Definición 1. *Sean* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *y* f *funciones de* x *con un dominio común. Una ecuación de la forma*

$$y^{(n)} + g_1(x)y^{(n-1)} + \ldots, g_{n-1}(x)y' + g_n(x)y = f(x)$$

se llama una ecuación diferencial lineal de orden n. Si $f(x) = 0$ *diremos que la ecuación es homogénea.*

Teorema 1. *Si* y_1 *e* y_2 *son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial* $y'' + ay' + by = 0$*, entonces la solución general es*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

siendo C_1, C_2 *constantes.*

El teorema anterior nos dice que si podemos hallar dos soluciones linealmente independientes, entonces podemos obtener la solución general mediante combinación lineal de las dos soluciones.

Para hallar dos soluciones linealmente independientes, observamos que la naturaleza de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ usamos la solución que propuso Euler (ensayar con $y(x) = e^{\lambda x}$

Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden

Teorema 2. *Sea* $y'' + ay' + by = F(x)$ *una ecuación diferencial lineal no homogénea se segundo orden. Si* y_p *es una solución particular de esta ecuación e* y_h *es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente, entonces*

$$y = y_h + y_p$$

es la solución general de la ecuación no homogénea.

Método de los coeficientes indeterminados

Puesto que ya sabemos hallar la solución homogénea y_h, enfocamos nuestro estudio a la forma de hallar la solución particular y_p.

Si $F(x)$ en la ecuación $y'' + ay' + by = F(x)$ consiste en la suma o productos de

$$x^n, \quad e^{mx}, \quad cos\beta x, \quad sen\beta x$$

entonces podemos hallar una solución particular y_p por el método de los COEFICIENTES INDETERMINADOS. La clave del método estriba en conjeturar que la solución y_p es una forma generalizada de $F(x)$, por ejemplo:

1. Si $F(x) = 3x^2$, escójase $y_p = Ax^2 + Bx + C$.
2. Si $F(x) = 4xe^x$, escójase $y_p = Axe^x + Bx$
3. Si $F(x) = x + sen2x$. escójase, $y_p = (Ax + B) + Csen2x + Dcos2x$

Entonces, por sustitución, determinamos los coeficientes de esta solución generalizada.

Nota: Debemos eliminar cualquier tipo de solapamiento con la solución homogénea.

Ejemplo

MÉTODO DE REDUCCIÓN DEL ORDEN

Sea la ecuación

$$y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

Es lineal, homogénea, pero los coeficientes no son constantes (esto no es problema, pues mientras que los coeficientes sean continuos, existe solución).

Vamos a intentar reducir el orden de la ecuación, para ello lo que hacemos es ensayar con soluciones de la forma

$$y(x) = (solucion\ particular) \cdot z(x)$$

siendo $z(x)$ una función a determinar.

En nuestro ejemplo $y(x) = x \cdot z(x)$, sustituyendo en la ecuación a resolver:
$y'(x) = z(x) + xz'(x)$ e $y''(x) = z'(x) + z'(x) + xz''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$
y obtenemos que :

$$2z'(x) + xz''(x) - xz(x) - x^2 z'(x) + xz(x) = 0$$

luego

$$xz''(x) + z'(x)(2 - x^2) = 0$$

Mediante el cambio $z'(x) = u(x)$, obtenemos la ecuación

$$xu'(x) + u(x)(2 - x^2) = 0$$

que es una ecuación de variables separadas, resolviendo, tenemos que

$$x\frac{du}{dx} = -u(x)(2 - x^2); \quad \frac{du}{u} = -\frac{(2 - x^2)}{x}dx$$

integrando, tenemos que

$$lnu = lnx^{-2} + \frac{x^2}{2} + K$$

tomando exponenciales, resulta que:

$$u(x) = e^K \frac{1}{x^2} e^{\frac{x^2}{2}} = \frac{C}{x^2} e^{\frac{x^2}{2}}$$

Como $z'(x) = u(x)$ resulta que:

$$z(x) = \int_1^x \frac{c}{x^2} e^{\frac{x^2}{2}} dx = \int \frac{c}{x^3} x e^{x^2} 2dx =$$

(Haciendo $u = \frac{c}{x^3}, \quad dv = xe^{x^2/2} \longrightarrow v = e^{x^2/2}$)

$$= \frac{C}{x^3} e^{\frac{x^2}{2}} + 3C \int_1^x \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^4} ds + K$$

Llamando $C = K = 1$, obtengo:

$$y_2(x) = xz(x) = x\left[\frac{1}{x^3}e^{\frac{x^2}{2}} + 3\int_1^x \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^4}ds + 1\right]$$

Por tanto, la solución general, es

$$y(x) = C_1 x + C_2\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{x^2}{2}} + 3x\int_1^x \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^4}ds + 1\right)$$

No es fácil encontrar soluciones a ojo, por ejemplo, si considero $x^2y'' - xy' + y = 0$ no es fácil encontrar una primera solución particular para aplicar el método de reducción del orden.

La idea original para buscar soluciones fue probar con polinomios, hasta que Newton probó a buscar soluciones con series de potencias

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$