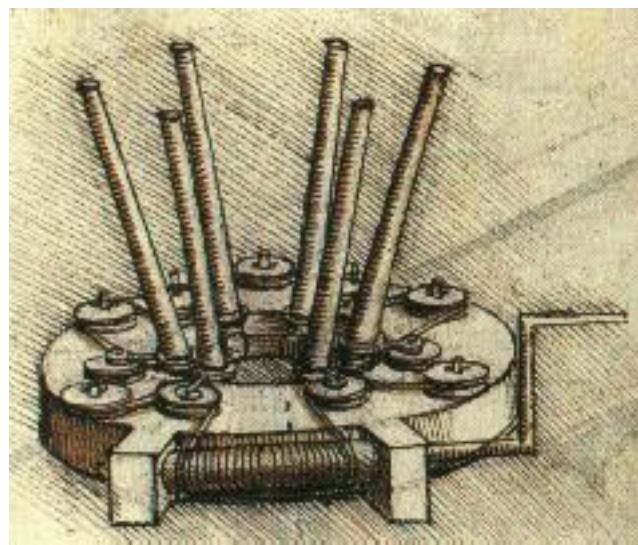




Área de Ingeniería Mecánica  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales  
Universidad de Castilla - La Mancha

# un curso de automoción



Publio Pintado Sanjuán  
noviembre, 1994

Un curso de  
**automoción**

**Publio Pintado Sanjuán**

Dr. Ingeniero Industrial  
Universidad de Sevilla

Sevilla, Noviembre de 1994



*A Carmen, Elaine,  
Eva y Florencio*





# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción Histórica</b>	<b>1</b>
1.1	Ferrocarril . . . . .	1
1.2	Automóvil . . . . .	3
1.3	Otros Vehículos . . . . .	5
1.3.1	Vehículos Aéreos y Espaciales . . . . .	5
1.3.2	Vehículos Navales . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Sistema de Dirección</b>	<b>11</b>
2.1	Mecanismo de Ackerman . . . . .	11
2.2	Ángulos de la Dirección . . . . .	13
2.3	Fuerzas y Momentos en la Rueda . . . . .	18
2.3.1	Sistemas de Referencia . . . . .	18
2.3.2	Acciones en el Contacto Rueda–Carretera . . . . .	20
2.3.3	Momentos en los Ejes de las Articulaciones . . . . .	21
2.4	Shimmy . . . . .	22
2.5	Reductora del Sistema de Dirección . . . . .	25
2.6	Dirección Asistida . . . . .	28
2.7	Dirección a las Cuatro Ruedas . . . . .	31
2.7.1	Honda . . . . .	31
2.7.2	Mazda . . . . .	32
2.8	Vehículos Oruga . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Dinámica Lateral</b>	<b>35</b>
3.1	Conceptos Previos . . . . .	35
3.1.1	Sistema de Referencia . . . . .	35
3.1.2	Ángulo de Deriva . . . . .	36
3.2	Modelo de Bicicleta . . . . .	38
3.3	Influencias en el Comportamiento Direccional . . . . .	42
3.3.1	Fuerzas de Tracción . . . . .	42
3.3.2	Distribución del Par de Balanceo . . . . .	42
3.3.3	Variación del Ángulo de Caída . . . . .	47
3.3.4	Direccionamiento Debido al Balanceo del Vehículo . . . . .	49
3.3.5	Flexibilidad Lateral de la Suspensión . . . . .	51
3.4	Medida del Coeficiente de Subvirador . . . . .	51
3.5	Respuesta Transitoria y Estabilidad . . . . .	52
3.6	Vehículos con Más de Dos Ejes . . . . .	54

3.7	Combinación Tractor–Semirremolque . . . . .	57
3.8	Dirección a las Cuatro Ruedas . . . . .	59
3.9	Direccionamiento de Vehículos Oruga . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Vuelco</b>	<b>67</b>
4.1	Vuelco Cuasi–Estático . . . . .	67
4.1.1	Vehículo Rígido (Sin Suspensión) . . . . .	67
4.1.2	Vehículo con Suspensión . . . . .	69
4.2	Medida del Umbral de Vuelco . . . . .	72
4.3	Vuelco en Régimen Transitorio . . . . .	72
4.4	Estadísticas de Accidentes . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Dinámica Vertical</b>	<b>77</b>
5.1	Función del Sistema de Suspensión . . . . .	77
5.2	Tolerancia de Vibraciones . . . . .	79
5.3	Fuentes de Excitación . . . . .	82
5.3.1	Carretera . . . . .	82
5.3.2	Rueda y Neumático . . . . .	86
5.3.3	Motor y Transmisión . . . . .	87
5.4	Bote y cabeceo . . . . .	88
5.4.1	Modelo 1/4 . . . . .	88
5.4.2	La Distancia entre Ejes como Filtro de Solicitaciones . . . . .	91
5.4.3	Centros de Bote y Cabeceo . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Sistema de Suspensión</b>	<b>97</b>
6.1	Suspensión de Eje Rígido . . . . .	97
6.2	Suspensión Independiente . . . . .	99
6.3	Centro Instantáneo de Balanceo . . . . .	101
6.4	Muelles . . . . .	102
6.4.1	Muelles de Flexión . . . . .	103
6.4.2	Muelles a Torsión . . . . .	104
6.4.3	Muelles a Cortante . . . . .	105
6.4.4	Muelles Neumáticos . . . . .	106
6.4.5	Barras Estabilizadoras . . . . .	107
6.5	Amortiguadores . . . . .	109
6.6	Suspensión Neumática e Hidroneumática . . . . .	109
6.7	Suspensión Activa . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Sistema de Frenos</b>	<b>115</b>
7.1	Estabilidad con un Eje Bloqueado . . . . .	115
7.2	El Frenado . . . . .	117
7.2.1	Frenado Convencional . . . . .	117
7.2.2	Frenado Óptimo Ideal . . . . .	119
7.2.3	Válvulas Limitadoras de Presión . . . . .	120
7.2.4	Sistemas de Freno Antibloqueo . . . . .	122
7.2.5	Rendimiento y Distancia de Frenado . . . . .	126
7.2.6	Frenado de un Tractor–Semirremolque . . . . .	127

7.3	Frenos . . . . .	129
7.3.1	Sistema General . . . . .	129
7.3.2	Servofreno de Vacío . . . . .	130
7.3.3	Frenos de Aire Comprimido . . . . .	131
7.3.4	Frenos de Tambor . . . . .	134
7.3.5	Frenos de Disco . . . . .	134
7.4	Ralentizadores . . . . .	136
7.4.1	Freno Motor . . . . .	137
7.4.2	Freno Eléctrico . . . . .	138
7.4.3	Ralentizador Hidráulico . . . . .	138
7.4.4	Ralentizador de Varios Discos de Fricción . . . . .	140
7.5	Vibraciones Autoexcitadas en Frenos . . . . .	140
<b>8</b>	<b>Neumáticos</b>	<b>145</b>
8.1	Función del Neumático y Alternativas . . . . .	145
8.2	Construcción de Neumáticos . . . . .	147
8.3	Designación y Sistemas de Referencia . . . . .	148
8.4	Ruedas . . . . .	151
8.5	Comportamiento Mecánico de la Goma . . . . .	152
8.5.1	Comportamiento Elástico . . . . .	152
8.5.2	Modelo de Kelvin Para Sólidos Viscoelásticos . . . . .	152
8.6	Compuesto Goma–Cordón . . . . .	156
8.6.1	Constantes Elásticas del Compuesto . . . . .	156
8.6.2	Matrices de Flexibilidad y Rigidez en Direcciones Principales . . . . .	157
8.6.3	Matrices de Rigidez en Direcciones Cualesquiera . . . . .	158
8.6.4	Teoría de Laminados . . . . .	159
8.6.5	Matriz ABD para Distintos Neumáticos . . . . .	161
8.7	El Problema del Contacto . . . . .	163
8.7.1	Superficies Conformes y No Conformes . . . . .	163
8.7.2	Deslizamiento, Rodadura y Pivoteo . . . . .	164
8.7.3	Teoría de Hertz para Presiones Normales . . . . .	165
8.7.4	Teoría de Kalker para “Presiones” Tangenciales . . . . .	166
8.8	La Fricción . . . . .	169
8.8.1	Teoría Clásica . . . . .	169
8.8.2	Otras Teorías . . . . .	170
8.8.3	Pseudo–deslizamiento . . . . .	171
8.9	Propiedades de los Neumáticos . . . . .	172
8.9.1	Ángulo de Deriva . . . . .	172
8.9.2	Ángulo de Caída . . . . .	173
8.9.3	Momento Rectificador . . . . .	175
8.9.4	Fuerzas Laterales y Longitudinales Combinadas . . . . .	175
8.10	Modelos de Comportamiento Mecánico . . . . .	176
8.10.1	Modelo de Cimentación Elástica Para el Comportamiento Lateral . . . . .	176
8.10.2	Modelo de Escoba Para el Comportamiento Longitudinal . . . . .	178
8.11	Superficies Mojadas . . . . .	179
<b>9</b>	<b>Transmisión</b>	<b>183</b>

9.1	Tipos de Transmisión . . . . .	184
9.2	Curvas de Potencia y Par . . . . .	186
9.2.1	Curvas de Potencia y Par Deseadas . . . . .	186
9.2.2	Curvas de Potencia y Par en Motores de Combustión Interna . . . . .	187
9.3	Relaciones de Transmisión . . . . .	190
9.3.1	Transmisión Continuamente Variable (CVT) . . . . .	190
9.3.2	Determinación de las Relaciones en Cajas Discretas . . . . .	192
9.4	Cajas de Cambio Simplificadas . . . . .	197
9.4.1	Caja de Trenes Ordinarios . . . . .	197
9.4.2	Caja de Trenes Epicicloidales . . . . .	197
9.5	Cajas de Cambio Manuales . . . . .	198
9.5.1	Embragues de Fricción . . . . .	198
9.5.2	Cajas Manuales . . . . .	203
9.5.3	Sincronizadores . . . . .	204
9.5.4	Accionamiento manual . . . . .	205
9.5.5	Reduceras . . . . .	206
9.6	Cajas de Cambio Automáticas . . . . .	208
9.6.1	Acoplamientos Hidráulicos y Convertidores de Par . . . . .	208
9.6.2	Embragues Unidireccionales . . . . .	211
9.6.3	Caja Automática y Dispositivos de Control . . . . .	212
9.7	Juntas Homocinéticas . . . . .	217
9.7.1	Junta Cardan y Doble Cardan . . . . .	217
9.7.2	Junta Tracta . . . . .	220
9.7.3	Junta Weiss . . . . .	220
9.7.4	Junta Rzeppa . . . . .	222
9.7.5	Otras Juntas . . . . .	223
9.8	Diferenciales . . . . .	224
9.8.1	Diferenciales Ordinarios . . . . .	224
9.8.2	Diferencial Torsen . . . . .	225
9.8.3	Acoplamientos Viscosos . . . . .	226
9.8.4	Diferencial Epicicloidal . . . . .	227
9.9	Transmisión a Más de Dos Ruedas . . . . .	227
9.9.1	Ejes Múltiples en Vehículos Industriales . . . . .	229
9.9.2	Tracción a las Cuatro Ruedas . . . . .	230
<b>10</b>	<b>Aerodinámica</b>	<b>231</b>
10.1	Resistencia Aerodinámica . . . . .	231
10.2	Conceptos Básicos . . . . .	232
10.2.1	Fluido Ideal . . . . .	232
10.2.2	Capa Límite . . . . .	233
10.2.3	Aeroelasticidad y Ruido Aerodinámico . . . . .	234
10.3	Aerodinámica Básica de un Automóvil . . . . .	234
10.3.1	Otros Factores: Torbellinos y Flujo Interno . . . . .	236
10.3.2	Diseño Aerodinámico . . . . .	236
10.4	Vientos Laterales y Estabilidad . . . . .	237
10.5	Influencia de Distintos Elementos . . . . .	241
10.5.1	Morro . . . . .	241

10.5.2	Parabrisas y Pilar–A . . . . .	241
10.5.3	Techo . . . . .	243
10.5.4	Trasera . . . . .	244
10.5.5	Spoiler Trasero . . . . .	246
10.5.6	Bajos . . . . .	247
10.5.7	Faldón o Spoiler Delantero . . . . .	247
10.5.8	Laterales . . . . .	248
10.5.9	Ruedas . . . . .	248
10.5.10	Antena y Espejos . . . . .	248
10.5.11	Ángulo de Ataque . . . . .	248
10.6	Aerodinámica de Vehículos Industriales . . . . .	248
<b>A</b>	<b>Análisis de Vibraciones Aleatorias</b>	<b>253</b>
A.1	Caracterización de Vibraciones Aleatorias . . . . .	253
A.1.1	Concepto de Vibración Aleatoria . . . . .	253
A.1.2	Proceso Aleatorio, Variable Aleatoria y Su Descripción Estadística .	254
A.1.3	Proceso Estacionario y Ergódico . . . . .	257
A.1.4	Autocorrelación y Densidad Espectral . . . . .	257
A.1.5	Procesos de Banda Estrecha y Banda Ancha . . . . .	259
A.1.6	Densidad Espectral de un Proceso Derivado . . . . .	259
A.1.7	Correlación y Densidad Espectral Cruzadas . . . . .	260
A.2	Análisis de Fourier . . . . .	260
A.2.1	Serie y Transformada de Fourier . . . . .	260
A.2.2	Convolución de Dos Funciones . . . . .	261
A.2.3	Transformada de Funciones Discretizadas . . . . .	262
A.2.4	Transformada Discreta de Fourier . . . . .	262
A.2.5	Transformada Rápida de Fourier . . . . .	264
A.3	Transmisión de Vibraciones Aleatorias . . . . .	267
A.3.1	Función de Respuesta en Frecuencia . . . . .	267
A.3.2	Relaciones Excitación–Respuesta para Procesos Aleatorios Estacionarios . . . . .	269
A.3.3	Respuesta de un Sistema de Varios Grados de Libertad. . . . .	269
<b>B</b>	<b>Engranajes</b>	<b>271</b>
B.1	Engranajes Paralelos . . . . .	271
B.1.1	Condición de Engrane, Perfiles Conjugados . . . . .	271
B.1.2	Perfil de Evolvente . . . . .	275
B.1.3	Limitaciones al Engrane de Dientes con Perfil de Evolvente . . . . .	280
B.1.4	Perfil de Cicloide . . . . .	281
B.1.5	Tallado de Engranajes con Perfil de Evolvente . . . . .	282
B.1.6	Engranajes Helicoidales . . . . .	285
B.1.7	Tallado de Ruedas Helicoidales . . . . .	287
B.2	Engranajes Concurrentes . . . . .	289
B.3	Engranajes Helicoidales Cruzados . . . . .	291
B.4	Trenes de Engranajes . . . . .	293
B.4.1	Trenes Ordinarios . . . . .	293
B.4.2	Trenes Epicicloidales . . . . .	295

<b>Bibliografía</b>	<b>297</b>
<b>Índice Alfabético</b>	<b>304</b>

# Capítulo 1

## Introducción Histórica

Los diseñadores industriales son de la opinión de que cualquier producto nuevo sufre una especie de evolución natural hasta que encuentra su propia forma. Esta idea puede ser más o menos cierta en cuanto al desarrollo “formal” de los productos, sin embargo, es totalmente incierta en cuanto al desarrollo técnico de los mismos. La evolución técnica es un proceso continuo y monótono (en el sentido matemático del término). Es muy difícil que se detenga y, en la mayoría de las ocasiones, se acelera exponencialmente.

El automóvil y el ferrocarril son ejemplos claros de lo anterior. Es posible que podamos considerar que la morfología básica de estos vehículos ha variado poco en los últimos cincuenta años. Incluso los principios de funcionamiento han permanecido inalterados. En efecto, los automóviles siguen haciendo uso de motores basados en el ciclo de Otto, los ferrocarriles mantienen la forma de guiado mediante ruedas cónicas con pestaña. Sin embargo, en ambos casos, el desarrollo mecánico y electrónico ha sido, y sigue siendo, espectacular. Es este desarrollo el que permite viajar sobre carriles de hierro a más de 300 km/h con absoluta comodidad y seguridad, o el que permite que automóviles de competición tracen curvas en las que la aceleración cetrípeta es cuatro veces la de la gravedad.

Aunque este texto se dedica al estudio de los vehículos de carretera, es conveniente hacer una introducción histórica que contemple todos los tipos de vehículos. Todos ellos compiten en el mercado del transporte de personas y mercancías. El resultado es un sistema multi-modal, complejo, en el que la distancia, la orografía, y el tipo de mercancía determinan el medio de transporte más adecuado.

### 1.1 Ferrocarril

El extraordinario éxito del ferrocarril se debe fundamentalmente a su forma de guiado y a la baja resistencia de rodadura entre rueda y carril. Si un vagón de mercancías de 36 toneladas se deja libre cuando viaja a 100 Km/h recorrerá 8 Km antes de detenerse. Por el contrario, un camión en las mismas condiciones sólo recorrería 1.6 Km. Esta característica hace del ferrocarril un medio de transporte muy económico. La potencia requerida para transportar una tonelada de carga útil es aproximadamente un caballo, mientras que en carretera esta potencia es del orden de 10 caballos por tonelada. La relación en consumo y productividad por empleado es también de diez a uno.

La baja resistencia de los carriles de hierro, junto con el hecho de que el guiado de

los vehículos viene dado por los propios carriles, son las dos características fundamentales del ferrocarril. Ésta última facilita considerablemente la automatización de este sistema de transporte, agilizando la organización y logística del tráfico ferroviario.

El ferrocarril, tal como lo conocemos hoy, se desarrolló en Inglaterra en el primer cuarto del siglo XIX. Sin embargo existen datos de que pequeños vagones guiados se utilizaban ya en el 1550 en minas de Europa central. En estos primeros vehículos guiados se encuentra que los chaflanes pueden estar tanto en la rueda (interiores o exteriores) como en el carril. En este último sistema el carril estaba formado por un perfil en ángulo. Las limitaciones en este caso están relacionadas con el diseño de sistemas para las intersecciones.

El desarrollo de la tracción mecánica para sustituir a la potencia animal fue el disparador que dio lugar a la extensión de los ferrocarriles en el mundo. El verdadero comienzo del ferrocarril en Inglaterra se produce en 1829 con la apertura de la línea de Liverpool y Manchester. Antes de abrir esta línea se hizo un concurso para decidir la locomotora más apropiada. Ganó la Rocket de George Stephenson, su superioridad se basaba en el uso de una caldera de múltiples tubos en lugar de las de tubo único. Las bases que permitieron construir esta locomotora las habían puesto tanto Watt (escocés) como Cugnot en Francia que construye una especie de carro a vapor (Fig. 1.1).

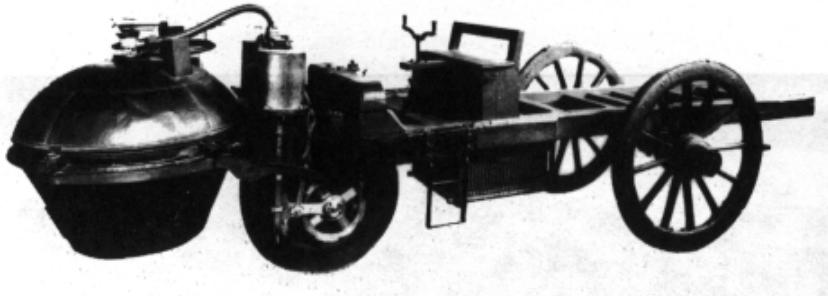


Figura 1.1: Carro a vapor de Cugnot.

Las primeras líneas se trazaron con el ancho de 1435 mm. En ocasiones se trató de cambiar a anchos mayores (existen razones tecnológicas que apoyan esta idea) sin embrago, debido a los problemas de compatibilidad entre las distintas compañías ferroviarias, el ancho de 1435 pasó a ser estándar, y todavía lo es en la mayor parte del mundo.

El primer ferrocarril español no se construyó en la Península sino en la colonia de Cuba. En el año 1836 se establece la línea de la Habana a Güines. Doce años más tarde se inaugura el tren de Barcelona a Mataró.

La utilización del ferrocarril supuso un salto de gigantes en el desarrollo social y económico de los países que lo adoptaban, en general, y de las ciudades por donde circulaba, en particular. Constituye el primer logro en la lucha por acortar los tiempos de transporte de mercancías y personas de un lugar a otro. Las industrias no tienen ya que colocarse a la ribera de un río, el ferrocarril es capaz de llevar sus productos a puntos lejanos y en menor tiempo.

El carril que conocemos hoy, de base plana y cabeza de rodadura, fue inventado por Charles Vignoles, un ingeniero Inglés, en 1830. El carril actual es en apariencia

muy similar, sin embargo, es el resultado de numerosos trabajos de investigación tanto metalúrgicos como de fabricación. El carril continuo soldado se empezó a usar en 1933 en USA, no fue sino hasta el 1950 que las distintas administraciones ferroviarias empezaron a usar este tipo de carriles con profusión.

La tracción animal dio paso a las locomotoras de vapor que, ahora, han sido totalmente sustituidas por máquinas diesel-eléctricas para líneas no electrificadas. Éstas son máquinas eléctricas que incluyen su propia planta de potencia. La potencia se ve reducida por esta razón, pero se eliminan las costosas inversiones necesarias para el uso de locomotoras eléctricas.

El desarrollo del ferrocarril ha estado basado en el desarrollo de los sistemas de tracción, en la mejora de las técnicas de construcción y tendido de las líneas, en la sofisticación de los estudios dinámicos y en la creciente automatización que no cesa y que está convirtiendo al ferrocarril en un sistema de transporte “informatizado”. Las líneas de ferrocarriles de alta velocidad (Fig 1.2) son prueba de que este medio de transporte no muere y de que puede aún aportar servicios nuevos de interés para ciertos sectores.



Figura 1.2: Tren de Alta Velocidad (España).

## 1.2 Automóvil

En 1760 un clérigo suizo, J.H. Genevois, sugirió la idea de montar molinos de viento sobre un carroaje con el fin de que la potencia suministrada por el molino se usara en enrollar muelles con los que mover el vehículo. Pese a estas primeras ideas sin trascendencia, Franceses e Ingleses están ahora de acuerdo en reconocer a Cugnot de Lorraine como el primer constructor de un automóvil a vapor en 1769. Autobuses a vapor circulaban por las calles de París alrededor del 1800. El mayor auge de la propulsión a vapor en “coaches” se produjo entre los años 1831 y 1838. Es curioso que uno de los pioneros de la máquina de vapor James Watt, se negara rotundamente al uso de su máquina para la propulsión de automóviles. Es cierto que la baja presión de su diseño hubiera resultado en un motor muy pesado y voluminoso para su aplicación en automoción.

Fueron Carl Benz y Gottlieb Daimler de Alemania los pioneros en el desarrollo de motores de gasolina. Sus primeros motores estaban en funcionamiento en 1885 y 1886, respectivamente. Estos motores estaban basados en el ciclo de cuatro tiempos. La pa-

ternidad de este ciclo parece corresponder a Alphonse B. de Rochas (1862), aunque el primero en construir un motor basado en este ciclo fue Nikolaus Otto.

El primer Benz dio unas cuantas vueltas alrededor del pequeño taller del ingeniero alemán ante el asombro de su patrocinador y de sus propios ayudantes. Las ventas del “triciclo” no fueron muy bollantes al principio, aunque para 1888 el coche se estaba vendiendo en números aceptables, la fábrica empleaba a 50 trabajadores. Por otra parte Daimler, que había estudiado ingeniería en Alemania, Inglaterra, Bélgica y Francia, diseñó un motor para ser adaptado a carrozajes ya existentes. Las dos empresas se unieron en 1926 y sus productos se venden ahora bajo la marca de Mercedes Benz. Los grandes de Francia en la época eran Peugeot y Renault. En Italia existían también fábricas de reputación aunque con menores producciones: Lancia, Alfa Romeo, Maserati y Ferrari. Isotta-Fraschini fundó FIAT (Fabbrica Italiana Automobili Torino) en 1899, esta fábrica habría de crecer extraordinariamente. En España tenía su sede la Hispano-Suiza bajo financiación española y la dirección del gran diseñador suizo Marc Birkigt.

El primer coche americano con éxito comercial es el coche de tres caballos de Olds (Oldsmobile) que comenzó a venderse en 1901. La firma vendió gran cantidad de automóviles y prosperó considerablemente. Esta prosperidad no fue exclusiva de la fábrica de Olds, entre el 1904 y el 1908, 241 firmas se dedicaban a la construcción de automóviles. Henry Ford revolucionó el mercado a través de su idea de convertir el coche en una necesidad suficientemente barata como para ser accesible a la mayoría, en lugar de un juguete caro de poca utilidad. En 1908 se ponía a la venta el popular “Model T” (Fig. 1.3).

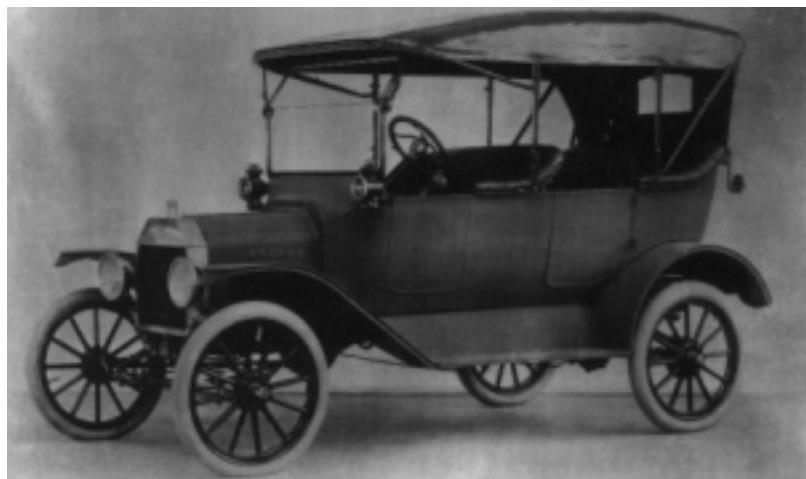


Figura 1.3: Modelo T de Ford.

El automóvil de hoy (Fig. 1.4) es una máquina muy compleja, tanto en lo que respecta a las innovaciones introducidas en la planta de potencia como en las que se refieren al soporte vehículo. Las prestaciones de los distintos tipos de motores han aumentado a la vez que el consumo de los mismos se ha reducido. Las características de manejo de las distintas monturas han sufrido una autentica revolución basada tanto en la experimentación como en la capacidad de predicción del comportamiento. El futuro del automóvil es difícil de pronosticar. Es muy posible que la reducción del poder contaminante de

los motores sea el factor que más influya en la evolución de los mismos (de momento es todavía el consumo el que los está cambiando). Coches eléctricos, mixtos (gasolina–eléctrico), nucleares o incluso de vapor (el hecho de que la combustión se pueda realizar de manera continua en un motor de vapor hace posible ajustarla de tal manera que la emisión de gases contaminantes no sea tan elevada como en los coches actuales) son algunas de las posibilidades.



Figura 1.4: Automóvil deportivo.

## 1.3 Otros Vehículos

Los vehículos terrestres (automóviles y ferrocarriles) no son los únicos que se han beneficiado del desarrollo de la ingeniería mecánica. También, los vehículos navales, aéreos y espaciales han sufrido un espectacular desarrollo en este siglo. Tanto es así, que su estudio se ha disgregado de la ingeniería mecánica dando lugar a disciplinas “hermanas” como son la Ingeniería Naval y la Aeronáutica. Se presenta aquí, no obstante, una breve introducción sobre su evolución histórica.

### 1.3.1 Vehículos Aéreos y Espaciales

La observación del vuelo de las aves ha excitado, desde antiguo, el deseo de volar en el hombre. Las primeras ideas para el vuelo son mera transcripción mecánica de lo observado en animales voladores. Así, Leonardo, en el periodo de 1486 a 1490 diseñó una serie de mecanismos (Fig. 1.5), los cuales, sabemos hoy, tenían pocas posibilidades de éxito. Las primeras conquistas del aire serían consecuencia de la invención del globo de aire caliente. En 1783 los hermanos Montgolfier pilotan un aerostato ante la admiración del público en París. Este acontecimiento, aunque no contribuye al vuelo con aparatos más pesados que el aire, ayuda a estimular el interés público en el vuelo. Los Aerostatos son pruebas indiscutibles de que se puede abandonar la tierra y volar por el aire.

La idea decisiva para el progreso de la aviación se debe a Sir George Cayley (1773–1857, Inglaterra). Cayley es la primera persona en proponer mecanismos separados para

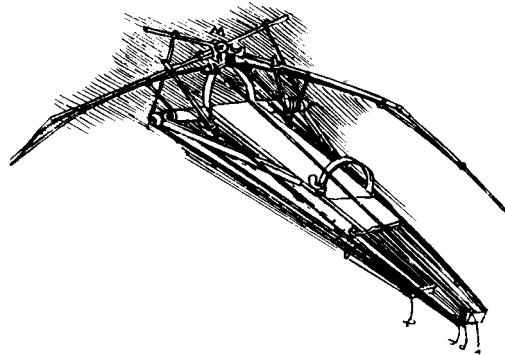


Figura 1.5: Máquina voladora de Leonardo.

tracción y sustentación. En el esquema que dejó grabado en un disco de plata (Fig. 1.6) se recogen todas las características de los aviones actuales. La tracción estaba en este caso proporcionada por remos. La sustentación se conseguía mediante un ala fija inclinada y con curvatura. En sus propias palabras: "... Para volar se necesita una superficie que soporte el peso. La resistencia generada por esta superficie se vence aplicando potencia al aire. ...". En el grabado (Fig. 1.6) puede verse la descomposición de las fuerzas sobre el avión en sustentación y arrastre. Cayley realizó numerosos estudios aerodinámicos e hizo volar un pequeño planeador. Fue el primero en sugerir el uso de multiplanos para paliar debilidades estructurales. Siguió publicando trabajos sobre aeronáutica hasta 1853. Puede decirse que Cayley es el inventor del avión que conocemos hoy en día.

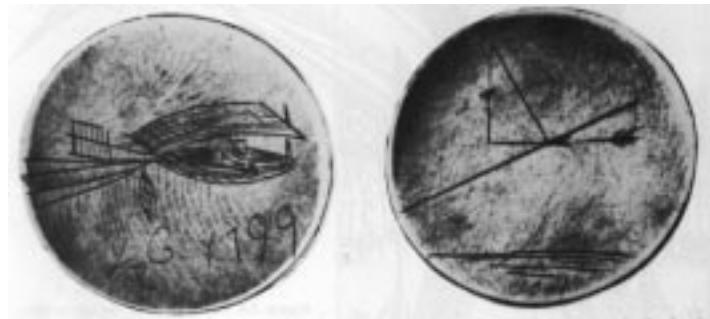


Figura 1.6: Esquema de avión de Cayley.

En los 50 años que siguieron a las publicaciones de Cayley se continuó investigando en aerodinámica e intentando el vuelo pilotado, sin embargo, no hubo logros de importancia salvo algunos saltos caracterizados por la falta de control sobre el aparato. No fue sino hasta 1891 que Otto Lilienthal (1848–1896), en Alemania, diseñara planeadores con los que saltar al aire y realizar cualquier tipo de vuelo controlado. Se le conoce como el hombre planeador (Fig. 1.7). Fue el pionero de la idea de que para aprender aerodinámica práctica es necesario saltar al aire y experimentarla por uno mismo (*Hombre del Aire*). Fue

un gigante de la aeronáutica que realizó más de 2500 vuelos controlados de planeadores, murió en el último de ellos.

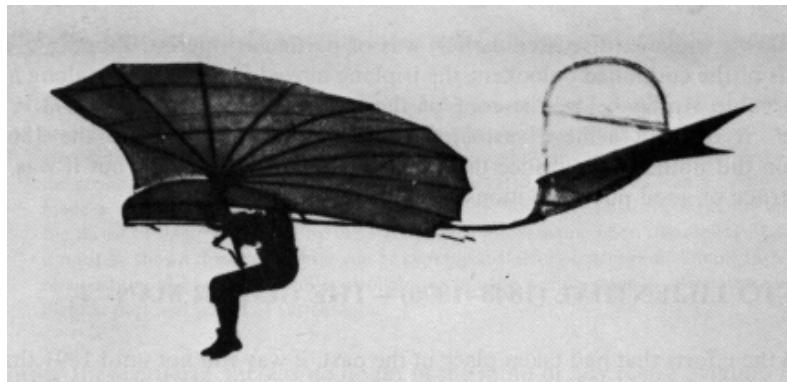


Figura 1.7: Planeador de Lilienthal.

Un emigrante francés en Estados Unidos, Octave Chanute (1832–1910), leyó y asimiló gran parte de los trabajos sobre aeronáutica publicados hasta 1890. Construyó un planeador biplano que inspiró el Wright Flyer I de los Wright (primer avión a motor capaz de volar de forma controlada). En 1894 publicó su libro titulado *Progress in Flying Machines* que sirvió de puente para transferir los conocimientos sobre aviación al continente americano. Los hermanos Wright leyeron el libro y desarrollaron una estrecha amistad con el autor. Entre tanto, Samuel P. Langley (1834–1906), secretario de la Institución Smithsonian, realiza extensos estudios en aerodinámica y consigue el primer vuelo a motor controlado en un modelo a escala. El motor a vapor es de su propio diseño. El Departamento de Guerra de los Estados Unidos encarga a Langley el diseño de un avión tripulado para su uso en la guerra contra España (guerra de Cuba). Langley diseña y construye un motor de gasolina de 52.4 cv y sólo 208 lb de peso. Una versión a escala 1/4 de su avión realizó un vuelo sostenido. La versión a escala real nunca llegó a remontarse.

Langley no era consciente de que los hermanos Wright habían llegado a conseguir una extraordinaria sofisticación en sus ensayos aerodinámicos y de que en poco tiempo, el 17 de Diciembre de 1903, Wilbur y Orville Wright (1867–1912, 1871–1948) iban a conseguir pilotar un avión en el primer vuelo a motor de la historia. Este vuelo va a revolucionar la vida en el siglo XX. Como buenos *Hombres del Aire* se dedicaron a adquirir experiencia en vuelos con planeadores antes de intentar el vuelo a motor. Estudiaron también el vuelo de los pájaros y concluyeron que éstos estabilizan su posición horizontal mediante una ligera torsión de los extremos de las alas. Hicieron experiencias sobre esta “torsión” dando lugar a una patente para ailerones como los que se encuentran en la gran mayoría de aviones en la actualidad para el control del movimiento de rotación en el eje longitudinal. Hasta 1901 los hermanos habían confiado en los datos aerodinámicos proporcionados por Lilienthal y Langley. Sin embargo, empezaron a sospechar que estos resultados no eran siempre muy fiables y se entregaron a la realización de ensayos en más de doscientos perfiles aerodinámicos. Para ello construyeron su propio túnel aerodinámico dotado de una balanza para medir sustentación y arrastre. Determinaron diagramas de presión precisos que les permitieron diseñar planeadores perfectamente controlables. También diseñaron

un compacto motor de gasolina y distintos perfiles para hélices. Con todos los problemas solucionados construyeron el Wright Flyer I (Fig. 1.8) que realizó el primer vuelo a motor de la historia. La prensa y el público en general permaneció escéptico y desinteresado.

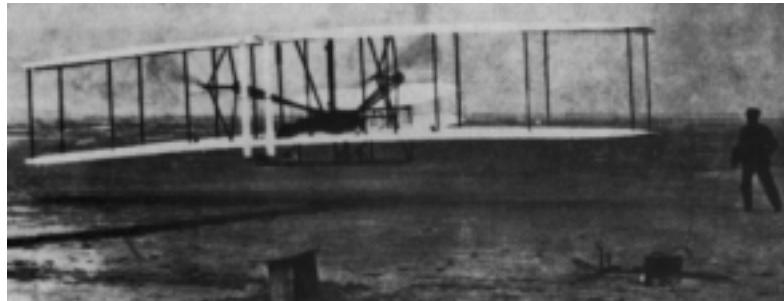


Figura 1.8: El Wright Flyer I.

En este orden de cosas no conseguían que el estado americano comprara su avión. Los hermanos no se detuvieron aquí. En 1908 habían ya diseñado un avión capaz de despegar y aterrizar repetidas veces, así como de efectuar complicadas maniobras en vuelo. Fue en este año que los Wright firmaron contratos con la U.S. Army y con una empresa francesa. La aeronáutica europea había estado hibernando todo este tiempo. Ahora, tras la demostración de Wilbur Wright, la aeronáutica europea emprendió un camino ascendente y pronto adelantaría en la carrera tecnológica a los Estados Unidos. La razón de este adelanto es que en Europa se apostó por el diseño de aviones estáticamente estables que requieren menor habilidad y concentración por parte del piloto. Los europeos diseñaron aviones que, aunque manejables, eran capaces de mantener el equilibrio por sí mismos. Es curioso que ahora, casi un siglo más tarde, se vuelve al diseño de aviones inestables que son controlados constantemente por microprocesadores sin necesidad de sobrecargar la concentración de los pilotos.

A partir de estas fechas existe un verdadera explosión en el desarrollo de la aviación. Las investigaciones necesarias, a veces muy costosas, requieren de la financiación pública. Así, en 1910 la *Royal Aircraft Factory* está en operación en Inglaterra. En 1915 se crea en Estados Unidos el *National Advisory Committee for Aeronautics* (NACA), que pasaría luego a llamarse *National Aeronautics and Space Administration* (NASA), después de que la astronáutica americana recibiera el zarpazo del lanzamiento del Sputnik soviético (1957).

La utilización de un sistema adecuado de propulsión fue decisivo para el éxito de la aviación a motor, la máquina de vapor no cumplía los requisitos. Cuando los hermanos Wright construyeron sus primeros aviones, la investigación en motores alternativos estaba madura para su utilización en aeronáutica. Ya en 1865 N.A. Otto había desarrollado el motor de cuatro tiempos usando gas como combustible. Gottlieb Daimler y Carl Benz, independientemente, adaptan y desarrollan este tipo de motor para su uso en automóviles usando la gasolina como combustible.

Sólo 44 años después del famoso vuelo de Orville Wright, un ser humano pilotaba un avión que habría de volar a velocidades superiores a las del sonido. Las bases para este vuelo las habían dado Mach, en 1887, logrando fotografiar las ondas de choque en una

bala a velocidad supersónica, y los estudios de Prandtl sobre efectos de compresibilidad en gases. Los motores de reacción fueron inventados y desarrollados por Frank Whittle (1907– ) e independientemente por von Ohain, en Alemania, cuyo motor fue el primero en volar.

Por otra parte, los motores cohete constituyen el elemento esencial de los vehículos espaciales. El desarrollo de motores cohete se remonta a los trabajos de Goddard (1882– ) que en Worcester (Massachusetts, 1926) hizo volar un pequeño cohete de 10 pies que combinaba  $H_2$  y  $O_2$  líquidos. Estos trabajos sirvieron para que Von Braun en Alemania diseñara las famosas V2 utilizadas en la segunda guerra mundial. Ambos cohetes son predecesores de las naves espaciales de la actualidad.

### 1.3.2 Vehículos Navales

La construcción de buques es en la actualidad una ingeniería madura basada en conocimientos científicos. En los días de la navegación a vela esta disciplina estaba basada fundamentalmente en la experiencia. Con el gran desarrollo de las ciencias físicas al comienzo del siglo XIX fue inevitable que los estudios de hidrostática, hidrodinámica, materiales y estructuras influyeran en la mejora de la construcción de naves.

El uso de botes para el desplazamiento por ríos y mares data de la antigüedad más remota. Excavaciones en Creta han encontrado artefactos navales que se remontan al 5000 a.c. Es probable que el hombre primitivo usara troncos de árbol para la construcción de balsas o canoas de tronco hueco. Más tarde, el uso de remos incrementaría la utilidad de estos vehículos haciéndolos más versátiles. Mucho más tarde llegó el aprovechamiento de los vientos mediante velas, comienza así una evolución ascendente que aún continua y que está reflejada en los impresionantes petroleros o en los grandes portaviones nucleares.

Los mayores buques romanos medían alrededor de 30 metros de largo y estaban construidos con placas de roble entre costillas muy próximas entre sí. Los árabes y vikingos introdujeron ciertas mejoras en la construcción de naves. Este progreso continuó durante la edad media, con considerables mejoras en el diseño y uso de velas. Una revolución más profunda siguió a la sustitución de las velas por máquinas de vapor y de la madera por hierro y luego acero. La potencia generada por el vapor se transmitiría primero a ruedas laterales y, más tarde, a hélices. El primer buque impulsado por hélice se puso en servicio alrededor de 1839. El motor alternativo de vapor dio paso a la turbina de vapor a principios de siglo XX.



