PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

Recuerda: Las representaciones de los sistemas LTI continuos y discretos en términos de sus respuestas al impulso unitario están dados por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s)ds = x(t) * h(t)$$

Por tanto, las características de un sistema LTI están determinadas completamente por su respuesta al impulso (SOLO PARA SISTEMAS LTI).

Propiedad conmutativa.-

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

DEMOSTRACION
Si hago k=n-r,

$$x[n] * h[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n]$$

Análogo el caso continuo:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)x(t-s)ds$$

(Se demuestra de manera semejante al caso discreto).

Interpretación.- Si $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$, entonces la salida de un sistema LTI con entrada x[n] y respuesta al impulso unitario h[n], es idéntifca a la salida de un sistema LTI con entrada x[n] y respuesta al impulso unitario x[n].

Propiedad distributiva
Caso discreto:

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

Caso continuo:

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Interpretación.- En términos de interconexiones de sistemas:

Los sitemas con respuestas al impulso $h_1(t), h_2(t)$ tienen idénticas entradas y sus salidas se suman puesto que:

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

La salida es

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Consideremos

(Este sistema y el anterior son idénticos)

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$$

Consecuencia de las propiedades conmutativa y distributiva:

$$(x_1[n] + x_2[n]) * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n]$$

$$(x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$$

Lo cual establece que la respuesta de un sistema LTI a la suma de dos entradas debe ser igual a la suma de las respuestas a esas seales de manera individual.

Propiedad asociativa

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

(DEMOSTRACIÓN.- Basta manipular sumas e integrales)

SISTEMAS LTI CON Y SI MEMORIA

Un sistema es sin memoria si su salida en cualquier tiempo depende sólo del valor de la entrada en ese mismo tiempo. Como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = x[n] * h[n]$$

para que lo anterior se cumpla en un sistema discreto, debe ocurrir que $h[n] = 0$ para $n \neq 0$. En este caso, la respuesta al impulso, tiene la forma:

$$h[n] = K\delta[n], \quad \textit{con} \;\; K = h[0], \; \textit{es una cte}$$

y la suma de convolución se reduce a la relación:

$$y[n] = Kx[n]$$

Si $h[n] \neq 0$ para $n \neq 0$ entonces EL SISTEMA LTI TIENE MEMORIA.

Análogamente para que un sistema LTI continuo sea sin memoria, debe ocurrir que $h(t) = 0$ para $t \neq 0$, de modo que $y(t) = Kx(t)$ para alguna constante K y tiene la respuesta al impulso

$$h(t) = K\delta(t)$$

Nota.- Tanto sistemas discretos como continuos, si K=1, entonces los sistemas llegan a ser sistemas identidad (misma salida que entrada y la respuesta al impulso unitario es el propio impulso unitario). En esos casos:

$$x[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(t-s)ds$$

Invertibilidad de sistemas LTI

Consideremos un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$. El sistema es invertible si existe un sistema inverso que, cuando está conectado en serie con el sistema original, produce una salida igual a la entrada del primer sistema. Más aún, si un sistema LTI es invertible entonces tiene un inverso LTI.

El sistema inverso, con respuesta al impulto $h_1(t)$ resulta en $\omega(t) = x(t)$

Como la respuesta al impulso es $h(t) * h_1(t)$ entonces $h_1(t)$ debe ser la respuesta al impulso del sistema inverso, es decir

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

6. Causalidad para los sistema LTI

Propiedad de causalidad: La salida de un sistema causal depende sólo de los valores presentes y pasados de la entrada al mismo. Usando la suma e integral de convolución relacionamos esta propiedad con una propiedad correspondiente de la respuesta al impulso de un sistema LTI. En concreto, para que un sistema LTI discreto sea causal, $y[n]$ no debe depender de $x[k]$, para $k > n$. De la ecuación:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

tenemos que para que lo anterior sea cierto, los coeficientes $h[n-k]$ que multiplican a $x[k]$ para $k > n$ deben ser cero, por tanto $h[n] = 0$ para $n < 0$. (Esto significa que la respuesta al impulso de un sistema LTI causal deber ser 0 antes de que ocurra el impulso).

De manera más general, la causalidad para un sistema lineal es equivalente a la condición de "reposo inicial", es decir, si la entrada a un sistema causal es 0 hasta algún punto en el tiempo, entonces la salida también debe de ser 0 hasta ese tiempo.

Nota.- La equivalencia *causalidad* $\equiv$ *reposo inicial* se aplica solo a sistemas lineales.

EJEMPLOS.- $y[n] = 2x[n]+3$ no es lineal, pero es causal y sin memoria. Sin embargo, si $x[n] = 0 \Rightarrow y[n] = 3 \neq 0$ luego no satisface la condición de reposo inicial.

Para un sistema LTI discreto causal, como $h[n] = 0,\ n < 0$ entonces

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$$

o de forma equivalente

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Análogamente si un sistema LTI es continuo es causal si $h(t) = 0 \forall\ t < 0$, por tanto:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)h(t-s)ds = \int_{0}^{\infty} h(s)x(t-s)ds$$

Sistemas LTI causales descritos por ecuaciones diferenciales

Una clase importante de sistemas continuos es aquella para la cual la entrada y la salida están relacionadas a través de na ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes (que ya sabemos resolver).