TRANSFORMADA DE FOURIER

Definiciones.
Dada una función real (o compleja), f(x), definida para x $\in \Re$, se introduce una función (que depende de una variable real, k) denominada transformada de Fourier de la función f(x), como

$$F[f(x)] = F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Se define la transformada inversa de Fourier de una función F(k)

$$F^{-1}[F(k)] = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

La última integral se denomina integral de Fourier.

Observaciones.

1) Evalúa las funciones anteriores cuando k = 0 y x = 0. ¿Qué puedes obtener de estos resultados?

2) Además, somos capaces de dar cotas para F(k) y f(x). Comprueba que:

$$|F(k)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad y \quad |f(x)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)| dk$$

3) Una *condición suficiente* para que exista la transformada de Fourier de una función es que la función sea absolutamente integrable en $\Re$, es decir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

Aunque se puede demostrar la existencia de la integral en condiciones más generales.

4) Podemos interpretar la integral de Fourier como un valor principal:

$$\lim_{b \to \infty} \int_{-b}^{b} F(k) e^{ikx} dk$$

¿Qué ocurre en la integral de Fourier si F(k) es impar? ¿Y si es par?

Nota. ¿Haciendo la transformada inversa de la transformada de Fourier, recuperamos la función original f(x) ?

Es tu turno para demostrarlo. Utiliza que e^{ix} = cos x + i sen x, y usa la última observación anterior.

$$f(x) = ? = F^{-1}[F[f(x)]] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dx = \ldots$$

Como probablemente lo habrás resuelto sin problema, comprobarás que, no es exactamente la función original.

Nos gustaría que así fuera, ¿no?. Pues nos tendremos que conformar con el:

Teorema de la integral de Fourier.

Si f(x) es una función absolutamente integrable -la integral en valor absoluto de la función entre -∞ y +∞ está acotada y es convergente- y regular a trozos en todo intervalo finito, entonces:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos[k(x-y)]dydk = \frac{f(x^{+}) + f(x^{-})}{2}$$

Cálculo de transformadas

Consideremos la función f(x) que vale 0 si x < 0 y $e^{-\alpha x}$ si $x \geq 0$. Veamos cuánto vale su transformada de Fourier:

El cálculo de la inversa es más complicado, necesitamos recurrir a la teorema de los residuos, que pertenece a la teoría de variable compleja. El cálculo de la transformada inversa resulta ser F^{-1}[F(k)] vale 0 si x < 0, y ½ para x = 0 y $e^{-\alpha x}$ si $x \geq 0$. Como puedes ver, no se recupera la función original, f(x) ¿por qué?

____

____

Es tu turno:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

a) Calcula su transformada.

b) ¿Cuánto vale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{senk}{k} dk$? *Indicación:* La función (cos(x)-1)/x es impar.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 < x < \infty \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

(a) Calcula su transformada.

(b) ¿Cuánto vale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{1+k^2}$?