## Capítulo 2

# Sistema de Dirección

El sistema que permite a un automóvil modificar su trayectoria es el mecanismo de la dirección. Éste es, probablemente, el sistema más característico del automóvil, el que lo diferencia de otros vehículos de tierra como el ferrocarril. En este tema se describen los distintos mecanismos que permiten la transmisión de fuerzas desde el volante a los neumáticos.

Hasta comienzos del siglo pasado los vehículos de cuatro ruedas se direccionaban haciendo girar todo el eje delantero. Éste se unía al chasis mediante un pivote central que permitía el giro relativo. El sistema funcionaba razonablemente bien en el caso de coches remolcados por animales, pues éstos mismos se encargaban de hacer girar el eje. Cuando la máquina de vapor se introdujo como medio de tracción, se pusieron de manifiesto los inconvenientes del sistema. El principal de ellos es el enorme volumen barrido por el eje en su recorrido. Esto impide la construcción de vehículos compactos.

Aunque anteriormente se habían realizado algunos inventos para direccionar ruedas con pivotes independientes, no fue hasta el nacimiento de la tracción mecánica que se hicieron las primeras patentes de interés. George Lankensperger (Alemania) inventó un sistema en el que las dos ruedas giraban entorno a pivotes independientes. Las ruedas estaban acopladas mediante una barra colocada delante del eje, a la cual se podía unir el tiro de los caballos en el caso de tracción animal. El sistema fue patentado en Inglaterra por un amigo de Lankensperger, Rudolph Ackerman, en 1818, y desde entonces se conoce como el cuadrilátero de Ackerman.

En los primeros carroajes la dirección estaba gobernada por un timón al estilo del utilizado en barcos. Este sistema fue rápidamente sustituido por un volante que, a través de una caja reductora permitía posicionar el mecanismo de la dirección. Las primeras reductoras utilizadas fueron las de tornillo sinfin. Este tipo de cajas se sigue utilizando con profusión. Más tarde, en 1932, Adler en Alemania comenzó a usar el sistema de piñón y cremallera en vehículos de suspensión (delantera) independiente. Esta reductora es muy común en vehículos ligeros.

### 2.1 Mecanismo de Ackerman

Si se pretende que todas las ruedas de un vehículo, en curva, estén sometidas a un movimiento de rodadura puro, sin deslizamiento, es necesario que las perpendiculares a las ruedas del automóvil converjan en un único centro instantáneo de rotación. De lo con-

trario, la rodadura pura de una rueda rígida no es posible. En el caso de neumáticos de goma (cuerpos deformables) se puede acomodar un cierto ángulo de divergencia (respecto de la dirección diametral) sin dar lugar al deslizamiento global de la rueda. Este ángulo es el ángulo de deriva del neumático. Sin embargo, la aparición de este ángulo en maniobras a baja velocidad da lugar a desgastes innecesarios. Para reducirlo se dispone de un mecanismo que, aproximadamente, mantiene las ruedas en rodadura pura.

Un mecanismo capaz de conseguir lo anterior con bastante exactitud es el cuadrilátero de Ackerman (Fig. 2.1). La condición geométrica que se exige al mecanismo se obtiene de la Figura 2.2. Los ángulos girados por la rueda izquierda y derecha son, respectivamente:

$$\cot b = \frac{O_1 E}{L} \quad \cot b_1 = \frac{O_1 E'}{L}$$

con lo que la relación que liga el ángulo derecho con el izquierdo es:

$$\cot b - \cot b_1 = \frac{V}{L} \quad (2.1)$$

Es fácil comprobar que esto equivale a que las rectas que forman ángulos  $b$  y  $b_1$  con la horizontal se encuentren sobre la linea que une los puntos  $H$  y  $E'$  (Fig. 2.3).



Figura 2.1: Mecanismo de Ackerman.

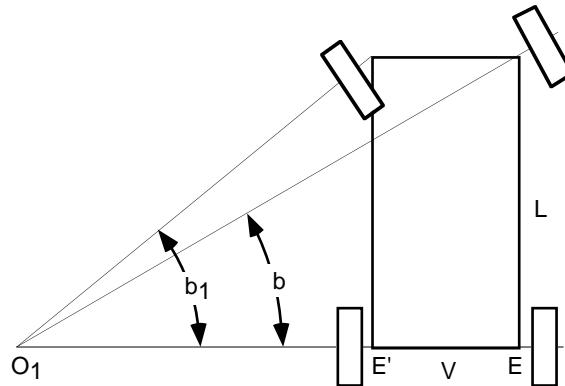


Figura 2.2: Condición geométrica que debe cumplir el mecanismo de la dirección.

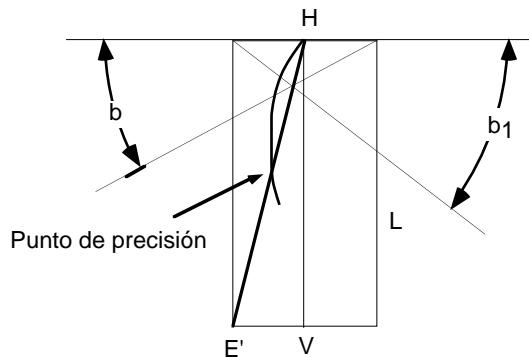


Figura 2.3: Línea de error y punto de precisión del mecanismo de la dirección.

Las ruedas directrices deben estar conectadas por un mecanismo capaz de generar la Función 2.1, esto es, un mecanismo que mantenga los ángulos girados por las dos ruedas en la relación dada por dicha ecuación. Esto se puede conseguir con muchas configuraciones distintas. Una de las más simples es la que hace uso de un mecanismo de cuatro barras para conectar los ejes de las articulaciones de las dos ruedas directrices. El mecanismo resultante se conoce como cuadrilátero de Ackerman.

Para definir el cuadrilátero completamente es necesario asignar valores a dos parámetros: la longitud de las manivelas (que deben ser iguales por la condición de simetría), y la longitud de la biela de conexión. Esto quiere decir que el mecanismo se puede diseñar con dos puntos de precisión. Sin embargo, cuando se imponen estos dos puntos sobre la ecuación de cierre de Freudenstein, se obtienen barras de dimensiones no factibles para su aplicación en automoción. Se suele entonces diseñar con un solo punto de precisión, y jugar con el valor del parámetro que queda libre para intentar minimizar el error en la generación de la relación 2.1. La función real (generada por el cuadrilátero) se puede comparar geométricamente con la ideal representando la intersección de la perpendicular a la rueda derecha con la paralela a la rueda izquierda (Fig. 2.3). La desviación respecto de la diagonal  $HE'$  representa el error.

Una receta, usada en el pasado para simplificar el diseño del cuadrilátero, es situar la manivela sobre la linea que une el centro de giro de la rueda con el punto medio del eje trasero. Los mecanismos resultantes cumplen, aproximadamente, la relación de ángulos.

En el caso de camiones con varios ejes direccionales, se unen ambos ejes mediante un cuadrilátero de las mismas características que el descrito anteriormente. En el caso de vehículos ligeros se suelen usar otros mecanismos que facilitan la utilización de reductoras simples como la de piñón y cremallera. Para este caso, es usual disponer de un montaje de cinco barras en el que la biela central (en donde se talla la cremallera) se une al chasis mediante un par deslizante.

## 2.2 Ángulos de la Dirección

En la Figura 2.4 se muestra un esquema de la sección de una rueda delantera de automóvil. Se observa que, tanto la rueda como el eje de la articulación, están montados formando

ángulo con los ejes del vehículo (longitudinal  $x$ , lateral  $y$ , y vertical  $z$ ). La denominación de estos ángulos y una explicación intuitiva del porqué de su utilización se presentan en este apartado.

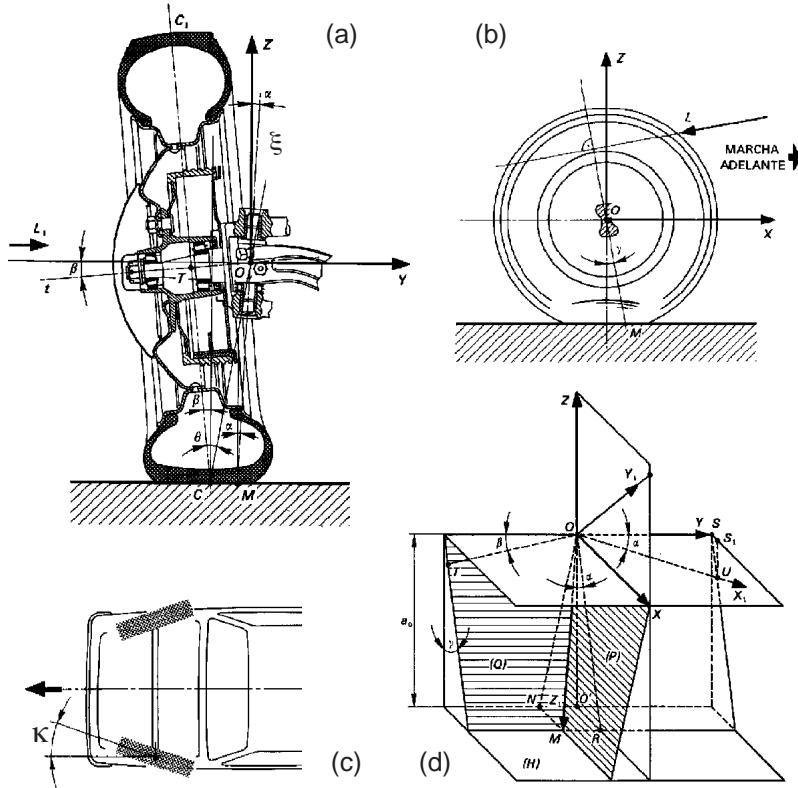


Figura 2.4: Definición de los ángulos de la dirección.

El ángulo que forma el eje de la articulación (eje  $\xi$ ) con la proyección sobre su plano (plano  $\xi y$ ) del eje  $z$  se denomina “Ángulo de Inclinación o de salida”  $\alpha$ . En este mismo plano, el ángulo que forma el eje de la mangueta con el eje transversal  $y$ , se denomina “Ángulo de Caída de la Rueda”  $\beta$ . El ángulo que forma la proyección sobre  $xz$  del eje  $\xi$  con el eje vertical  $z$  se denomina “Ángulo de Avance”  $\gamma$ . En el plano horizontal, el ángulo que forma la proyección del plano medio de la rueda con el eje longitudinal  $x$  se conoce como “Ángulo de Convergencia”  $\kappa$  o, simplemente, convergencia.

Los puntos singulares marcados en la Figura 2.4 son el punto  $T$ , que coincide con el centro de la rueda. El punto  $O$ , intersección del eje de la mangueta con el de la articulación. El punto  $C$ , de contacto de la rueda, considerada como un disco contenido en su plano medio, con el suelo. Y el punto  $M$ , intersección del eje de la articulación con el suelo. A la distancia  $CM$  se suele referir como “pisada”.

No existe unanimidad sobre la manera de definir los ángulos anteriores. En algunos textos se toman como valores de los ángulos sus proyecciones sobre los planos coordinados (Fig. 2.5). Ésta suele ser la convención usada por los fabricantes de automóviles. La razón es que estos valores pueden controlarse y corregirse fácilmente en los talleres. Evidentemente, el paso de uno a otro juego de ángulos es trivial. Se puede también definir

un tercer conjunto de ángulos que simplifica el tratamiento analítico de la cinemática y dinámica de la dirección como se verá en el apartado siguiente.

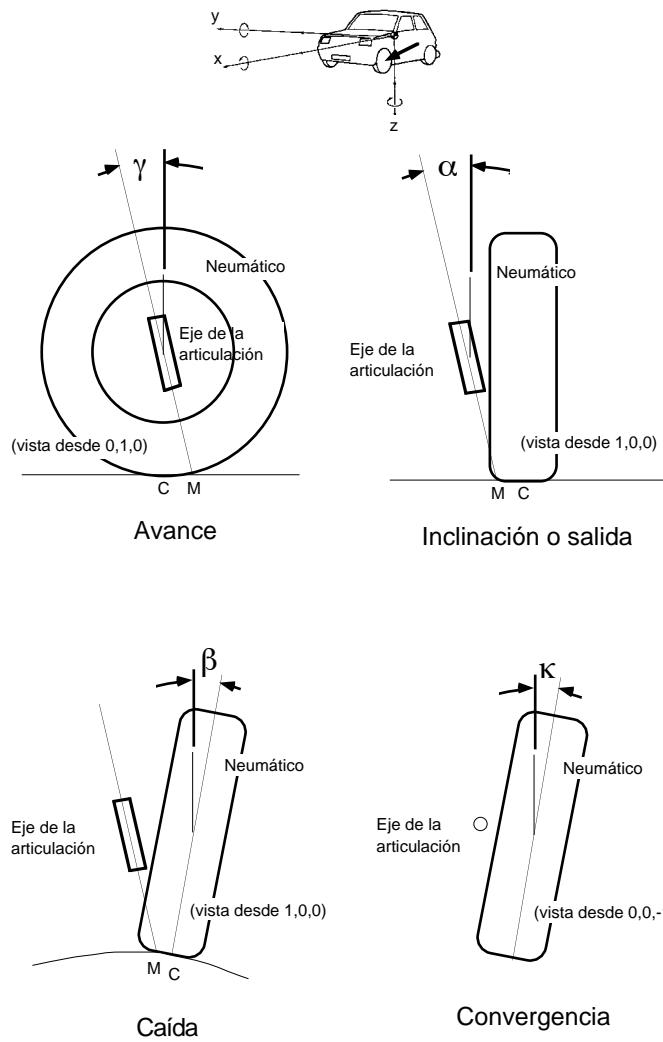


Figura 2.5: Definición de los ángulos de la dirección mediante sus proyecciones sobre los planos coordinados.

La justificación intuitiva de la utilización de estos ángulos es como sigue. Para hacer la dirección estable, en el mismo sentido en que lo son las ruedas locas de carrito, el punto  $M$  debe estar adelantado respecto del  $C$ . En este caso, la rueda girada tiende a alinearse con la dirección de marcha del vehículo. En efecto, una rueda cuya dirección esté perturbada respecto de la dirección de la velocidad está forzada a acomodar un cierto ángulo de deriva (ver Sección 3.1.2) que se traduce en una fuerza lateral como la representada en la Fig. 2.6. La fuerza lateral ( $F_y$ , Fig. 2.6) actúa en el punto geométrico de contacto ( $C$ ), y produce un momento rectificador respecto del punto  $M$  (eje de la articulación):

$$M_z \approx F_y \overline{CM} = C_\alpha \alpha \overline{CM}$$

donde  $M_z$  es el momento rectificador,  $F_y$  la fuerza lateral en la rueda,  $C_\alpha$  y  $\alpha$  son la rigidez a deriva y el ángulo de deriva, respectivamente y, por último,  $\overline{CM}$  es una aproximación del brazo con el que actúa la fuerza, medido sobre el plano horizontal (el brazo real es la distancia entre el punto  $C$  y el eje de la articulación).

Por tanto, las ruedas delanteras deben ser mantenidas en la posición girada mediante la aplicación de una fuerza sobre el volante. Cuando se ha terminado de negociar la curva o de doblar la esquina, se puede soltar el volante y el par rectificador devolverá las ruedas a la posición longitudinal.

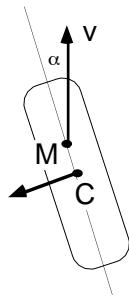


Figura 2.6: Momento autoalineante debido al ángulo de avance.

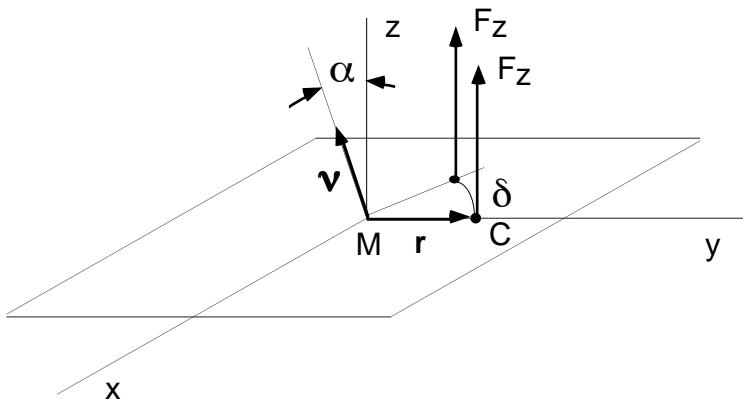


Figura 2.7: Momento autoalineante debido al ángulo de salida.

El avance (de  $0^\circ$  a  $5^\circ$ ) no debe ser exagerado para no endurecer excesivamente la dirección. El ángulo de avance no es el único que contribuye a la estabilidad longitudinal de las ruedas. En efecto, el ángulo de inclinación consigue los mismos efectos a la vez que permite reducir la pisada y hacer la dirección más suave. De hecho, en muchos vehículos, especialmente en camiones, se utilizan ángulos de inclinación grandes y ángulos de avance moderados.

La manera en que el ángulo  $\alpha$  contribuye a la estabilidad longitudinal podrá determinarse analíticamente con el álgebra que se presenta en el apartado siguiente. De forma intuitiva, se puede argumentar que este ángulo hace que las ruedas giren alrededor del eje

describiendo un cilindro cuyo eje está inclinado respecto de la vertical. Esta inclinación hace que el vehículo se levante al girar las ruedas y que, por tanto, la dirección estable sea la longitudinal. De otra manera, supongamos una rueda cuya articulación tiene un avance nulo y un ángulo de inclinación (salida) no nulo. El momento de la fuerza vertical (peso) respecto del eje de la articulación es nulo cuando la rueda está en posición longitudinal, pero es distinto de cero y auto-alineante cuando la rueda está girada en cualquier sentido.

En la Figura ?? se muestra un esquema simplificado en el que sólo existe carga vertical ( $F_z$ ), y el único ángulo presente es el de salida. En este caso, el momento de  $F_z$  respecto del eje de la articulación (con vector unitario  $\nu$ ) es:

$$M_\nu = \nu \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{F})$$

De la Figura 2.7b se tiene:

$$\nu = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} -r \sin \delta \\ r \cos \delta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

siendo  $\delta$  el ángulo girado por la rueda. Con esto se tiene:

$$M_\nu = -rF_z \sin \delta \sin \alpha$$

Cuando  $\delta$  es positivo (sentido de la figura),  $M_\nu$  es negativo (sentido contrario a  $\nu$ ) y tiende a posicionar la rueda en sentido longitudinal. Cuando  $\delta$  es negativo,  $M_\nu$  es positivo y, de nuevo, tiende a devolver la rueda a su posición longitudinal.

El ángulo de caída de las ruedas permite que el apoyo de éstas sobre la carretera sea normal a la superficie de la misma (Fig. 2.5). En efecto, las carreteras se diseñan con una cierta curvatura transversal para permitir la evacuación de aguas. Por tanto, las ruedas verticales apoyan con un cierto ángulo relativo que produce el desgaste asimétrico de los neumáticos. Los nuevos pavimentos porosos necesitan de menores curvaturas, de ahí que los ángulos de caída utilizados en la actualidad sean muy pequeños ( $1^\circ$ – $2^\circ$ ). También se utiliza un ángulo  $\beta \neq 0$  para reducir la pisada sin necesidad de aumentar excesivamente el ángulo de inclinación.

Cuando una rueda gira por una superficie formando un determinado ángulo (que llamaremos de caída) con la misma, se generan fuerzas laterales del mismo tipo que las comentadas para el ángulo de deriva (ver la Sección 3.3.3, y el Capítulo 8). Esta propiedad se utiliza en los automóviles de competición para mejorar los tiempos de respuesta ante señales de la dirección. En este caso, los neumáticos delanteros se montan con ángulos de caída negativos (caídos hacia el interior del vehículo). Por tanto, los neumáticos están generando fuerzas laterales que, en recta, son iguales y de sentido contrario. Pero para negociar una curva no es necesario esperar a que se generen fuerzas laterales debidas al ángulo de deriva, sino que basta con desequilibrar las fuerzas provocadas por los ángulos de caída ya existentes.

