AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
Relación 3 2005/2006

1. La capacidad límite del hábitat de un rebaño en vida salvaje es L. El ritmo de crecimiento $\frac{dN}{dt}$ del rebaño, es proporcional a las oportunidades de crecimiento todavía sin utilizar, de acuerdo con la ecuación diferencial
$$\frac{dN}{dt} = k(L - N)$$
Escribe la solución general de la ecuación diferencial.

   Supongamos que se sueltan 100 ejemplares en una proporción de terreno que admite un máximo de 750. Tras 2 años, el rebaño ha crecido hasta 160 animales.

   a) Hallar la función de población en términos del tiempo t (en años)

   b) Comprobar que la función del apartado a) es solución de la ecuación diferencial dada.

   c) Dibujar la gráfica de esa función de población.(Usa Maple)

2. Dibujar las curvas solución de $xy' + y = 0$.

3. Resolver el problema de valor inicial (P.V.I.):
$$(1 + e^x)yy' = e^x$$
$$y(0) = 1$$

4. Hallar la solución particular de la ecuación $y' senx = ylny$ que satisface las condiciones iniciales siguientes:

   a) $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

   b) $y(0) = 1$.

5. Hallar una curva que pase por el punto $(0, -2)$, de modo que la pendiente de la tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la ordenada del punto aumentada en 3 unidades.

6. Resolver la ecuación diferencial $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$.

7. Resolver la ecuación diferencial $xy' = \sqrt{y^2 + x^2}$.

8. Resolver la ecuación diferencial
$$y' = -\frac{x - y + 3}{3x + y + 1}$$

9. Integrar la ecuación diferencial
$$y' = \frac{1 - 2x - 2y}{x + y - 2}$$

10. Integrar la ecuación diferencial
$$(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$$
sabiendo que admite factor integrante $\mu(x)$.

11. Integrar la ecuación diferencial
$$(cosx)dx + (y + seny + senx)dy = 0$$
sabiendo que admite factor integrante $\mu(y)$.

12. En la conservación de alimentos, el azúcar de caña sufre un proceso de inversión y se transforma en glucosa y fructosa. En soluciones diluidas, el ritmo de inversión es proporcional a la concentración $y(t)$ del azúcar inalterada. Si la concentración es $\frac{1}{50}$ cuando $t = 0$ y $\frac{1}{200}$ tras 3 horas, hallar la concentración del azúcar inalterada después de 6 y 12 horas.

13. La cuantía A de una inversión P se incrementa a un ritmo proporcional al valor de A en el instante t.

    a) Obtener la ecuación de A como función de t.

    b) Si la inversión inicial es de 1000,00 \$ y el interés es del 11 por 100. Calcular el capital al cabo de 10 años.

14. Se deja caer un objeto de masa m desde un helicóptero. Halar su velocidad en función del tiempo, suponiendo que la resistencia debida al aire es proporcional a la velocidad del objeto.

15. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + 6y' + 12y = 0.$$

16. Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

17. Un día empieza a nevar con ritmo constante. Un quitanieves cuya velocidad es inversamente proporcional a la altura de la nieve acumulada, sale a mediodía y avanza 2 kms en la primera hora y 1 km en la segunda hora. ¿A qué hora comenzó a nevar?

18. Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del aire. Si la temperatura del aire es de 20^oC y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100^oC hasta 60^oC, ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta 30^oC?

19. Calcular la velocidad límite que alcanza un paracaidista en su caída, si se sabe que la resistencia del paracaídas es proporcional a su velocidad.

20. **Movimiento armónico simple.** Para cualquier número positivo ω, la ecuación diferencial ordinaria del resorte no amortiguado y sin fuerza motriz regido por la ley de Hooke

$$P(D)[y] = y'' + \omega^2 y = 0$$

tiene la solución general

$$y = C_1 sen\omega t + C_2 cos\omega t$$

donde C_1 y C_2 son números reales arbitrarios. Esto se debe a que $\pm i\omega$ son las raíces de $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$. Si tanto C_1 como C_2 son distintas de cero, entonces $A = (C_1^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}} > 0$ y la solución general tiene la forma equivalente:

$$y = A\left(\frac{C_1}{A} sen\omega t + \frac{C_2}{A} cos\omega t\right)$$

Definimos θ como un ángulo tal que $cos\theta = \frac{C_1}{A}$, $sen\theta = \frac{C_2}{A}$. Entonces se observa que la solución general de $y' + \omega^2 y = 0$ es

$$y = A(cos\theta sen\omega t + sen\theta cos\omega t) = Asen(\omega t + \theta)$$

donde la *amplitud* A es una constante positiva arbitraria y el *ángulo de fase* θ es una constante arbitraria (positiva o negativa) puesto que C_1 y C_2 son arbitrarias. De manera equivalente, $y = Acos(\omega t + \phi)$ con ángulo de fase ϕ donde $\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$. Por consiguiente, toda solución de la EDO es una sinusoide de periodo $\frac{2\pi}{\omega}$. La EDO $y'' + \omega^2 y = 0$ recibe el nombre de *oscilador armónico simple* y las gráficas solución representan *el movimiento armónico simple.*

Dotemos de una fuerza motriz al oscilador armónico con el término de impulsión sinusoidal $3senkt$, donde $k \neq \omega$.

$$y'' + \omega^2 y = 3senkt$$

Encontrar una fórmula para las soluciones de la EDO y usando el Maple dibujar el movimiento armónico simple.

21. La ecuación

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgsen(\theta)$$

describe el movimiento del péndulo de la figura si se desprecia la fuerza de rozamiento y sólo se considera la fuerza ejercida por la masa, m, y la gravedad, g.

Para cualquier θ esta ecuación diferencial no es lineal, pero si $\theta \approx 0$, es decir, para oscilaciones pequeñas, podemos aproximar $sin(\theta)$ por $theta$, y así, resulta una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Considera este caso de oscilaciones pequeñas para probar que en esta circunstancia (no real puesto que se desprecia la fuerza de rozamiento), el movimiento que describe el péndulo es un movimiento armónico simple, y exprésalo de la forma $\theta(t) = Rcos(kt + \varphi)$ para ciertas constantes R, k y φ.

Comprueba que si partimos del reposo, es decir, $\theta'(0) = 0$ con un ángulo de $\frac{\pi}{8}$, es decir, $\theta(0) = \frac{\pi}{8}$, la ecuación del movimiento es

$$\theta(t) = \frac{\pi}{8}cos(\sqrt{\frac{g}{L}}).$$