Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son una CONDICIÓN NECESARIA para que una función sea analítica en un dominio específico.

1. Funciones conjugadas y armónicas

Definición 1. *Un par de funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ de variables reales x,y que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann se dice que son* ***conjugadas****.*

Definición 2. *Una función $u(x,y)$ se dice* ***armónica*** *si satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones, es decir:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Cuestión: Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica, ¿son $u(x,y)$ y $v(x,y)$ funciones conjugadas?

Efectivamente. Si f es analítica, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen y por tanto u y v son conjugadas.

Ejercicio 1. *Sea $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$. Encuentre la función conjugada $v(x,y)$, tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es una función analítica de z en todo el plano z.*

Solución.

Como f debe ser analítica, entonces deben verificarse las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = \frac{\partial v}{\partial y} \;\Rightarrow\; v(x,y) = \int (2x+2)dy = 2xy + 2y + C(x)$$

Por otro lado, haciendo uso de la segunda condición de C-R:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y - C'(x)$$

por tanto

$$C'(x) = -2y + 2y = 0 \;\Rightarrow\; C(x) = Constante$$

Por ser C una constante cualquiera, elegimos la más sencilla, por ejemplo $C = 0$, así $v(x,y) = 2xy + 2y$, por tanto:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy + 2y)$$

o expresándolo en términos de z

$$f(z) = z^2 + 2z$$