La convergencia hacia adelante se monta en ruedas delanteras no motrices para acomodar la elasticidad de los miembros de la dirección en condiciones normales de marcha. Es decir, cuando están sometidos a la carga correspondiente a la resistencia a la rodadura (Fig. ??) que genera un momento  $M_z \approx \rho F_z \overline{CM'}$  (siendo  $\rho$  el coeficiente de resistencia a la rodadura).

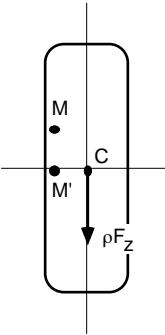


Figura 2.8: Momento en la articulación debido a la fuerza de resistencia a la rodadura.

En el caso de ruedas motrices, las fuerzas habituales son en sentido contrario, es decir, son fuerzas de tracción en el sentido de la marcha. De manera que en este caso las ruedas se montan con un determinado ángulo de divergencia.

El eje de la dirección en motocicletas suele estar por encima del neumático, permitiendo su colocación en el plano meridional de la rueda. El único ángulo existente es el de avance. Además, el eje de la articulación no suele intersectar al de la rueda, de manera que el avance total no es tan grande como cabría esperar por los grandes ángulos de avance utilizados (Fig. 2.9).

Los sistemas tradicionales de suspensión de motocicletas hacen variar el ángulo de avance cuando se contraen o extienden los muelles delanteros. Esto produce efectos no deseados cuando la moto traza una curva y, a la vez, se solicita la suspensión. Uno de los efectos más interesantes es el de “levantamiento” del vehículo cuando se frena en curva. La moto cabecea al frenar, se contraen los muelles delanteros y se reduce el avance. El conductor está resistiendo un momento rectificador en el manillar que disminuye repentinamente. La rueda delantera se gira hacia el interior de la curva haciendo que la moto describa una nueva trayectoria en donde la aceleración lateral es mayor. La motocicleta se “levanta”, disminuye el ángulo que forma con la vertical.

## 2.3 Fuerzas y Momentos en la Rueda

### 2.3.1 Sistemas de Referencia

En esta sección se define un nuevo juego de ángulos de inclinación, avance, y caída que facilita la manipulación y transformación de fuerzas y momentos. Estos valores no son sino los ángulos de Euler para definir la posición de la articulación y la rueda. El ángulo de convergencia puede despreciarse puesto que, como se ha comentado, se introduce para que se anule en las condiciones normales de marcha. En situaciones distintas de las de diseño, en las que este ángulo no se anula, se estará cometiendo un pequeño error al despreciarlo.

Sean tres sistemas de referencia con origen en el punto  $O_d$  (Fig. 2.10), punto de intersección entre el eje de la articulación y el de la rueda. El sistema  $S_0$  se define con el eje  $Z_0$  en la dirección vertical ascendente, el  $X_0$  horizontal y dirigido según el eje longitudinal del vehículo en la dirección de la marcha y, por último, el eje  $Y_0$  completa un

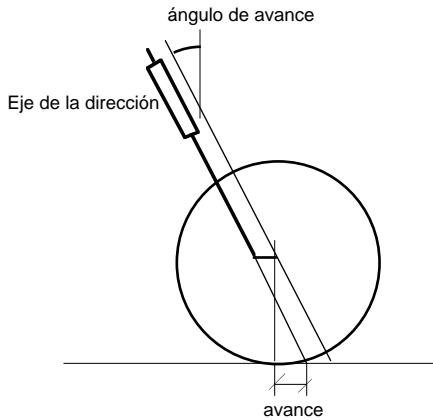


Figura 2.9: Definición de avance de la dirección en un vehículo de dos ruedas.

sistema cartesiano destrógiro. Los otros tres sistemas de la Figura 2.10 se definen como sigue:

$S_1$  es el resultado de girar  $S_0$  alrededor de  $X_0$  un ángulo  $-\alpha$  ( $\alpha$  es el ángulo de inclinación o salida).

$S_2$  es el resultado de girar  $S_1$  alrededor de  $Y_1$  un ángulo  $-\gamma$  ( $\gamma$  es el ángulo de avance).

$S_3$  es el resultado de girar  $S_2$  alrededor de  $Z_2$  un ángulo  $\delta_d$  ( $\delta_d$  es el ángulo girado por la rueda derecha en una maniobra).

Lo anterior constituye una nueva definición de los ángulos de salida y avance. Como se ha comentado, los ángulos definidos en el apartado anterior están directamente relacionados con éstos.

Los mismos sistemas se pueden definir para la rueda izquierda. Sin embargo, para que los ángulos de la rueda izquierda fueran iguales que los dados arriba, habría que definir sistemas simétricos respecto de los anteriores, lo que conduciría a ejes levógiros. Operaciones tales como el producto vectorial deben ser modificadas ligeramente para sistemas levógiros, lo cual puede constituir una fuente de errores. Es preferible definir un nuevo juego de sistemas con ángulos de Euler distintos. Para la rueda izquierda se tiene:

$S_0$  se define igual que para la rueda derecha con centro en  $O_i$ .

$S_1$  es el resultado de girar  $S_0$  alrededor de  $X_0$  un ángulo  $\alpha$ .

$S_2$  es el resultado de girar  $S_1$  alrededor de  $Y_1$  un ángulo  $-\gamma$ .

$S_3$  es el resultado de girar  $S_2$  alrededor de  $Z_2$  un ángulo  $\delta_i$  ( $\delta_i$  es el ángulo girado por la rueda izquierda en una maniobra. La relación de Ackerman lo hace distinto de  $\delta_d$ ).

Expresando la condición de que la magnitud del vector  $O_dC$  permanece constante al girar la rueda, se puede determinar la altura del punto  $O_d$  (y  $O_i$ ) respecto del suelo. La diferencia de alturas entre los puntos  $O_d$  y  $O_i$  representa la inclinación del eje delantero

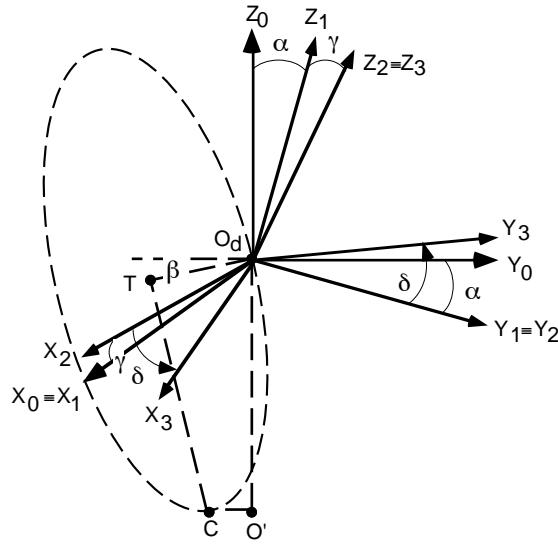


Figura 2.10: Sistemas de referencia para la rueda derecha.

durante el giro de la dirección. Esta diferencia puede llegar a tomar valores entorno a  $10\text{mm}$  pero, en general, se puede despreciar el giro de los sistemas de referencia provocado por esta inclinación.

### 2.3.2 Acciones en el Contacto Rueda–Carretera

En la región de contacto entre el neumático y la carretera se desarrolla una distribución de presiones normales y de tensiones tangenciales que equilibran la inercia del vehículo y las fuerzas aerodinámicas sobre el mismo. La integral de estas distribuciones se puede reducir al punto de contacto geométrico (punto  $C$ , Fig. 2.11) como un fuerza de componentes  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ , y un momento de componentes  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

El valor de estas resultantes se puede obtener del equilibrio global del vehículo. De hecho, en otros apartados se dan expresiones analíticas para algunas componentes. En efecto, la fuerza  $F_y$  se obtiene en el Apartado 3.2 mediante el equilibrio horizontal isostático entre los dos ejes. La fuerza  $F_z$  es la carga vertical sobre cada rueda teniendo en cuenta la transferencia de carga (Apartado 3.3.2). La fuerza  $F_x$  es la combinación de la resistencia a la rodadura ( $\rho F_z$ , con  $\rho$  el coeficiente de resistencia a la rodadura), y las fuerzas de tracción o frenado. La distribución de presiones puede no ser simétrica respecto del plano medio de la rueda y dar lugar a un momento de vuelco  $M_x$ , aunque éste puede, en general, despreciarse. Se conservará en las expresiones generales puesto que no introduce mayor complicación. El momento  $M_y$  es consecuencia directa de la resistencia a la rodadura. Aparece al desplazar la resultante de presiones verticales hasta el punto  $C$ . Su valor viene dado por  $\rho F_z R$  (ver el Capítulo 8).

La última componente del momento ( $M_z$ ) es fácil de determinar con el vehículo parado. En este caso, se puede admitir que toda la región de contacto está friccionando con una tensión tangencial igual a  $\mu p$ , con  $p$  la presión normal que se puede suponer constante. La obtención del momento de esta distribución respecto del punto  $C$  es trivial.

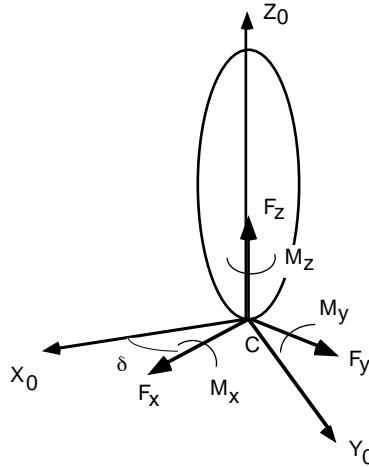


Figura 2.11: Acciones en el contacto rueda–carretera.

Cuando el neumático está rodando se puede efectuar el giro de la rueda sin que toda la región de contacto sea de deslizamiento. La aproximación anterior no es aceptable. De hecho, el valor de  $M_z$  es mucho menor en este caso, y de ahí que la dirección esté más suave cuando el vehículo está en movimiento que cuando está parado. En el Capítulo 8 se da una gráfica con los valores de este momento para distintas combinaciones de ángulo de deriva (y de caída) y carga vertical. En primera aproximación se puede despreciar el valor de  $M_z$  para vehículo en movimiento.

### 2.3.3 Momentos en los Ejes de las Articulaciones

La fuerza y momento anteriores están expresados en un sistema de referencia horizontal que forma un ángulo aproximadamente igual a  $\delta_d$  con  $S_0$  (Fig. 2.11). La fuerza y momento en  $S_0$  vienen dados por:

$$\mathbf{F}_o^d = \begin{Bmatrix} F_x^d \cos \delta_d - F_y^d \sin \delta_d \\ F_x^d \sin \delta_d + F_y^d \cos \delta_d \\ F_z^d \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M}_o^d = \begin{Bmatrix} M_x^d \cos \delta_d - M_y^d \sin \delta_d \\ M_x^d \sin \delta_d + M_y^d \cos \delta_d \\ M_z^d \end{Bmatrix}$$

donde el (sub) superíndice  $d$  hace referencia a la rueda derecha, el subíndice 0 indica que los vectores están referidos al sistema  $S_0$ . Las fuerzas y momentos son los definidos en el apartado anterior.

Análogamente, para la rueda izquierda se tiene:

$$\mathbf{F}_o^i = \begin{Bmatrix} F_x^i \cos \delta_i - F_y^i \sin \delta_i \\ F_x^i \sin \delta_i + F_y^i \cos \delta_i \\ F_z^i \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M}_o^i = \begin{Bmatrix} M_x^i \cos \delta_i - M_y^i \sin \delta_i \\ M_x^i \sin \delta_i + M_y^i \cos \delta_i \\ M_z^i \end{Bmatrix}$$

Estas resultantes se pueden expresar en cualquiera de los sistemas de referencia definidos anteriormente. Para ello basta con premultiplicar los vectores por las matrices de giro correspondientes.

Ahora es fácil obtener los momentos sobre los ejes de cada articulación (derecha:  $\mathbf{M}_d$ , e izquierda:  $\mathbf{M}_i$ ). Éstos determinan la dureza de la dirección y, por tanto, su tendencia auto-alineante. También permiten el diseño resistente de los distintos elementos del mecanismo de accionamiento. Los momentos vienen dados por:

$$\mathbf{M}_d = (\zeta_3^d \wedge \mathbf{F}_3^d + \mathbf{M}_3^d) \cdot \mathbf{u}_{3z}^d \quad \mathbf{M}_i = (\zeta_3^i \wedge \mathbf{F}_3^i + \mathbf{M}_3^i) \cdot \mathbf{u}_{3z}^i \quad (2.2)$$

donde el vector  $\zeta_3^d$  ( $\zeta_3^i$ ) tiene origen en el punto  $O_d$  ( $O_i$ ) y extremo en  $C_d$  ( $C_i$ ), el subíndice 3 hace referencia al sistema  $S_3$ , y los vectores  $\mathbf{u}_{3z}$  son los vectores unitarios en la dirección  $Z_3$ .

Las coordenadas del punto  $C_d$  ( $C_i$ ) son fijas y conocidas en el sistema  $S_3$ :

$$\zeta_3^d = \begin{Bmatrix} a_d \\ b_d \\ c_d \end{Bmatrix} \quad \zeta_3^i = \begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix}$$

y las fuerzas y momentos se pueden expresar en este sistema haciendo uso de las matrices de giro:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_3^d &= \mathbf{R}_{\delta_d, z} \mathbf{R}_{-\gamma, y} \mathbf{R}_{-\alpha, x} \mathbf{F}_0^d & \mathbf{M}_3^d &= \mathbf{R}_{\delta_d, z} \mathbf{R}_{-\gamma, y} \mathbf{R}_{-\alpha, x} \mathbf{M}_0^d \\ \mathbf{F}_3^i &= \mathbf{R}_{\delta_i, z} \mathbf{R}_{-\gamma, y} \mathbf{R}_{\alpha, x} \mathbf{F}_0^i & \mathbf{M}_3^i &= \mathbf{R}_{\delta_i, z} \mathbf{R}_{-\gamma, y} \mathbf{R}_{\alpha, x} \mathbf{M}_0^i \end{aligned}$$

donde las matrices  $\mathbf{R}_{\xi, u}$  son las correspondientes matrices de rotación alrededor del eje  $u$  ( $u = x, y, z$ ) con un ángulo  $\xi$ .

Para obtener las expresiones de los momentos en los ejes de las articulaciones basta sustituir las fórmulas dadas arriba en las expresiones 2.2. La suma de  $M_d$  y  $M_i$  debe ser resistida desde el volante con la correspondiente desmultiplicación de la caja reductora y la timonería de accionamiento.

En la Figura 2.12 se muestran los valores obtenidos para un camión de dos ejes y 25Tn ( $\alpha = 4.5^\circ$ ,  $\beta = 1.5^\circ$ ,  $\gamma = 2.0^\circ$ ,  $\kappa = 0.0^\circ$ ), éstos se dan en función del ángulo girado por la rueda derecha para distintos valores de velocidad. Con el vehículo parado, los momentos son grandes y del mismo signo, la dirección está dura en este caso. Cuando el vehículo se pone en movimiento, los valores del momento se reducen considerablemente. Si el giro de las ruedas es nulo, los momentos tienen igual magnitud y sentidos contrarios, luego no es necesario ejercer fuerza sobre el volante para mantener el vehículo en linea recta. Para un giro no nulo de las ruedas la suma de los momentos es un valor negativo auto-alineante que crece con la velocidad (la dirección se endurece con la velocidad).

## 2.4 Shimmy

El ángulo de avance en las ruedas direccionalables de vehículos confiere estabilidad desde el punto de vista estático al sistema. También, en la mayoría de los casos, el sistema es estable desde el punto de vista dinámico, no se producen vibraciones de la dirección. En algunas circunstancias, sin embargo, el sistema puede entrar en resonancia y dar lugar a vibraciones incontroladas. El fenómeno se suele presentar a grandes velocidades, es por esto que las motocicletas de altas prestaciones cuentan con un amortiguador en la dirección para disipar las posibles vibraciones.

No es fácil encontrar un modelo simple capaz de predecir la inestabilidad dinámica y la velocidad de resonancia. En este apartado se estudian tres modelos sencillos que

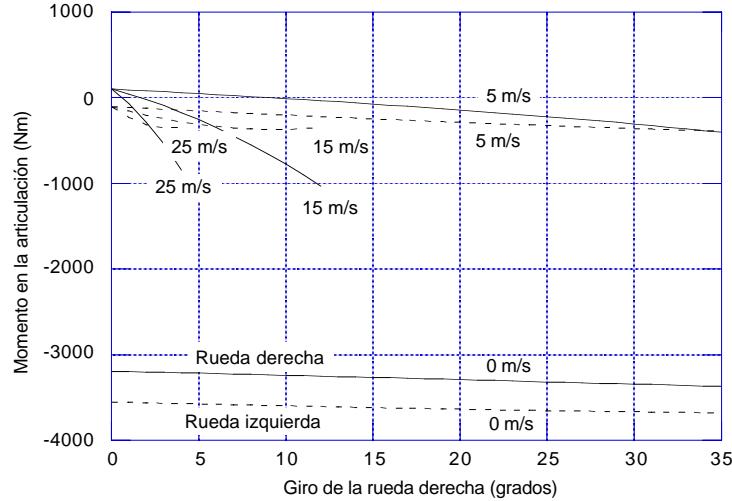


Figura 2.12: Momentos en los ejes de las articulaciones en función del ángulo girado, y de la velocidad.

explican sólo parte del problema. En primer lugar, el caso de una rueda en la que el eje de la dirección está avanzado respecto del punto de contacto con la carretera, y es perpendicular a ésta (Fig. 2.13). Este es el caso de las ruedas delanteras de casi todos los aviones. Cuando alguna perturbación desvía la rueda de su trayectoria longitudinal un pequeño ángulo  $\theta$ , se genera una fuerza transversal de valor  $F$  (Fig. 2.13) que, como se comenta en la Sección 3.1.2, está relacionada con la rigidez a deriva del neumático ( $C_\alpha$ ) y con el ángulo de deriva generado ( $\alpha$ ). Este ángulo viene dado por:

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{v_t}{v_l} \approx \frac{v\theta + \dot{\theta}(a + b)}{v} = \theta + \frac{\dot{\theta}(a + b)}{v} \quad (2.3)$$

donde  $v_l$  es la velocidad en la dirección longitudinal de la rueda,  $v_t$  la velocidad en la dirección transversal a la misma, y  $v$  la velocidad del vehículo. La distancia  $a$  se mide desde el centro de gravedad de rueda y horquilla hasta el eje de la dirección,  $b$  es la distancia desde este CDG a la vertical del punto de contacto rueda–pavimento.

El equilibrio de momentos respecto del eje de la dirección se escribe:

$$F(a + b) + I\ddot{\theta} = 0$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la rueda y horquilla respecto del eje de la dirección. Teniendo en cuenta que  $F = C_\alpha \alpha$  (ver Sección 3.1.2) y que el valor de  $\alpha$  viene dado por 2.3, se obtiene:

$$I\ddot{\theta} + C_\alpha \frac{(a + b)^2}{v} \dot{\theta} + C_\alpha(a + b)\theta = 0$$

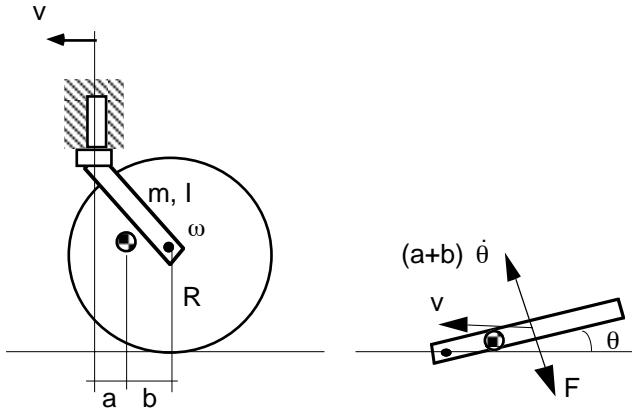


Figura 2.13: Modelo de un grado de libertad para el estudio del shimmy.

Esta ecuación describe la vibración ( $\theta(t)$ ) de la rueda en ausencia de excitación, sometida simplemente a una perturbación inicial.

El sistema es estable puesto que los coeficientes de la ecuación son todos positivos. Esto significa que cualquier perturbación da lugar a una vibración que se amortigua y desaparece. Sin embargo, este modelo permite detectar un fenómeno interesante: el amortiguamiento disminuye con la velocidad del vehículo. Esto indica que el shimmy puede llegar a ser un problema grave a alta velocidad, mientras que no es probable que aparezca a velocidades moderadas.

