1. DERIVACIÓN COMPLEJA

Límites

Sea f definida en todos los puntos z de algún entorno z_0

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$$

es decir, el punto $\omega = f(z)$ puede quedar próximo a ω_0 si elegimos z suficientemente próximo a z_0, pero $z \neq z_0$.

De forma precisa,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$$

si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z) - \omega_0| < \varepsilon$

Nota 1. *Sea* $f(z) = u(x, yx) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\omega_0 = u_0 + iv_0$, *Entonces*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \ y \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

CONTINUIDAD

Una función f es CONTINUA EN UN PUNTO z_0 si se cumple:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

f es continua en una región R, si es continua en cada punto de R.

La derivada de una función real $f(x)$ de una variable x en $x = x_0$ está dada por el límite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

El punto x_0 es un número real, así que puede ser representado por un punto en la recta real. El punto que representa x puede aproximarse al punto fijo x_0 ya sea por la izquierda o por la derecha a lo largo de esta recta. Volvamos ahora a las variables complejas y funciones dependientes de ellas. Sabemos que se requiere un plano para representar a los números complejos, así z_0 es ahora n punto fijo en algún lugar del plano. La definición de la derivada de la función $f(z)$ de la variable compleja z en el punto z_0 será entonces

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

Puede parecer que si sólo intercambiamos z por x, el resto de esta sección seguirá líneas similares a la derivación de funciones de variables reales. Para funciones reales, el límite puede tomarse solo por la izquierda o por la derecha, y la existencia de un límite único no es difícil de establecer. Sin embargo, para variables complejas el punto que representa el número complejo fijo z_0 puede ser aproximado a lo largo de una infinidad de curvas en el plano z. La existencia de un límite único es entonces un requerimiento muy estricto. El hecho de que la mayoría de las funciones complejas puedan ser derivadas en la forma usual es una propiedad sobresaliente de la variable compleja. Como $z = x + iy$ y x, y pueden variar independientemente, existen varias conexiones con el cálculo de funciones de dos variables reales.

Podemos escribir la función derivada del siguiente modo, tomando $\triangle z = z - z_0$, tenemos que

$$f'(z_0) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)}{\triangle z}$$

Como f está definida en un entorno de z_0, entonces $f(z_0 + \triangle z)$ está definido si $|\triangle z|$ es suficientemente pequeño.

En lugar de usar la palabras "derivable" para describir funciones complejas para las cuales existe la derivada, si la función $f(z)$ tienen una derivada $f'(x)$ que existe en todos los puntos de una región R del plano z, entonces $f(z)$ se llama **analítica** en R. Otros términos como **regular** u **holomorfa** también se utilizan como alternativas de analítica. Estrictamente, las funciones que tienen un desarrollo en serie de potencias se conocen como **funciones analíticas**. Se puede demostrar que todas función que tiene un desarrollo en serie de potencias alrededor de un punto es derivable en el mismo, es decir, toda función analítica en un punto es también derivable en ese puntos. Sin embargo, hay funciones derivables en un punto que no tienen un desarrollo en serie de potencias alrededor de ese puntos. Pero si la función es derivable en todos los puntos interiores a un círculo con centro en un punto dado, entonces la función se puede desarrollar en serie de potencias alrededor de dicho punto. Por eso a toda función derivable en todos los puntos de una región se le dice función analítica.

Proposición 1. *La existencia de la derivada de una función en un punto implica la continuidad de la función en tal punto.*

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que existe $f'(z_0)$, tenemos que:

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)] = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\lim_{z\to z_0}(z-z_0) = f'(z_0)\cdot 0 = 0$$

Por tanto

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

1.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 1. *Si $z = x+iy$ y $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, y $f(z)$ es analítica en alguna región R en el plano z, entonces las dos ecuaciones*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

conocidas como las ***ecuaciones de Cauchy-Riemann****, se satisfacen en todo R.*

Demostración

Como $f'(z)$ existe en cualquier punto z_0 en R,

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right]$$

donde z puede tender a z_0 a lo largo de cualquier trayectoria dentro de R.

Escribiendo $\triangle z = \triangle x + i\triangle y$, puedo escribir

$$f'(z_0) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)}{\triangle z} =$$

$$= \lim_{\triangle z \to 0} \frac{u(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) + iv(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\triangle z} =$$

$$= \lim_{\triangle z \to 0} \frac{u(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - u(x_0, y_0) + i\big(v(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - v(x_0, y_0)\big)}{\triangle z}$$

Como el límite será igual por los distintos caminos que tomemos:
Si $\triangle y = 0$, entonces cuando $\triangle x \to 0$ tengo:

$$f'(z_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \left(\frac{u(x_0 + \triangle x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\triangle x} \right) + \lim_{\triangle x \to 0} i \frac{v(x_0 + \triangle x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\triangle x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Luego

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Si ahora hacemos la derivada por otro camino, $\triangle x = 0$, cuando $\triangle z \to 0$, entonces $\triangle y \to 0$ y resulta:

$$f'(z_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \left(\frac{u(x_0, y_0 + \triangle y) - u(x_0, y_0)}{i\triangle y} \right) + \lim_{\triangle y \to 0} i \frac{v(x_0, y_0 + \triangle y) - v(x_0, y_0)}{i\triangle y} =$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

Luego

$$f'(z_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

Como el límite existe, ha de ser el mismo en cualquier dirección, luego

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

Es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann.