AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Relación 1 2005/2006

1. Determina x para que el producto $(2-5i)(3+xi)$ sea
   a) Un número real
   b) Un número imaginario puro

2. Determina un número complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

3. Hallar el número complejo $z = \sum_{k=0}^{100} i^k$

4. Hallar la parte real del número complejo
$$z = \frac{(3+2i)i^{17}}{i^{243}(1-i)^3}$$

5. Calcular las siguientes raíces:
   a) $\sqrt[3]{1}$
   b) $\sqrt[4]{16(\cos 180 + i \sin 180)}$

6. Encuentra un complejo que sumándolo con $\frac{1}{2}$ de otro complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento 60.

7. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo es 5. Halla estos complejos, su producto y su cociente.

8. Halla las soluciones (reales e imaginarias) de las ecuaciones:
   a) $z^6 - 28z^3 + 27 = 0$
   b) $z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$
   c) $z^8 - 1 = 0$

9. Los afijos de los números complejos z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero cuyo incentro es el origen de coordenadas. Sabiendo que $z_1 = 1 + i$, calcula z_2 y z_3.

10. Se considera el complejo $z = 1 + 3i$; se efectúa un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 30. Halla el complejo z' transformado por z en el citado giro.

11. Describir geométricamente los conjuntos de complejos z que cumplen:
    a) $z - \overline{z} = i$
    b) $z + \overline{z} = |z|^2$
    c) $z \cdot \overline{z} = 1$

12. Probar que $\frac{1}{i} = -i$ y que $\frac{1}{i+1} = \frac{1-i}{2}$.

13. Encontrar la parte real e imaginaria de $\frac{z+2}{z-1}$ siendo $z = x + iy$.

14. Probar que para cualesquiera $z, \omega \in \mathbb{C}$,

$$Re(z + \omega) = Rez + Re\omega$$

    y

$$Im(z + \omega) = Im(z) + Im(\omega)$$

15. Resolver la ecuación $z^8 = 1$ para z.

16. Calcular las raíces cuadradas y cúbicas de $1 + i$.

17. Calcular $\sqrt[4]{8 - 8\sqrt{3}i}$.

18. Mostrar que

$$\left[\overline{\frac{(3+7i)^2}{(8+6i)}}\right] = \frac{(3-7i)^2}{(8-6i)}$$

19. Probar que el máximo valor absoluto de $z^2 + 1$ sobre el disco unidad $|z| \leq 1$ es 2.

20. Expresar $cos3\theta$ en términos de $cos\theta$ y $sin\theta$ usando la fórmula de Moivre.

21. Escribir la ecuación de una línea recta, de un círculo y de una elipse usando notación compleja.

22. Probar que:
    a) $sen^2z + cos^2z = 1$
    b) $sen(z+\omega) = senz \cdot cos\omega + cosz \cdot sen\omega$
    c) $cos(z+\omega) = cosz \cdot cos\omega - senz \cdot sen\omega$

23. Resolver la ecuación $x^2 - (20+14i)x + 44 + 164i = 0$, y determinar dos números complejos tales que sus afijos y los correspondientes a las soluciones de la ecuación sean los cuatro vértices de un cuadrado en el que una de sus diagonales está determinada por las referidas soluciones.

24. Calcular la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos:

    a) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$
    b) e^{1+i}

25. Calcular $sen\left(\frac{\pi}{2} + in\right)$, con $n \in \mathbb{N}$

26. Calcular la suma de las raíces n-ésimas de la unidad. (Examen Febrero 2003)

27. Se consideran tres números complejos cualesquiera z_1, z_2 y z_3, y con ellos se construyen otros tres:

$$\zeta_1 = \frac{z_1}{z_2 - z_3}, \quad \zeta_2 = \frac{z_2}{z_3 - z_1}, \quad \zeta_3 = \frac{z_3}{z_1 - z_2}$$

    Demostrar que si la parte real de ζ_1 y ζ_2 es nula, también lo es la de ζ_3. (Examen Septiembre 2003)

28. Dada la ecuación $z^2 - 8zi - (19 - 4i) = 0$, hallar un complejo tal que su afijo y los afijos de las raíces formen un triángulo rectángulo isósceles.(Examen Febrero 2005)

29. Determinar si la función
$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$
verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann y hallar su dominio de holomorfía.

30. Comprueba que la función $f(z) = z^2$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y determine la derivada $f'(z)$.

31. Dada $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$, encuentre la función conjugada $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función analítica de z en todo el plano z. (Examen Septiembre 2004)