Para  $v < 0$  el sistema es inestable. En general, los valores de los coeficientes son tales que la solución no es oscilatoria en este caso. El ángulo  $\theta$  crece exponencialmente hasta que la rueda apunta en la dirección contraria a la marcha. Para  $v > 0$ , sin embargo, el modelo no predice inestabilidad, es necesario complicarlo hasta detectar lo observado experimentalmente. Un posible modelo, que está lejos de ser el más completo, es el mostrado en la Figura 2.14. Las ecuaciones de equilibrio según los dos grados de libertad  $x$  y  $\theta$  son:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} + a\ddot{\theta}) &\approx -kx - F \\ I'\ddot{\theta} &= akx - Fb \end{aligned}$$

donde  $I'$  es el momento de inercia (de la horquilla y la rueda) respecto del centro de gravedad, y  $m$  es la masa de la horquilla y la rueda. Eliminando  $F$  y derivando una vez respecto del tiempo se tiene:

$$m(ab - r^2)\frac{d^3\theta}{dt^3} + mb\frac{d^3x}{dt^3} + k(a + b)\frac{dx}{dt} = 0$$

siendo  $r$  el radio de giro (horizontal) respecto del centro de gravedad ( $I' = mr^2$ ). Si se supone una rueda rígida, se puede imponer la condición de velocidad transversal nula:

$$\dot{x} + v\theta + (a + b)\dot{\theta} = 0$$

Despejando  $\dot{x}$  y calculando sus derivadas se obtiene una ecuación para el ángulo  $\theta$ :

$$m(r^2 + b^2)\frac{d^3\theta}{dt^3} + mbv\frac{d^2\theta}{dt^2} + k(a + b)^2\frac{d\theta}{dt} + k(a + b)v\theta = 0$$

El criterio de Ruth para ecuaciones diferenciales ordinarias permite detectar inestabilidad en los siguientes casos:  $v < 0$ , o  $r^2 < ab$ . En efecto, el sistema es estable si todos los coeficientes son positivos y además:

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

siendo  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) los coeficientes de la ecuación característica. La desigualdad anterior se reduce a:

$$ab > r^2$$

Esto es, si el radio de giro de la rueda respecto del centro de gravedad es superior al producto de las distancias  $a$  y  $b$ , se tiene un sistema inestable para cualquier velocidad (el modelo no es capaz de detectar una velocidad crítica). También es interesante notar que la condición de inestabilidad es independiente de la rigidez  $k$  del muelle, aunque se ha visto que para el límite formal  $k \rightarrow \infty$  no se detecta.

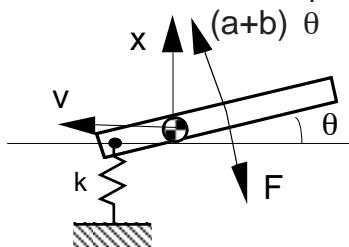


Figura 2.14: Modelo de dos grado de libertad para el estudio del shimmy.

Una expresión para la velocidad crítica se puede obtener modificando ligeramente el modelo anterior. Basta con introducir un amortiguador torsional en el eje de la articulación que genere un momento proporcional a la velocidad angular  $\dot{\theta}$  ( $M = c\dot{\theta}$ ). Las ecuaciones de equilibrio son similares a las obtenidas en el caso anterior, y la desigualdad de Ruth se traduce ahora en:

$$c(a + b) > mv(r^2 - ab)$$

De manera que si  $r^2 > ab$ , la rueda será estable hasta la velocidad crítica:

$$v_{cr} = \frac{c(a + b)}{m(r^2 - ab)}$$

Esta velocidad crítica puede hacerse mayor reforzando la amortiguación del grado de libertad de giro. Esta es la razón de la presencia de un amortiguador en los manillares de algunas motocicletas.

## 2.5 Reductora del Sistema de Dirección

El cuadrilátero de Ackerman se acciona mediante el volante del automóvil a través de la reductora de la dirección. Su misión es la de reducir la fuerza que el conductor debe imprimir al volante para hacer girar las ruedas directrices (además de reorientar el giro

de la columna del volante). En la Figura 2.15 se muestra el esquema de una disposición habitual en vehículos de peso medio. El volante acciona el elemento giratorio de la caja reductora a través del árbol de la dirección y, en su caso, de una o varias juntas universales. En la caja se multiplica la fuerza de accionamiento y se convierte en movimiento de balanceo del brazo Pittman. Éste posiciona el cuadrilátero de acoplamiento mediante la biela y la manivela de mando.

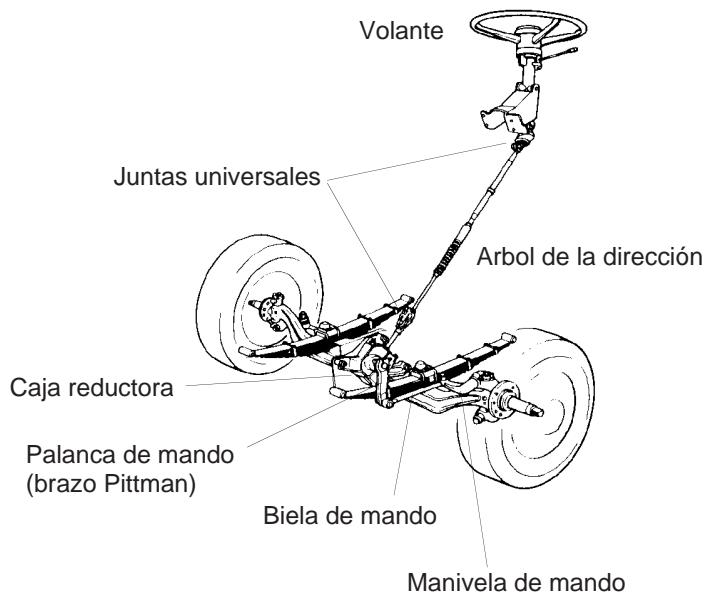


Figura 2.15: Esquema global de un sistema de dirección típico.

En direcciones no asistidas, es necesario buscar un compromiso entre la reducción del esfuerzo y el aumento del número de vueltas del volante de tope a tope. Normas alemanas de seguridad en automóviles requieren que se puedan girar las ruedas delanteras para meter el vehículo en un círculo de radio  $12m$  en un tiempo inferior a  $6s$ . Si la fuerza sobre el volante es superior a  $250N$  se necesita dirección asistida, pero la relación de desmultiplicación debe ser tal que, en caso de perder la asistencia, no se superen los  $600N$  en el volante.

En la mayoría de los mecanismos, la reducción del esfuerzo conlleva otro efecto positivo: la reducción del rendimiento mecánico en la dirección rueda → volante. Esto amortigua la transmisión de las irregularidades de la carretera al volante. El rendimiento mecánico se define como el cociente entre el par (o la fuerza) necesario(a) para mover el sistema y el que haría falta si el rozamiento fuera nulo. Algunas reductoras utilizan el sistema de tornillo sinfin. En este caso, el rendimiento tiene la siguiente expresión:

$$\eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi)} \quad \varphi = \arctan \mu$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de la hélice,  $\mu$  el coeficiente de rozamiento, y  $\varphi$  el ángulo de fricción. La Figura 2.16 muestra el rendimiento (en las dos direcciones) en función del ángulo de

la hélice. Para ángulos de hélice superiores a  $\pi/2 - \varphi$ , el rendimiento hacia adelante (giro  $\rightarrow$  desplazamiento) es nulo, la transmisión de potencia (movimiento) no es posible. Lo mismo ocurre hacia atrás (desplazamiento  $\rightarrow$  giro) para ángulos menores que  $\varphi$ .

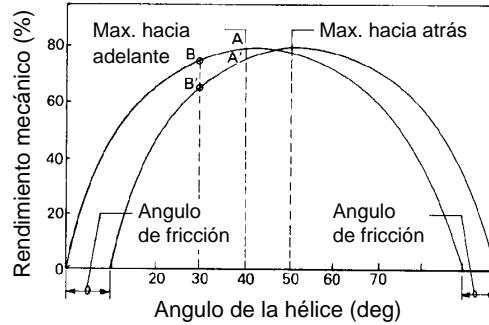


Figura 2.16: Rendimiento mecánico en los dos sentidos de actuación de las fuerzas.

En la Figura 2.17 se muestra el mecanismo de “*Tornillo Sinfín y Balancín*”. El factor de reducción depende de las dimensiones del balancín y del ángulo de la hélice. Este ángulo se elige de tal manera que el rendimiento en la dirección rueda  $\rightarrow$  volante sea sustancialmente inferior al rendimiento en la dirección volante  $\rightarrow$  rueda, sin comprometer este último (Fig. 2.16). Para mejorar el rendimiento, y por tanto reducir el esfuerzo sobre el volante, se sustituyen los filetes de rosca por acanaladuras semielípticas que acomodan una serie de bolas de rodamiento (Fig. 2.17b).

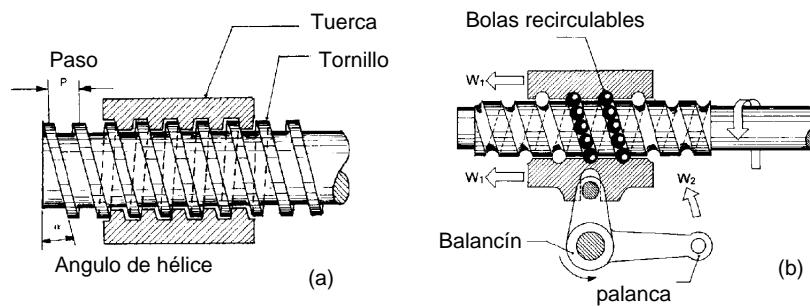


Figura 2.17: Sistema de tornillo sinfín.

El sistema anterior se presenta con distintas modificaciones. Por ejemplo, en el sistema de “*Leva y Seguidor*” (Fig. 2.18), se sustituye el tornillo por un árbol en el que se ha tallado un perfil de leva determinado. El balancín está conectado con la leva a través de la espiga del seguidor (Fig. 2.18). En la figura 2.19 se muestra el sistema de “*Media Tuerca*” con bolas recirculables que mejora el rendimiento.

El sistema más utilizado en vehículos turismo es el de piñón y cremallera (engranajes helicoidales formando un ángulo próximo a  $90^\circ$ ). El dentado de ésta última puede ser tal que la reducción sea variable con el ángulo girado por el volante. Esto permite mejorar la

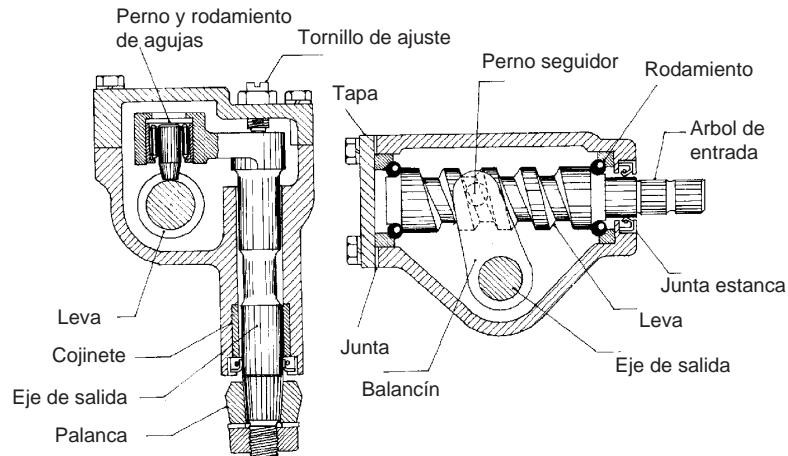


Figura 2.18: Sistema de leva y seguidor.

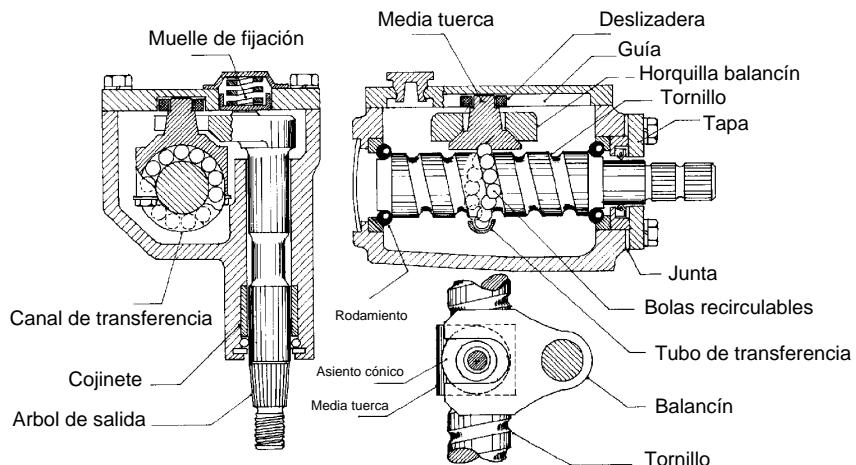


Figura 2.19: Sistemas de media tuerca y de bolas recirculables.

precisión a alta velocidad (pequeños ángulos) sin comprometer excesivamente el número de vueltas de tope a tope.

## 2.6 Dirección Asistida

Se ha visto en la sección anterior que la reducción del esfuerzo en el volante implica un aumento en el número de vueltas que el conductor debe imprimir a la dirección para girar la rueda de tope a tope. Esto hace que el tiempo necesario para efectuar un giro crezca considerablemente, pudiendo incluso llegar a poner en peligro la seguridad de la maniobra. Para reducir el número de vueltas del volante, sin aumentar el esfuerzo requerido, es necesario introducir un elemento capaz de suministrar el esfuerzo suplementario. Los

sistemas de dirección con un tal elemento de ayuda se conocen como direcciones asistidas.

La Figura 2.20 muestra la fuerza en el volante necesaria para equilibrar una determinada fuerza en la palanca de la timonería de dirección. El sistema de dirección asistida de la Figura 2.20 sigue una curva sin asistencia para fuerzas pequeñas, y una curva con incremento para fuerzas mayores, con el fin de proporcionar una cierta “sensación de carretera” al conductor. Los mecanismos utilizados para implementar una curva como la anterior son variados. En el caso de vehículos industriales se suele usar un sistema con válvula lineal y muelle de reacción, mientras que en vehículos de turismo son comunes los sistemas de piñón y cremallera con válvula de control giratoria.

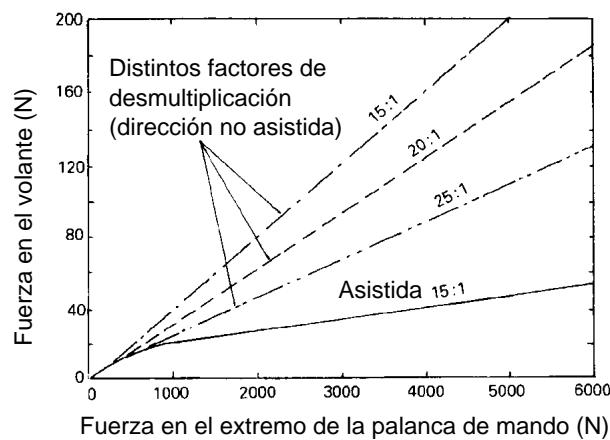


Figura 2.20: Fuerza proporcionada por el sistema de asistencia.

En la Figura 2.21 se muestra un sistema con válvula lineal. La palanca de la timonería de la dirección está conectada con la válvula de control a través del muelle de reacción. El brazo del pistón está fijo al bastidor del vehículo. La asistencia se genera mediante la presión del fluido que circula desde el depósito de reserva hasta la bomba y de aquí, a través de la válvula, al pistón de asistencia. Cuando la fuerza sobre la palanca es inferior a la carga de precompresión del muelle, la válvula no se mueve de la posición neutra, y el fluido circula libremente hacia el lado derecho del pistón, y del lado izquierdo de vuelta al depósito de reserva. En este caso, la bomba está trabajando sin carga y el consumo de potencia es muy bajo. Cuando la fuerza sobre la palanca es superior a la precarga del muelle, la válvula se desplazará a un lado u otro de la posición neutra. Si el desplazamiento es hacia la derecha, la válvula cierra el retorno libre del fluido al depósito, la presión crece en la zona derecha del pistón generando una fuerza que ayuda al movimiento de la palanca. El retorno del fluido se produce desde la zona izquierda del pistón donde el volumen está disminuyendo. Análogo fenómeno se produce en el caso de movimiento hacia la izquierda. Es interesante hacer notar que el diseño de la cámara de asiento del muelle de reacción debe ser tal que se compense la falta de simetría del cilindro de asistencia (diferencia de área expuesta en los lados derecho e izquierdo).

Es necesario insistir en que la apertura de la válvula es función de la fuerza y no del desplazamiento. Si el desplazamiento del brazo Pittman es grande, pero la fuerza sobre el mismo pequeña, la válvula permanecerá cerrada y se moverá entera como un sólido rígido.

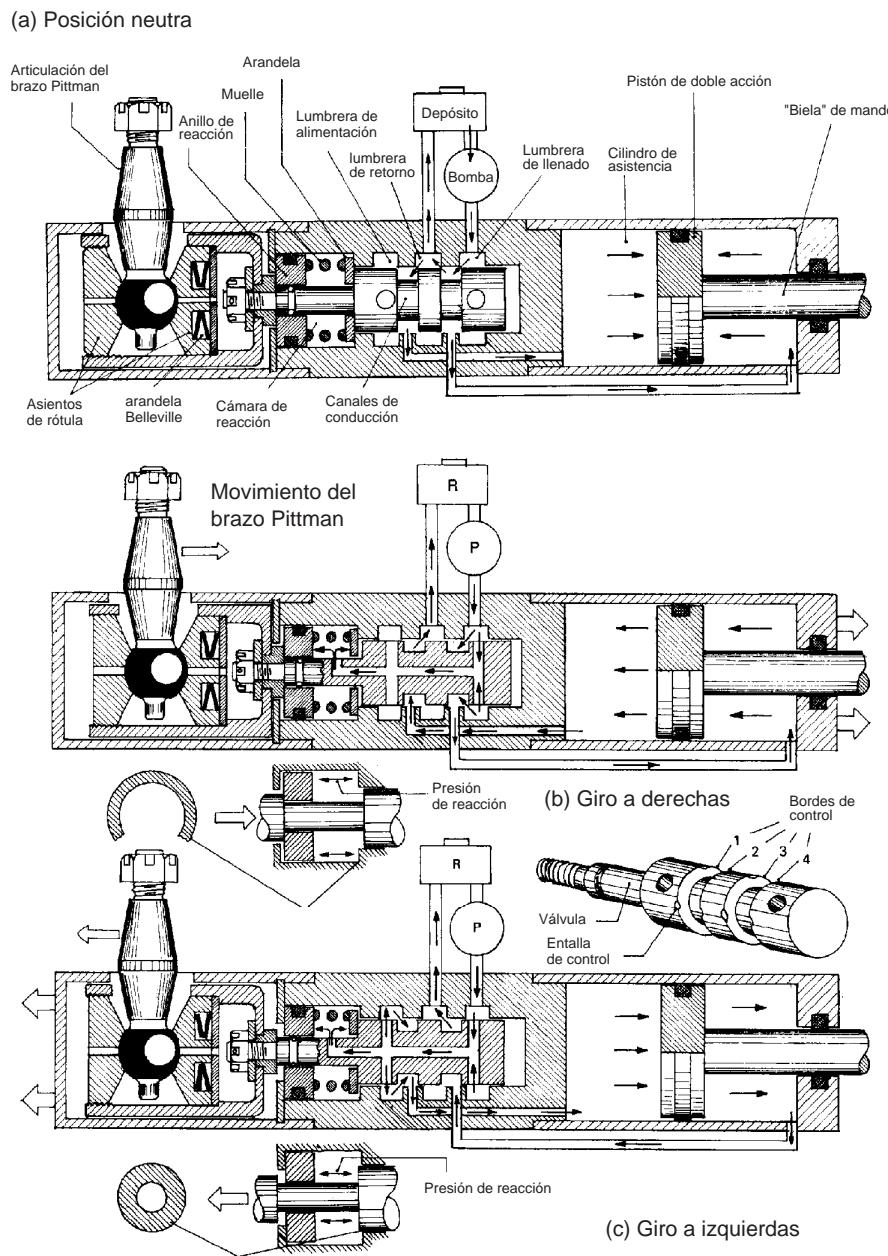


Figura 2.21: Válvula lineal en un sistema de dirección asistida.

