|}{k} \leq \frac{1}{2}|\widehat{a_k}|^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}(\widehat{a_k})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}$$

Lo mismo es válido con $\widehat{b_k}$ en lugar de $\widehat{a_k}$, de modo que

$$M_k \leq \frac{1}{2}(\widehat{a_k})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}(\widehat{b_k})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}$$

pero entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[(\widehat{a_k})^2 + (\widehat{b_k})^2] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty,$$

pues la segundo de las series tiene suma $\frac{\pi^2}{6}$ y la primera converge en virtud de la desigualdad de Bessel. Observa que se verifica la desigualdad de Bessel porque como $f'(x)$ es continua a trozos en $[-\pi,\pi]$ entonces también lo es $(f'(x))^2$, y en consecuencia, $f'(x) \in L^2([-\pi,\pi])$, con lo que se le puede aplicar el resultado del teorema anterior.

Forma compleja de las series de Fourier

Usando la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$$

y

$$e^{-i\theta} = cos\theta - isen\theta$$

, podemos escribir

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad sen\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

De manera que podemos escribir la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sennx)$$

como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n(e^{inx} - e^{-inx})}{2} + \frac{b_n(e^{inx} - e^{-inx})}{2i}\right]$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}.$$

Podemos combinar estas dos expresiones en una serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx},$$

donde

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\ para\ n \geq 1\ ,\ c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}\ para\ n \leq -1.$$

La serie anterior se conoce como la *forma compleja* de la serie de Fourier. Es posible calcular los coeficientes c_n directamente de f:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Como de costumbre, podemos integrar de 0 a 2π o en cualquier otro intervalo de longitud 2π.

Nuestra suma parcial original $s_n(x)$ corresponde a los términos de índice $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, en la serie compleja y, por tanto, esta serie debe considerarse como

$$lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

Ejemplo.- Sea $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 2\pi$ y sea f con periodo 2π. Entonces, mediante integración por partes,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2 e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2e^{-inx}}{-in}|_0^{2\pi} + \frac{2}{in}\int_0^{2\pi} xe^{-inx}dx\right]$$

$$= \vdots .pag145$$

Podemos extender la forma compleja de la serie de Fourier a las funciones de periodo general τ. Sustituyendo $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ la serie se convierte en

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

donde

$$c_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(x)e^{-in\omega x}dx,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Podemos integrar de $\frac{-\tau}{2}$ a $\frac{\tau}{2}$ o en cualquier otro intervalo de longitud τ.

Observación.- En todo el estudio, $f(x)$ puede ser una función con valores complejos. si $f(x)$ tiene valores reales, entonces $c_{-n} = \bar{c_n}$ en las ecuaciones de arriba.

Aplicación de las series de Fourier a la respuesta de frecuencia

Ya hemos visto la aplicación de las ecuaciones diferenciales de segundo orden al estudio de las oscilaciones de fuerza en sistemas mecánicos o eléctricos. Extenderemos este análisis a las ecuaciones diferenciales de m-ésimo orden aprovechando las series de Fourier. Consideremos la ecuación diferencial:

$$a_0\frac{d^mx}{dt^m} + a_1\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_{m-1}\frac{dx}{dt} + z_m x = f(t)$$

y supongamos que los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$ son constantes reales, con $a_0 \neq 0$. La solución general de la ecuación diferencial es de la forma:

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t).$$

Siendo $x_H(t)$ solución general de la ecuación homogénea (que se encuentra con la ayuda de la ecuación característica: $a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0$. La función $x_P(t)$ es una solución particular de la ecuación dada. Solo consideraremos el caso en el que todas las raíces características λ tengan parte real negativa $Re\lambda < 0$ (En este caso se dice que el sistema es estable, y las soluciones son TRANSITORIAS (pues tienden a 0 si $t \to \infty$)).

Sea $f(t)$ periódica, de periodo τ, y sea f continua a trozos, de manera que quede representada por su serie de Fourier, escribámosla en su forma completa:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

Para obtener una solución particular $x_P(t)$ de la ecuación diferencial anterior, usaremos la idea de la superposición. Para cada término $c_n e^{in\omega t}$ de $f(t)$, encontramos una solución de la ecuación:

$$a_0 \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + a_n x = c_m e^{in\omega t}.$$

Por coeficientes indeterminados, encontramos que

$$x(t) = \frac{c_n e^{in\omega t}}{a_0(in\omega)^m + \ldots + a_m}.$$

Aquí el denominador es distinto de cero, ya que por hipótesis nuestra ecuación es estable, de manera que $in\omega$ no es una raíz característica. Escribimos:

$$Y(s) = \frac{1}{a_0 s^m + \ldots + a_m}.$$

Esta función es la *FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA* del sistema considerado. Para ω real, la función $Y(i\omega)$ es la *FUNCIÓN DE RESPUESTA DE FRECUENCIA* del sistema. Podemos escribir nuestra solución particular como

$$x = c_n Y(in\omega) e^{in\omega t}.$$

Por consiguiente, por la superposición, una solución de la ecuación:

$$a_0 \frac{d^m}{dt^m} + \ldots + a_m x = f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

está dada por

$$x_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n Y(in\omega) e^{in\omega t}.$$

EJEMPLO.- Sea $f(t) = 0$ para $\frac{-\pi}{2} \leq t < \frac{-\pi}{2}$, $f(t) = 1$ para $\frac{-\pi}{2} \leq t < \frac{1\pi}{2}$, $f(t) = 0$ para $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$, y sea f con periodo 2π. Observa que $\tau = 2\pi$, $\omega = 1$ y

$$c_n = \frac{1}{2\pi} ... \textit{pág } 148$$

Resumen

Definición. Serie de Fourier

Dada una función integrable, periódica de periodo 2π, se llama serie de Fourier asociada a f a la serie de funciones

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sennx),$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx \ \ en\ particular\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sennxdx.$$

Los coeficientes a_0, a_n, b_n reciben el nombre de coeficientes de fourier asociados a f, o coeficientes de Fourier de f.

Teorema de Dirichlet

Sea f una función 2π-periódica acotada y derivable a trozos. Entonces, la serie de Fourier de f converge en cada punto a hacia

$$\frac{1}{2}\left(lim_{x\to a^+} f(x) + lim_{x\to a^-} f(x)\right).$$

Si f es continua en a, su serie de Fourier converge a $f(a)$.

Propiedades

a)Los coeficientes de la serie de Fourier de f pueden calcularse en cualquier intervalo de longitud 2π. Habitualmente se tomarán como intervalos de referencia para calcular los coeficientes los intervalos $[-\pi, \pi]$ *ó* $[0, 2\pi]$.

b) Si $f(x)$ es impar, $a_n = 0$ para todo n. Si $f(x)$ es par, $b_n = 0$ para todo n.

Definición

Si f es una función periódica de periodo $2l \neq 2\pi$, se llama serie de Fourier asociada a f a la serie:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{l} + b_n sen\frac{n\pi x}{l}\right),$$

siendo

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{n\pi x}{l}dx, \ \ en\ particular\ a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

y

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sen\frac{n\pi x}{l}dx.$$

En estas condiciones también se verifica el Teorema de Dirichlet con las modificaciones oportunas.

OBSERVACIÓN: Una ventaja importante de las series de Fourier es que son capaces de representar funciones muy generales, con muchas discontinuidades, del tipo de funciones discontinuas de "impulso", muy usuales en diversos aspectos de ingeniería, mientras que las series de potencias sólo pueden representar funciones continuas con derivadas de cualquier orden.

Series de Fourier tipo seno

Dada una función f definida en el intervalo $[0, \pi]$ derivable a trozos en dicho intervalo, puede desarrollarse en una serie de Fourier tipo seno (es decir con $a_n = 0$ para todo n) extendiéndola al intervalo $[-\pi, 0]$ de modo que la función extendida sea impar.

Series de Fourier tipo coseno

Dada una función f definida en el intervalo $[0, \pi]$ derivable a trozos en dicho intervalo, puede desarrollarse en una serie de Fourier de tipo coseno (es decir con $b_n = 0$ para todo n) extendiéndola al intervalo $[-\pi, 0]$ de modo que la función extendida sea par.