En la Figura 2.22 se muestra el sistema de piñón y cremallera con válvula giratoria. La válvula se acciona mediante el giro de una barra de torsión. El grado de apertura o cierre de las distintas lumbreras de la válvula es función del momento sobre la barra de la dirección. Existe, sin embargo, un valor del momento en el que las chavetas de la barra hacen contacto con los correspondientes topes de la válvula, en esta situación la apertura de la bomba al pistón es máxima y la presión del fluido aumenta considerablemente.

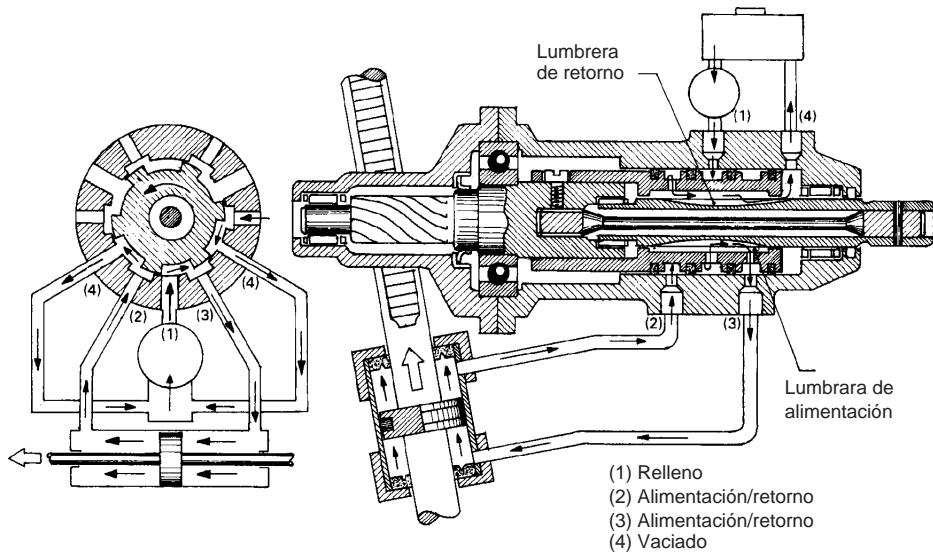


Figura 2.22: Válvula giratoria en un sistema de dirección asistida.

## 2.7 Dirección a las Cuatro Ruedas

Se describen aquí dos de las patentes de sistemas de direccionamiento a las cuatro ruedas. La primera es un sistema totalmente mecánico que no depende de la velocidad, y la segunda un sistema electro-hidro-mecánico en el que se tiene en cuenta la velocidad del vehículo.

### 2.7.1 Honda

En el sistema de la compañía *Honda*, el ángulo girado por las ruedas traseras está exclusivamente determinado por el ángulo girado por el volante. Sin embargo, el mecanismo es tal que, para pequeños giros del volante, las ruedas traseras se mueven en la dirección de las delanteras, y en sentido contrario para giros mayores. El sistema consigue, indirectamente, el funcionamiento deseado. Esto es así porque para velocidades pequeñas los giros del volante suelen ser grandes, mientras que para velocidades grandes los giros son pequeños.

La relación entre los giros de las ruedas delanteras y traseras, así como un esquema del mecanismo, se muestran en la Figura 2.23. La timonería delantera es similar a la de los vehículos con dirección a dos ruedas. En la cremallera delantera engrana un segundo piñón conectado a un árbol que transmite el movimiento de giro a la caja de la dirección trasera. En la caja trasera se conecta el árbol con la barra de acoplamiento del mecanismo de 6 barras trasero. La conexión se reliza a través de un planeta excéntrico para conseguir la relación de ángulos deseada.

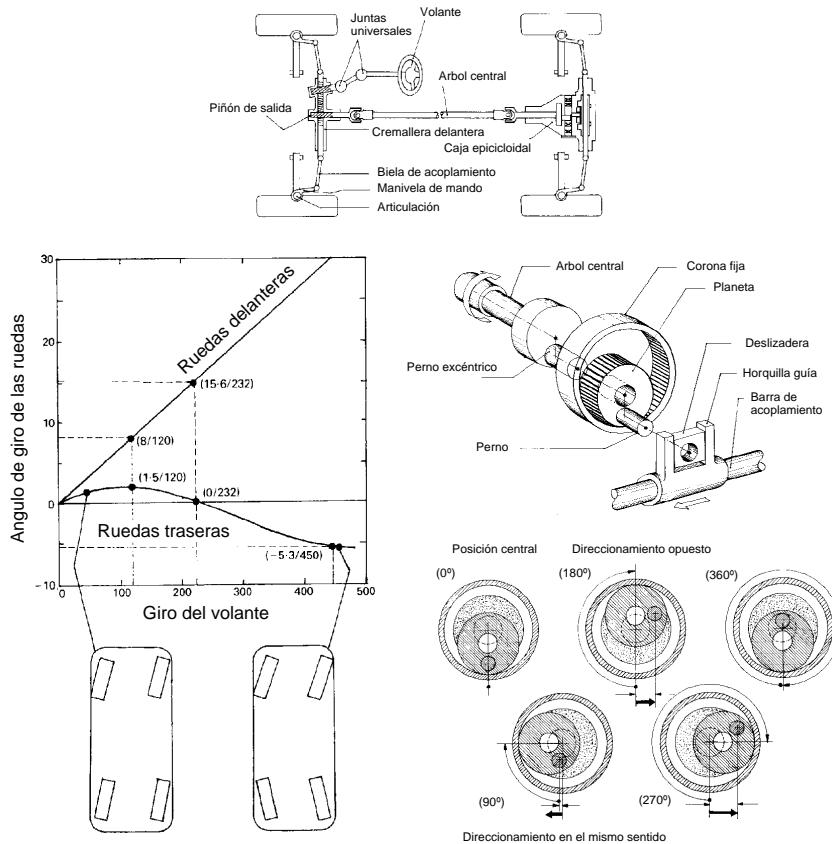


Figura 2.23: Sistema mecánico de guiado trasero.

### 2.7.2 Mazda

La compañía Mazda ha patentado un sistema electro-hidro-mecánico para dirigir las ruedas traseras en función de la velocidad. La relación entre el ángulo girado por las ruedas delanteras y el girado por las traseras depende de la velocidad. La ley de guiado se muestra en la Figura 3.26.

El esquema del dispositivo se muestra en la Figura 2.24. Se trata de un sistema con dirección asistida en los ejes delantero y trasero. La válvula que controla el paso de fluido a presión a cada lado del cilindro trasero está gobernada por el giro del volante y por un motor eléctrico que recibe señal del sensor de velocidad. En la cremallera delantera se engrana un segundo piñón que transmite el giro al brazo articulado de apertura de la válvula trasera. El motor eléctrico controla la posición del yugo sobre el que oscila este brazo. En la Figura 2.24 puede verse que la posición del yugo determina, no sólo el valor del desplazamiento de la válvula, sino también el sentido.

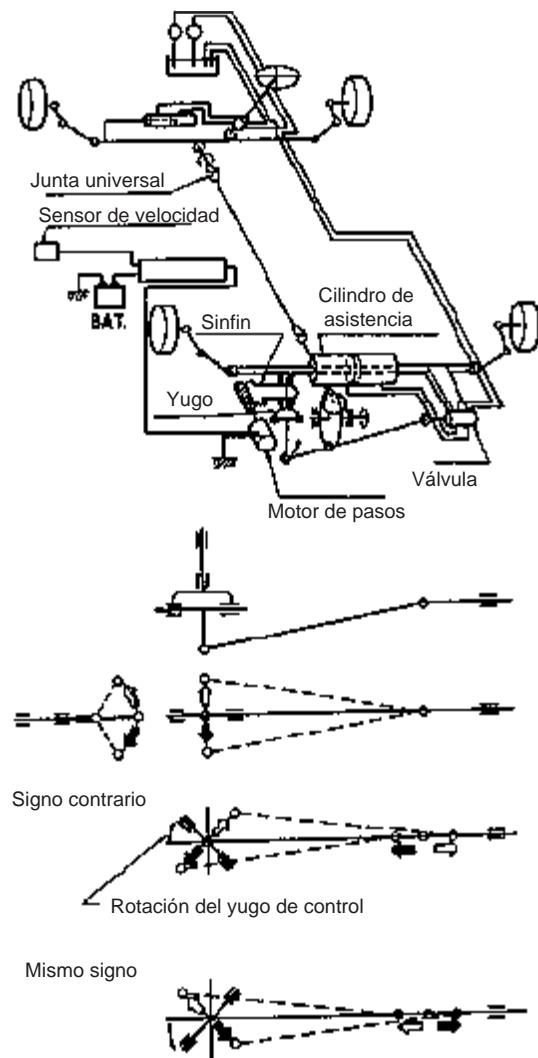


Figura 2.24: Sistema hidro-mecánico con control electrónico.

## 2.8 Vehículos Oruga

En esta sección se describirán tres de los mecanismos usados en el direccionamiento de vehículos oruga. El primero de ellos es el “*Sistema de Freno y Embrague*” (Fig. 2.25a). Cada una de las cintas está dotada de un freno independiente y de un embrague para interrumpir la transmisión de potencia. El direccionamiento se efectúa desacoplando el embrague de la cinta interior y, si es necesario, aplicando el freno en esta misma cinta. El principal inconveniente está relacionado con la falta de “elasticidad” del embrague en la transmisión de potencia. Es difícil dosificar la potencia entregada a la cinta interior y, aun en el caso de conseguirlo, el rendimiento es muy bajo. La potencia disipada en el direccionamiento con este tipo de mecanismo es alta.

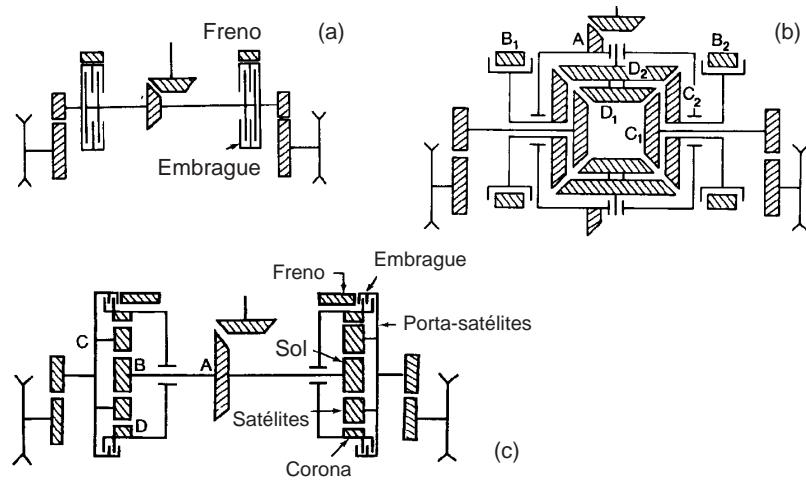


Figura 2.25: Mecanismos para el direccionamiento de vehículos oruga.

El “Sistema de Diferencial Controlado” (Fig. 2.25b) reduce el problema de falta de rendimiento y consigue un funcionamiento sustancialmente más suave. Cuando el vehículo viaja en linea recta, el diferencial (ver Capítulo 9) transmite potencia a las dos cintas y los planetarios no giran sobre su propio eje. Si se aplica el freno correspondiente a la cinta interior, los planetarios comienzan a girar sobre su propio eje transfiriendo revoluciones y potencia a la cinta exterior.

Otro sistema utilizado en el direccionamiento de vehículos oruga es el de “Trenes Epicicloidales” (Fig. 2.25c). Este sistema hace las veces de reductor en la transmisión de potencia además de permitir el direccionamiento con el uso del embrague y freno incorporados en el sistema. Cuando el vehículo viaja en linea recta, los embragues están acoplados y los frenos desactivados. Se tiene entonces un sistema epicicloidal en el que los ejes de los planetarios no se mueven respecto de la corona. La potencia disponible se divide por igual entre las dos cintas. Para girar se desconecta el embrague del engranaje interior y se aplica el freno correspondiente. En este caso, el tren epicicloidal entra en acción, el número de vueltas de esta cinta se reduce y el vehículo gira.

## Capítulo 3

# Dinámica Lateral

Se puede decir que un automóvil es un vehículo con dos “*grados de libertad*” (GDL) en el sentido de que permite movimientos en una superficie. Haciendo uso de esta acepción de GDL, se pueden clasificar los distintos vehículos según su número de GDL:

**1 GDL** Ferrocarril

**2 GDL** Automóvil, barco

**3 GDL** Avión, helicóptero, submarino

Para poder recorrer una trayectoria dada, dentro de la superficie “factible”, es necesario disponer de un sistema (ver capítulo ??) que permita girar alguna o todas las ruedas. El giro de las ruedas debe ser suficiente para permitir maniobras cerradas a baja velocidad. A alta velocidad, sin embargo, los radios de las curvas (posibles) son mayores, y los ángulos girados por las ruedas son muy pequeños. En efecto, un vehículo de batalla (distancia entre ejes)  $L = 2.5m$ , que describe una curva de radio  $R = 250m$ , debe girar sus ruedas delanteras un ángulo que, en primera aproximación, viene dado por:  $\delta = L/R$ , esto es,  $\delta = 0.01rad = 0.6^\circ$  (muy pequeño!). Por tanto, la dinámica lateral del automóvil (su comportamiento en curva) está influenciada por infinidad de factores.

Supongamos, por ejemplo, que la suspensión trasera es tal que, una vez sometida a las cargas laterales correspondientes a la fuerza centrífuga, se deforma ligeramente haciendo girar las ruedas  $0.01rad$  hacia el exterior. En este caso (con  $R = 250m$  y  $L = 2.5m$ ) el conductor debe devolver las ruedas delanteras a la posición recta si quiere permanecer en la curva en cuestión. Se intuye ahora que la dinámica lateral es muy sensible a pequeñas variaciones en el diseño del vehículo.

### 3.1 Conceptos Previos

#### 3.1.1 Sistema de Referencia

Se entiende por comportamiento direccional de un vehículo la respuesta del mismo según el desplazamiento transversal (eje  $y$ , Fig. 3.1) y según las rotaciones alrededor de los ejes de pivotamiento y balanceo ( $\phi_z, \phi_x$ , Fig. 3.1). Es preferible desacoplar el resto de grados de libertad (aunque estrictamente están todos acoplados) para aislar los factores de mayor importancia en el trazado de curvas.

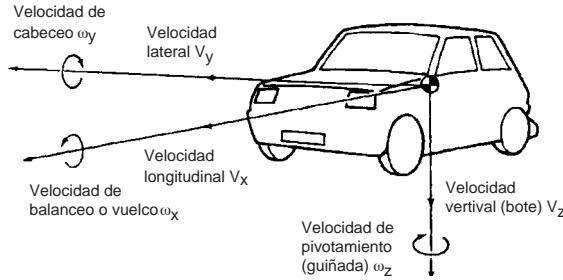


Figura 3.1: Sistema de coordenadas para el estudio de la dinámica de vehículos (SAE).

### 3.1.2 Ángulo de Deriva

En condiciones estacionarias (por ejemplo, un vehículo que describe una curva de radio constante a velocidad constante) el automóvil es forzado a trazar la curva circular mediante las fuerzas laterales de contacto generadas en los neumáticos. Como se discutirá en el capítulo 8, un neumático sometido a una fuerza lateral experimenta una deformación en la zona de contacto que hace que su trayectoria no coincida con la dirección diametral indeformada de la rueda. La dirección real forma un ángulo con el plano diametral que se conoce como ángulo de deriva. El ángulo de deriva ( $\alpha$ ) se relaciona con la fuerza lateral ( $F_y$ ) a través de la “rigidez a deriva” ( $C_\alpha$ ), esto es:  $F_y = C_\alpha \alpha$ . Esta rigidez depende de una serie de parámetros como la carga normal, la presión de inflado, y la fuerza de tracción o frenado. En realidad también depende de la fuerza lateral, aunque, en general, se puede suponer constante en un determinado rango de condiciones de operación.

En la Figura 3.2 se muestra la definición de ángulo y rigidez a deriva (Fig. 3.2a), así como su variación en función de distintos parámetros (Fig. 3.2b). Se observa en estos gráficos que la rigidez a deriva depende, y mucho, de la presión de inflado. A mayor presión de inflado el neumático se hace más rígido y, por tanto, “deriva” menos para las mismas fuerzas laterales. También depende del tipo de construcción del neumático. Así, los neumáticos diagonales (con el trenzado formando ángulo respecto de la dirección de los radios de la rueda, ver capítulo 8) suelen ser más “blandos” que los radiales, cuya construcción los hace más rígidos a deriva.

La carga vertical que soporta el neumático tiene una influencia sustancial en la rigidez a deriva (Fig. 3.2b). Esta dependencia se suele mostrar mediante gráficos de fuerza lateral frente a carga vertical para distintos ángulos de deriva. Puede verse que, si se fuerza al neumático a viajar con un determinado ángulo de deriva constante (lo cual es muy sencillo de conseguir en una máquina de ensayos de neumáticos, basta con situar la rueda formando el ángulo oportuno con la dirección de rodadura), la fuerza lateral crece a la vez que se incrementa la carga vertical. Este crecimiento es tanto mayor cuanto mayor sea el ángulo de deriva. De hecho, con un ángulo de deriva nulo no se puede generar fuerza lateral. Este resultado puede sorprender si se olvida que el neumático está rodando cuando se miden estas fuerzas, y/o que se trata de un sólido deformable.

También se muestra en la Figura 3.2b la dependencia de la rigidez a deriva con el tamaño de la llanta, y con la relación de aspecto del neumático. Los resultados están de acuerdo con lo que podía intuirse. A mayor diámetro y menor relación de aspecto, mayor

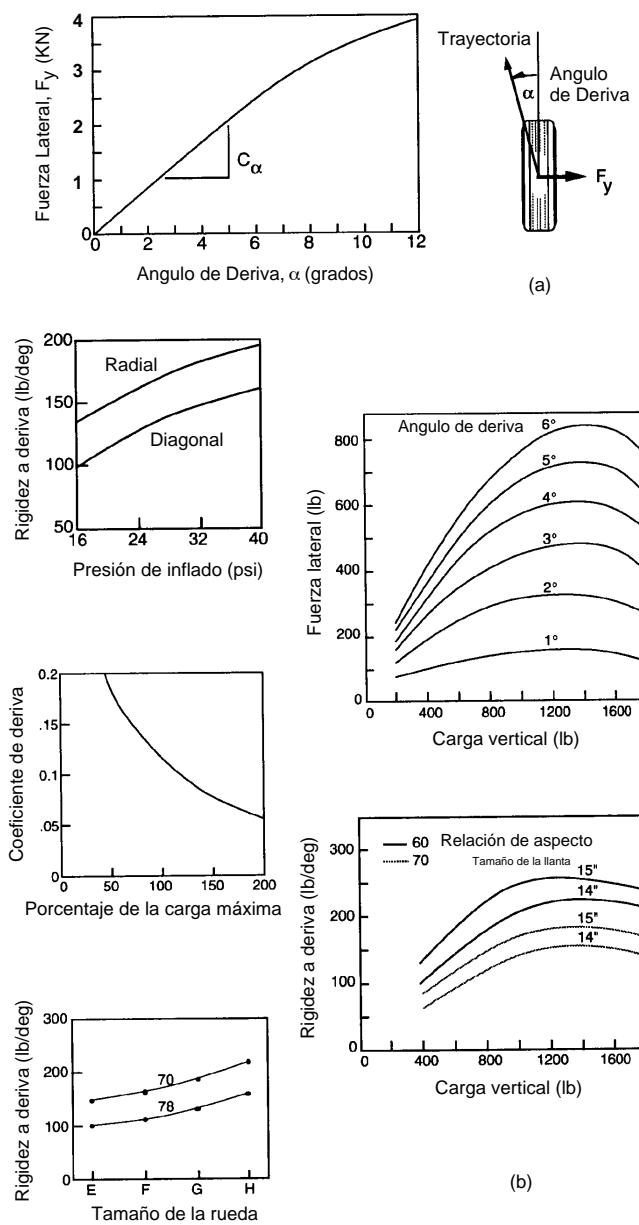


Figura 3.2: Definición (a) y evolución (b) de la rigidez a deriva.

rigidez a deriva.

### 3.2 Modelo de Bicicleta

En el siguiente modelo se supone, para simplificar el análisis, que el radio de la curva es suficientemente grande comparado con la distancia entre ejes (batalla) y con la separación entre ruedas de un mismo eje (vía). En este caso se pueden usar las aproximaciones de ángulos pequeños, y se puede considerar que las dos ruedas de cada eje están representadas por una sola de rigidez doble (Fig. 3.3).

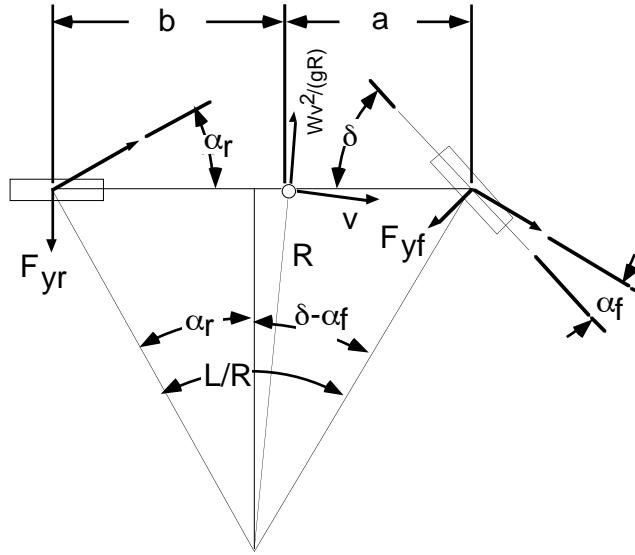


Figura 3.3: Relación entre los ángulos de deriva y otros parámetros geométricos.

La relación entre el ángulo de giro de las ruedas anteriores ( $\delta$ ), el radio de la curva ( $R$ ), la distancia entre ejes ( $L$ ), y los ángulos de deriva de los neumáticos anteriores ( $\alpha_f$ ) y posteriores ( $\alpha_r$ ) es (Fig. 3.3):

$$\delta - \alpha_f + \alpha_r = L/R \quad (3.1)$$

El ángulo de giro para tomar una curva, no es sólo función del radio de la misma, sino también de los ángulos de deriva de los neumáticos delanteros y traseros. Por otra parte, estos ángulos son función de las fuerzas laterales sobre cada una de las ruedas. Para pequeños ángulos, las fuerzas laterales se pueden aproximar (equilibrio “isostático” en la dirección transversal) por:

$$F_{yf} = \frac{Wv^2b}{gRL}$$

$$F_{yr} = \frac{Wv^2a}{gRL}$$

donde  $W$  es el peso del vehículo,  $v$  su velocidad,  $R$  el radio de la curva,  $L$  es la batalla,  $a$  y  $b$  son las distancias del centro de gravedad al eje delantero y trasero, respectivamente. Por último,  $g$  es la aceleración de la gravedad.

En condiciones estacionarias, los pesos en cada eje ( $W_f$  delantero y  $W_r$  trasero) están repartidos según la proporción (equilibrio de fuerzas verticales):

$$W_f = \frac{Wb}{L} \quad W_r = \frac{Wa}{L}$$

entonces, la expresión 3.1 se reescribe como:

$$\delta = \frac{L}{R} + \underbrace{\left( \frac{W_f}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \right)}_U \frac{v^2}{gR}$$

donde se ha tenido en cuenta la definición de rigidez a deriva conjunta de los neumáticos de un eje (que podemos llamar rigidez a deriva del eje):

$$C_{\alpha f} = \frac{F_{yf}}{\alpha_f} \quad C_{\alpha r} = \frac{F_{yr}}{\alpha_r}$$

Las relaciones fundamentales quedan:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{L}{R} + U a_y \\ U &= \left( \frac{W_f}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $a_y = v^2/(gR)$  es la aceleración lateral en  $g's$ .

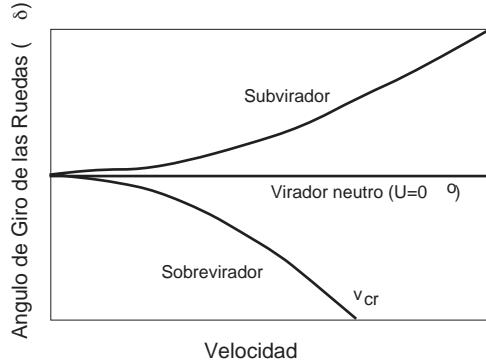


Figura 3.4: Ángulo de la dirección en función de la velocidad.

El parámetro  $U$  se conoce como “Coeficiente de Subvirador”. Dependiendo de la distribución de peso en el vehículo, y de las rigideces a deriva de los neumáticos, se pueden tener tres tipos de comportamiento direccional: virador neutro, subvirador y sobrevirador.

**Virador Neutro ( $U = 0$ )** Cuando el coeficiente de subvirador es nulo, los ángulos de deriva anterior y posterior son iguales. El ángulo de giro requerido para tomar la curva es:

$$\delta = \frac{L}{R}$$

En un vehículo con estas características, se puede aumentar la velocidad en curva sin que sea necesario corregir el ángulo del volante. Un automóvil virador neutro se representa mediante una linea horizontal en el diagrama de ángulo de giro frente a velocidad (Fig. 3.4). Un tal vehículo moviéndose en linea recta, y sometido a un fuerza lateral, desarrolla ángulos de deriva iguales en ambos ejes (suponiendo que el centro de presiones coincide con el de gravedad), y como consecuencia sigue una trayectoria recta que forma un ángulo determinado con la original (Fig. 3.5).

**Subvirador ( $U > 0$ )** Cuando el coeficiente de subvirador es positivo, el ángulo de deriva de los neumáticos anteriores es superior al de los neumáticos traseros. En este caso el ángulo de giro necesario para tomar una curva aumenta con el cuadrado de la velocidad longitudinal (Ec. 3.2, Fig. 3.4). Esto es, cuando se aumenta la velocidad en curva es necesario incrementar el giro del volante para mantener la trayectoria, de lo contrario, el vehículo gira menos de lo debido (subvirador). Un tal vehículo que viaja en linea recta y se ve sometido a una fuerza lateral, se verá forzado a seguir una trayectoria curva de giro en la dirección de la fuerza (Fig. 3.5).

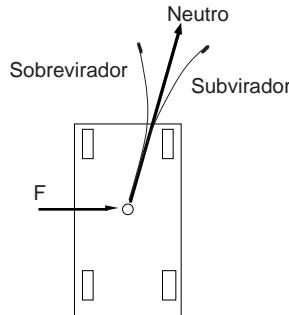


Figura 3.5: Cambio de trayectoria debido a una fuerza lateral.

**Sobrevirador ( $U < 0$ )** Cuando el coeficiente de subvirador es negativo, el ángulo de deriva de los neumáticos anteriores es inferior al de los neumáticos posteriores. En este caso el ángulo de giro necesario para tomar una curva disminuye con el cuadrado de la velocidad longitudinal (Fig. 3.4). Un tal vehículo que viaja en linea recta y se ve sometido a una fuerza lateral, se verá forzado a seguir una trayectoria de giro que hace apuntar el morro en dirección contraria a la fuerza (Fig. 3.5).

Los vehículos sobreviradores son más peligrosos (aunque más nerviosos y rápidos de respuesta) que los subviradores o neutros, para ellos existe una velocidad crítica a la que el vehículo se mantiene en curva sin girar el volante. Esta velocidad se corresponde, como se verá en el Apartado 3.5, con la pérdida de estabilidad direccional.

Las características direccionales de un vehículo están fundamentalmente determinadas por la rigidez a deriva de los neumáticos delanteros y traseros, así como por la distribución de peso entre los ejes. Un vehículo con el peso concentrado en el eje delantero tiende a ser subvirador, mientras que un automóvil con motor trasero tiende a ser sobrevirador. En coches de fórmula se corrige el comportamiento sobrevirador aumentando la rigidez a

deriva de las ruedas traseras (neumáticos más anchos). También se modifica el comportamiento direccional actuando sobre la geometría del mecanismo de la suspensión como se comentará más adelante.

Son varios los parámetros que se usan para comparar las respuestas estacionarias de distintos vehículos al giro de la dirección. Uno de estos parámetros es la “*Ganancia de Velocidad Angular de Pivotamiento*” que se define como el cociente entre la velocidad de giro alrededor del eje  $z$  ( $\dot{\phi}_z$ ) y el ángulo de giro impuesto a las ruedas delanteras ( $\delta$ ):

$$G_{\dot{\phi}_z} = \frac{\dot{\phi}_z}{\delta} = \frac{v}{L + U \frac{v^2}{g}} \quad (3.3)$$

Si se desea obtener la ganancia de velocidad de giro respecto del ángulo girado por el volante, es necesario multiplicar la ecuación 3.3 por la relación de desmultiplicación del mecanismo de dirección. Este parámetro es un indicativo de la sensibilidad del vehículo frente a la señal de control ( $\delta$ ) dada por el conductor.

Para un vehículo neutro ( $U = 0$ ), la ganancia aumenta linealmente con la velocidad (Fig. 3.6). En el caso de automóviles subviradores ( $U > 0$ ), la ganancia aumenta menos que proporcionalmente hasta llegar a un máximo en el que comienza a disminuir. La velocidad característica ( $v_{ca}$ ) a la que esto ocurre es:

$$v_{ca} = \sqrt{\frac{gL}{U}}$$

Para un vehículo sobrevirador ( $U < 0$ ), la ganancia aumenta más que proporcionalmente hasta que se alcanza la velocidad crítica en la que la ganancia toma un valor infinito:

$$v_{cr} = \sqrt{\frac{gL}{-U}}$$

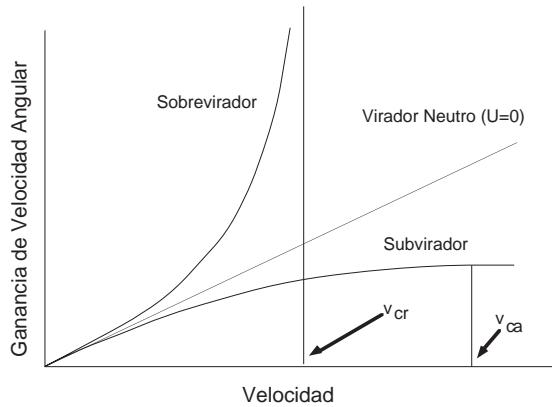


Figura 3.6: Ganancia de velocidad angular de pivotamiento en función de la velocidad.

La ganancia de aceleración lateral se usa también como parámetro para describir el comportamiento direccional de los distintos vehículos. Se define como:

$$G_{a_y} = \frac{a_y}{\delta} = \frac{v^2/L}{g + U v^2/L}$$

y, al igual que la ganancia de velocidad angular, también aumenta con la velocidad. Los conductores, en su iniciación al manejo de automóviles, aprenden que las ganancias de velocidad angular y de aceleración lateral aumentan con la velocidad y, por tanto, utilizan el volante con mayor suavidad a altas velocidades. Esto no es necesariamente cierto para un conductor sin experiencia alguna. El sistema de control de la máquina (conductor) debe conocer las leyes de ganancia para poder manejar el vehículo con precisión. De lo contrario, las señales de giro del volante producirían respuestas (aceleraciones laterales) no deseadas que tendrían que ser corregidas continuamente.

En las expresiones de ganancia también interviene como parámetro la batalla del vehículo. A mayor longitud entre ejes, menor ganancia. Esto quiere decir que los vehículos largos son más perezosos a la hora de responder a comandos direccionales, pero, también y por tanto, más estables en trayectorias rectas.

### 3.3 Influencias en el Comportamiento Direccional

El análisis anterior se ha simplificado despreciando la influencia de una serie de factores: fuerzas de tracción en los neumáticos, transferencia de carga de la ruedas interiores a las exteriores, variación de la inclinación de las ruedas, etc. Todos estos factores están, hasta cierto punto, interrelacionados, pero el estudio conjunto de todos ellos en un modelo completo convierte el problema en intratable analíticamente. Es preferible estudiar la influencia por separado, aun cuando esto conlleva simplificaciones.

#### 3.3.1 Fuerzas de Tracción

Un vehículo automóvil se propulsa generando fuerzas “longitudinales” en el contacto neumático–carretera (en el sentido de la marcha para el neumático, y en el contrario para la carretera), además, existen fuerzas longitudinales que se oponen a la marcha, determinadas por la resistencia a la rodadura de los neumáticos. En el análisis del apartado anterior se despreciaba la varición experimentada por el ángulo de deriva en presencia de estas fuerzas.

En el Capítulo 8 se analizan las propiedades de los neumáticos. Se demuestra que el ángulo de deriva necesario para generar una determinada fuerza lateral aumenta en presencia de fuerza longitudinal (Figs. 8.32, 8.33). Esto se puede entender como una disminución de la rigidez a deriva del neumático sometido a fuerzas longitudinales.

La “disminución de la rigidez a deriva” se produce en el eje motriz. Por tanto, los vehículos de tracción delantera tienen una componente subviradora adicional, mientras que los vehículos de tracción trasera tienen una componente sobreviradora adicional.

#### 3.3.2 Distribución del Par de Balanceo

Cuando un vehículo describe una curva a una determinada velocidad, se produce una transferencia de carga (vertical) de las ruedas interiores a las exteriores. Para radios de giro suficientemente grandes, los ángulos de deriva de las dos ruedas de un eje son prácticamente iguales. Pero si el ángulo de deriva se mantiene para cada rueda de un eje, y la carga vertical se modifica, también se tiene que modificar, y en el mismo sentido, la carga transversal que soporta cada neumático (Fig 3.2). Por tanto, cuando el automóvil describe una curva, se produce una transferencia de fuerza lateral (como consecuencia de

la transferencia de carga vertical) de las ruedas interiores a las exteriores.

Si la relación entre carga lateral y vertical, para un ángulo de deriva dado, es lineal, la media de las fuerzas laterales en un eje coincide con la fuerza que correspondería a un neumático que soportara la media de las cargas verticales. Si la relación anterior no es lineal (Fig. 3.7), se tiene que la media de fuerzas laterales es inferior a la que recae sobre el eje en cuestión (“pérdida de equilibrio”). El equilibrio se reestablece acomodando un ángulo de deriva superior. Esto equivale a funcionar con un eje de menor rigidez a deriva.

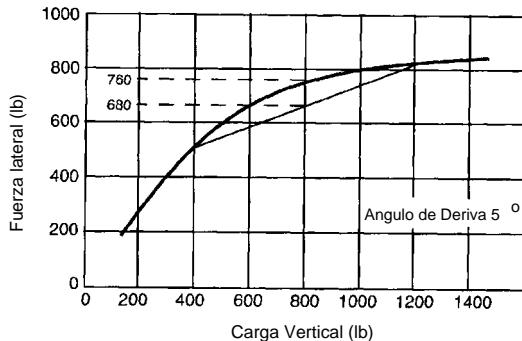


Figura 3.7: Fuerza lateral en función de la vertical para ángulo de deriva constante.

El proceso descrito en el párrafo anterior ocurre en cada uno de los ejes del vehículo. La contribución será subviradora o sobreviradora dependiendo de la capacidad de la suspensión para transmitir el momento de balanceo (rigidez de balanceo de la suspensión) y de la rigidez de la estructura del automóvil. El problema es de especial interés en vehículos industriales debido al tipo de neumáticos utilizados y, sobre todo, debido a la enorme transferencia de carga en curva.

En lo que sigue se calculará la transferencia de carga en cada uno de los ejes de un vehículo industrial. Esto permitirá cuantificar la influencia sobre el carácter sub/sobre-virador. Para simplificar el análisis suponemos un bastidor totalmente rígido. La distribución de momento de vuelco es proporcional a la rigidez (al balanceo) de la suspensión en cada eje (ya que el ángulo girado por el chasis rígido es el mismo en cada eje). La rigidez al balanceo de una suspensión de eje rígido como la de la Figura 3.8 es:

$$K_\phi = \frac{M}{\phi} = \frac{K_s \phi \frac{s}{2} s}{\phi} = \frac{1}{2} K_s s^2$$

donde  $K_\phi$  es la rigidez al vuelco,  $M$  es el momento de vuelco,  $\phi$  es el ángulo girado por la caja del vehículo,  $K_s$  es la rigidez de cada una de las ballestas, y  $s$  es la separación entre las ballestas del eje. Para suspensiones independientes se puede usar esta misma expresión haciendo que  $K_s$  sea la rigidez aparente en la rueda y  $s$  la vía del eje en cuestión. El equilibrio de momentos en el eje respecto del centro de balanceo de la masa suspendida se escribe como (Fig. 3.8):

$$(F_{zo} - F_{zi}) \frac{t}{2} = \underbrace{(F_{yi} + F_{yo})}_{F_y} h_r + K_\phi \phi$$

donde  $K_{\phi}\phi$  es el momento que la masa suspendida ejerce sobre el eje en el centro de balanceo. Las fuerzas  $F_{zo}$  y  $F_{zi}$  son las cargas verticales en la rueda exterior e interior del eje, respectivamente. Análogamente,  $F_{yo}$  y  $F_{yi}$  son las cargas laterales en la rueda exterior e interior del eje, respectivamente. Por último,  $t$  es la vía y  $h_r$  la altura del centro de balanceo.

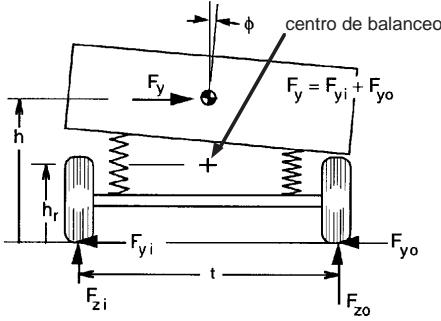


Figura 3.8: Equilibrio de fuerzas para una suspensión de eje rígido.

La transferencia de carga viene dada por:

$$\Delta F_z = \frac{F_{zo} - F_{zi}}{2} = \frac{1}{t} [F_y h_r + K_{\phi}\phi] \quad (3.4)$$

El primer término del lado derecho es la transferencia de carga debida a la fuerza centrífuga, su acción es instantánea, se generan a la vez que las fuerzas de inercia. El segundo término corresponde a la transferencia de carga debida al giro del vehículo. Depende de la rigidez al balanceo de la suspensión y está retrasada en el tiempo respecto de la generación de fuerzas centrífugas.

La masa suspendida gira alrededor del eje que une los centros de balanceo de las suspensiones delantera y trasera. El momento respecto de este eje es (Fig. 3.9):

$$M_{\phi} = W \cos \epsilon h_1 \sin \phi + W a_y h_1 \cos \phi \cos \epsilon \quad (3.5)$$

donde  $M_{\phi}$  es el momento de vuelco sobre el eje de balanceo,  $W$  es el peso de la masa suspendida,  $\epsilon$  es el ángulo entre la horizontal y el eje de balanceo,  $h_1$  es la distancia vertical del centro de gravedad de la masa suspendida al eje de balanceo,  $v$  es la velocidad del vehículo, y  $R$  el radio de la curva que describe.

Las suspensiones trasera y delantera funcionan como dos muelles en paralelo, de manera que podemos escribir:

$$M_{\phi} = (K_{\phi f} + k_{\phi r})\phi \quad (3.6)$$

donde  $K_{\phi f}$  y  $K_{\phi r}$  son las rigideces al vuelco (balanceo) de las suspensiones delantera y trasera, respectivamente. Combinando las expresiones 3.5 y 3.6, y suponiendo que los ángulos son pequeños:

$$\phi = \frac{W h_1 a_y}{K_{\phi f} + K_{\phi r} - W h_1} \quad (3.7)$$

La expresión anterior se usa para definir el coeficiente de balanceo de un automóvil ( $R_{\phi}$ ), esto es, el giro que experimenta la masa suspendida ( $\phi$ ) por unidad de aceleración

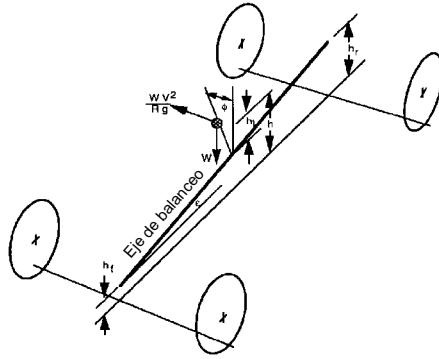


Figura 3.9: Eje de balanceo del cuerpo suspendido.

lateral ( $a_y$ , usualmente en  $g's$ ):

$$R_\phi = \frac{d\phi}{da_y} = \frac{Wh_1}{K_{\phi f} + K_{\phi r} - Wh_1} \quad (3.8)$$

Una vez encontrado el ángulo que gira la masa suspendida (ec. 3.7), se puede plantear el equilibrio de cada uno de los ejes dando lugar a expresiones análogas a la 3.4:

$$\begin{aligned} \Delta F_{zf} &= \frac{a_y}{t_f} \left[ W_f h_f + K_{\phi f} \frac{Wh_1}{K_{\phi f} + K_{\phi r} - Wh_1} \right] \\ \Delta F_{zr} &= \frac{a_y}{t_r} \left[ W_r h_r + K_{\phi r} \frac{Wh_1}{K_{\phi f} + K_{\phi r} - Wh_1} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $W_f$  y  $W_r$  son los pesos sobre el eje delantero y trasero, respectivamente,  $h_f$  y  $h_r$  son las alturas de los centros de balanceo de la suspensión delantera y trasera, respectivamente.

Las expresiones 3.9 proporcionan la transferencia de carga que se produce en cada uno de los dos ejes. Para conocer cómo influye esta transferencia en el comportamiento direccional del vehículo es necesario saber el “tipo de no-linealidad” de la relación  $F_y(F_z)$ . El desarrollo que sigue no es general, pero incluye muchos de los casos posibles.

Sea una relación cuadrática del tipo:

$$F'_y = C'_\alpha \alpha = (AF_z - BF_z^2)\alpha$$

donde  $C'_\alpha$  representa la rigidez a deriva de uno de los dos neumáticos del eje. Para el eje completo se tiene una relación del tipo:

$$F_y = (AF_{zo} - BF_{zo}^2 + AF_{zi} - BF_{zi}^2)\alpha$$

que puede expresarse como:

$$F_y = (C_\alpha - 2B\Delta F_z^2)\alpha$$

donde  $C_\alpha$  es la rigidez a deriva habitual, esto es, la rigidez “del eje completo” sin transferencia de carga. De las ecuaciones de equilibrio lateral se obtienen las cargas  $F_{yf}$  y  $F_{yr}$ ,

y con éstas se obtienen los ángulos de deriva en cada eje:

$$\begin{aligned}\alpha_f &= \frac{W_f a_y}{C_{\alpha f} - 2B_f \Delta F_{zf}^2} \approx \frac{W_f a_y}{C_{\alpha f}} \left( 1 + \frac{2B_f \Delta F_{zf}^2}{C_{\alpha f}} \right) \\ \alpha_r &\approx \frac{W_r a_y}{C_{\alpha r}} \left( 1 + \frac{2B_r \Delta F_{zr}^2}{C_{\alpha r}} \right)\end{aligned}$$

El ángulo de la dirección se puede ahora expresar como (ver ec. 3.1):

$$\delta = \frac{L}{R} + a_y \left[ \left( \frac{W_f}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \right) + \left( \frac{2W_f b_f \Delta F_{zf}^2}{C_{\alpha f}^2} - \frac{2W_r b_r \Delta F_{zr}^2}{C_{\alpha r}^2} \right) \right]$$

El último término de la ecuación representa el incremento en el coeficiente de subvirador que resulta de la distribución de momento de balanceo y la no-linealidad en la relación fuerza lateral–vertical. Las transferencias de carga en cada eje,  $\Delta F_{zf}$  y  $\Delta F_{zr}$ , se determinan mediante las ecuaciones 3.9.

Los vehículos turismo se suelen diseñar con mayor rigidez al balanceo en la suspensión delantera que en la trasera, y esto a pesar de que, en relación a la carga, la suspensión delantera es más flexible que la trasera. Para conseguirlo, se dispone de rigidizadores de balanceo (barras estabilizadoras, ver Apartado 6.4.5) que se montan en el eje delantero o bien en los dos ejes. La razón que justifica lo anterior está basada en la distribución del momento de balanceo. Demasiada transferencia en el eje trasero puede contribuir excesivamente al comportamiento sobrevirador del vehículo (último término de la expresión anterior negativo).

En vehículos industriales es fácil que se presente el carácter sobrevirador a partir de cierto valor de la aceleración centrífuga. La razón es que la transferencia de carga en el eje trasero es mucho mayor que en el delantero, y esto debido a lo siguiente:

1. La suspensión trasera es considerablemente más rígida que la delantera con lo que la rigidez al balanceo es muy superior.
2. La carga suele estar desplazada hacia el eje trasero.
3. El bastidor suele ser tan flexible que permite que la parte trasera gire más que la delantera. La transferencia de carga en el eje trasero es entonces superior a la que correspondería a un bastidor totalmente rígido.
4. El centro de balanceo de la suspensión trasera suele ser más alto que el de la delantera. Además, la carga equivalente en el eje trasero tiene un centro de gravedad más alto que la correspondiente al eje delantero.

Muchos camiones pueden pasar al régimen sobrevirador para valores de la aceleración lateral inferiores al umbral de vuelco. Para evitar que se produzca inestabilidad es necesario modificar la configuración del vehículo. Estudios paramétricos demuestran que la intervención más eficaz consiste en combinar la rigidización a torsión del bastidor con el incremento de rigidez al vuelco de la suspensión delantera.

Puesto que la transferencia de carga es función de la aceleración lateral, se tiene que, en vehículos industriales, el coeficiente de subvirador no es constante, la influencia de la transferencia de carga es no-lineal. Para estos casos es útil representar el diagrama de

comportamiento en ejes ( $v^2/gR, L/R - \delta$ ). Un ejemplo se muestra en la Figura 3.10. En este caso el vehículo es subvirador para pequeños valores de la aceleración lateral, pasando a ser sobrevirador cuando se ha transferido una carga suficiente.

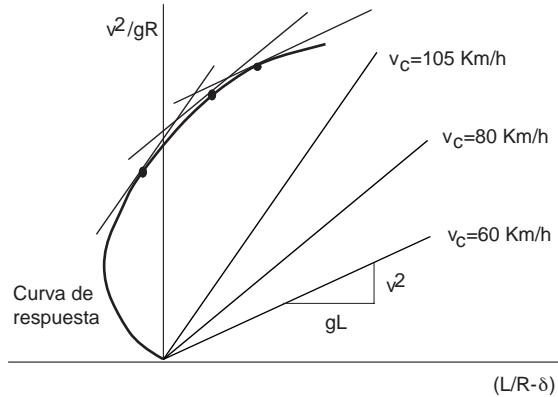


Figura 3.10: Diagrama de comportamiento no-lineal.

La relación de comportamiento:

$$\delta = \frac{L}{R} + U(a_y) a_y \quad a_y = \frac{v^2}{gR}$$

se expresa, en los nuevos ejes, como:

$$a_y = -\frac{1}{U} \left( \frac{L}{R} - \delta \right)$$

La pendiente de la curva en los nuevos ejes es  $-1/U$ , sin embargo, puesto que el problema es no lineal, no es riguroso expresar la condición de subvirador como  $U > 0$ . El comportamiento es subvirador si el ángulo de direccionamiento de las ruedas aumenta con la aceleración lateral:

$$\frac{\partial \delta}{\partial a_y} > 0$$

Considerando la velocidad como parámetro, y el radio como única variable independiente, se puede obtener la siguiente relación equivalente:

$$\frac{\partial a_y}{\partial \left( \frac{L}{R} - \delta \right)} > \frac{v^2}{Lg}$$

Esto es, el comportamiento es subvirador hasta aceleraciones laterales para las que la relación anterior deja de ser cierta (Fig. 3.10).

### 3.3.3 Variación del Ángulo de Caída

Algunas suspensiones permiten el giro (inclinación) de las ruedas respecto de la carretera cuando se produce el balanceo de la masa suspendida. En algunos mecanismos de

suspensión (como el de eje rígido) la inclinación de las ruedas es muy pequeña, casi despreciable. En otros, el giro puede llegar a ser importante. Esta variación del ángulo de inclinación ( $\gamma$ ) influye en la fuerza lateral que soporta el neumático en cuestión. La relación  $F_y(\gamma)$  se comenta en el párrafo siguiente. Una discusión más exhaustiva puede encontrarse en el capítulo 8.

Se ha comentado que un neumático rodando es incapaz de generar fuerza lateral sin ángulo de deriva, o lo que es lo mismo, cualquier fuerza lateral produce invariablemente una deformación de la zona de contacto que da lugar al ángulo de deriva. La afirmación anterior no es cierta para ángulos de caída no nulos. Un neumático inclinado respecto de la carretera puede soportar hasta un máximo de fuerza lateral sin deformación lateral (Fig. 3.11), esto es, el ángulo de inclinación “produce” fuerza lateral. Este ángulo de inclinación es menos efectivo que el de deriva en la generación de fuerza, en la relación 1–6 aproximadamente. La misma  $F_y$  se consigue con  $\alpha = 1^\circ$  que con  $\gamma = 6^\circ$ .

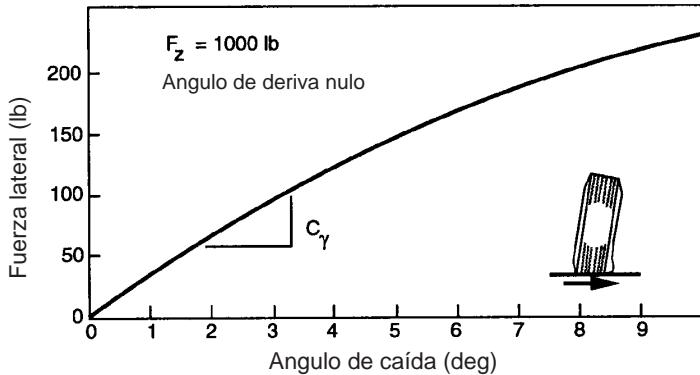


Figura 3.11: Fuerza lateral debida a la caída del neumático.

Las motocicletas necesitan, por razones de equilibrio, grandes ángulos de inclinación para negociar las curvas, por lo tanto, los ángulos de deriva que se generan para un determinado nivel de carga lateral no son tan elevados como en automóviles. Esta es la razón por la que los neumáticos radiales no se utilicen en motocicletas con la profusión que se están utilizando en automóviles. Incluso, los neumáticos que se venden como radiales para vehículos de dos ruedas, no responden totalmente al diseño de cordones radiales.

Con ángulo de inclinación no despreciable, la fuerza lateral total viene dada por:

$$F_y = C_\alpha \alpha + C_\gamma \gamma \quad (3.10)$$

donde  $C_\gamma$  es la “rigidez a caída”, y  $\gamma$  es el ángulo de inclinación (caída). Éste depende de la aceleración lateral y del tipo de suspensión. Para pequeños ángulos de balanceo, se puede aproximar mediante su expansión lineal de la forma:

$$\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial a_y} a_y = \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial a_y} a_y \quad (3.11)$$

El primer coeficiente del lado derecho está relacionado directamente con la cinemática del mecanismo de la suspensión, mientras que el segundo es el coeficiente de balanceo ( $R_\phi$ )

definido en la ecuación 3.8. Despejando  $\alpha$  de 3.10 y utilizando el valor de  $\gamma$  dado por 3.11 se tiene:

$$\alpha = \frac{W_i}{C_\alpha} a_y - \frac{C_\gamma}{C_\alpha} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} R_\phi a_y$$

( $i = f, r$ ), particularizando esta expresión para los ejes delantero ( $f$ ) y trasero ( $r$ ), y haciendo uso de la relación 3.1, se tiene:

$$\delta = \frac{L}{R} + \frac{v^2}{gR} \left[ \left( \frac{W_f}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \right) - \left( \frac{C_{\gamma f}}{C_{\alpha f}} \frac{\partial \gamma_f}{\partial \phi} - \frac{C_{\gamma r}}{C_{\alpha r}} \frac{\partial \gamma_r}{\partial \phi} \right) R_\phi \right]$$

El último término de la ecuación anterior representa la contribución al comportamiento direccional del ángulo de inclinación de las ruedas respecto de la carretera. Esta contribución puede ser subviradora o sobreviradora dependiendo de los valores relativos de los términos de rigidez  $C_{\gamma f}$  y  $C_{\gamma r}$ , y de la variación de los ángulos de caída en las ruedas delanteras y traseras con la inclinación del cuerpo del vehículo. Para un automóvil con eje rígido trasero es muy posible que la contribución sea sobreviradora (término entre paréntesis positivo). En vehículos con suspensión independiente en las cuatro ruedas, la contribución puede tener cualquier polaridad o incluso ser nula.

### 3.3.4 Direccionamiento Debido al Balanceo del Vehículo

En algunos sistemas de suspensión se puede inducir un cierto direccionamiento de las ruedas como consecuencia del giro del vehículo. El efecto puede ser subvirador o sobrevirador dependiendo de la cinemática de los mecanismos de la suspensión delantera y trasera. Como ejemplo, se comenta el caso de eje rígido conectado como semirremolque.

Con el giro del bastidor (rígido) se modifica la posición de los anclajes de los basculantes. Sea un giro a la izquierda y un eje trasero (Fig. 3.12). En la vista oblicua de la Figura 3.12 se muestra la tendencia de movimiento de los ejes de las ruedas cuando el centro de rotación está por encima de los anclajes. La deformación hace girar al eje (trasero) hacia el exterior de la curva con lo que se tiene una contribución sobreviradora. En la Figura 3.13 se muestran las distintas regiones en donde puede estar situado el anclaje del basculante y su contribución al comportamiento direccional.



Figura 3.12: Direccionamiento por balanceo en suspensión semirremolque.

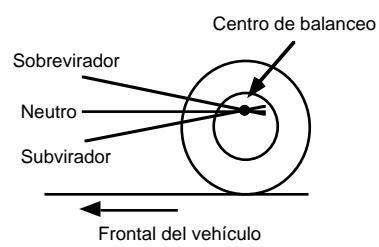


Figura 3.13: Carácter de la contribución direccional en función de la posición de los anclajes de la suspensión.

### 3.3.5 Flexibilidad Lateral de la Suspensión

Además del fenómeno anterior, es posible que el mecanismo de la suspensión permita el giro del eje en el plano horizontal como consecuencia de la flexibilidad lateral de la suspensión. Se trata de ejes que adoptan un cierto ángulo de direccionamiento cuando están sometidos a cargas laterales (“ejes autodireccionales”).

Existen algunos modelos de automóviles comerciales (p.e. Citroen ZX) con diseños de este tipo. Los anclajes flexibles del eje permiten el movimiento direccional. En general es el eje trasero el que gira en la misma dirección que las ruedas delanteras. La contribución es entonces subviradora.

## 3.4 Medida del Coeficiente de Subvirador

Existen dos ensayos de fácil realización para medir las características direccionales estacionarias en automóviles. El primero de ellos es el “*Ensayo Sobre Curva de Radio Constante*”. El vehículo se conduce por una curva de radio constante a distintas velocidades. Para cada velocidad se registra el ángulo de giro de las ruedas directrices ( $\delta$ ). Los resultados de los ensayos se representan en una gráfica como la de la Figura 3.14. De acuerdo con la ecuación 3.2, la pendiente de la curva coincide con el coeficiente de subvirador:

$$\frac{\delta}{a_y} = U$$

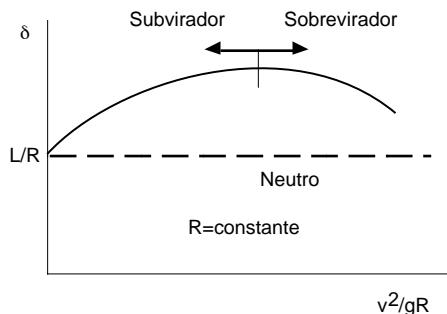


Figura 3.14: Resultados del ensayo sobre curva de radio constante.

Otro ensayo de fácil ejecución es el “*Ensayo con Ángulo de Giro Constante*”. El vehículo se conduce a distintas velocidades manteniendo el ángulo de giro invariable. Evidentemente, el ensayo es muy similar al anterior. Sólo varían los parámetros a medir y la forma de obtención del coeficiente  $U$ . En este caso se mide la aceleración lateral  $a_y$  y la velocidad longitudinal  $v$ . La curvatura ( $1/R = g a_y / v^2$ ) se representa para cada valor de la aceleración lateral (Fig. 3.15). La pendiente de la curva está relacionada con el coeficiente de subvirador:

$$\frac{d(1/R)}{da_y} = -\frac{U}{L}$$

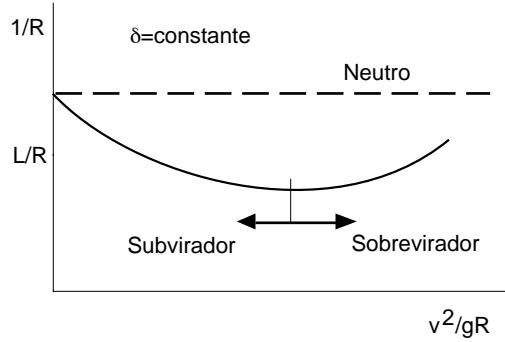


Figura 3.15: Resultados del ensayo con radio de giro constante.

### 3.5 Respuesta Transitoria y Estabilidad

El análisis de la respuesta transitoria y de la estabilidad direccional de un vehículo de dos ejes puede realizarse haciendo uso de un modelo sencillo como el del Apartado 3.2. Para escribir las ecuaciones de equilibrio dinámico se adopta un sistema de referencia en movimiento con el automóvil (ejes  $xyz$ , Fig. 3.16). La aceleración absoluta en estos ejes es:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\phi} \wedge \mathbf{v}$$

Esto es:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x - \dot{\phi}_z v_y \\ a_y &= \dot{v}_y - \dot{\phi}_z v_x \end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio son entonces (ver Fig. 3.16):

$$\begin{aligned} \frac{W}{g}(\dot{v}_x - \dot{\phi}_z v_y) &= F_{xf} \cos \delta + F_{xr} - F_{yf} \sin \delta \\ \frac{W}{g}(\dot{v}_y + \dot{\phi}_z v_x) &= F_{yf} \cos \delta + F_{yr} + F_{xf} \sin \delta \\ I_z \ddot{\phi}_z &= aF_{yf} \cos \delta + aF_{xf} \sin \delta - bF_{yr} \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $F_{xr}$  y  $F_{xf}$  son las fuerzas longitudinales (de tracción o frenado) en cada eje,  $I_z$  es el momento de inercia del vehículo respecto del eje  $z$ . En la formulación del equilibrio se ha supuesto que el vehículo es simétrico respecto del plano medio, y que el movimiento de vuelco (o balanceo) es despreciable.

Las fuerzas laterales en las ecuaciones anteriores están relacionadas con los ángulos de deriva mediante la correspondiente rigidez a deriva. Estos ángulos pueden obtenerse a partir de las componentes de la velocidad para valores pequeños del ángulo de giro de las ruedas directrices (ver Fig. 3.16):

$$\alpha_f = \delta - \frac{a\dot{\phi}_z + v_y}{v_x} \quad \alpha_r = \frac{b\dot{\phi}_z - v_y}{v_x}$$

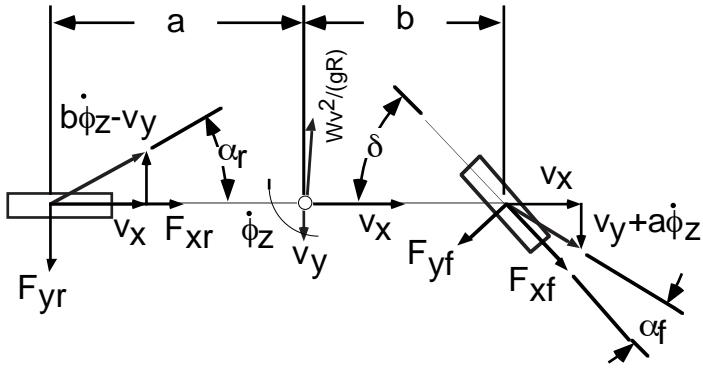


Figura 3.16: Sistema de referencia en movimiento con el automóvil.

Sustituyendo estas expresiones en las dos últimas ecuaciones de 3.12, y suponiendo, para simplificar, que el vehículo está acelerando con tracción trasera ( $F_{xf} = 0$ ) se tiene la ecuación que describe el comportamiento direccional transitorio del vehículo:

$$\begin{aligned} \frac{W}{g} \dot{v}_y &= \left[ \frac{W}{g} v_x + \frac{a C_{\alpha f} - b C_{\alpha r}}{v_x} \right] \dot{\phi}_z + \left[ \frac{C_{\alpha f} + C_{\alpha r}}{v_x} \right] v_y = C_{\alpha f} \delta(t) \\ I_z \ddot{\phi}_z &= \left[ \frac{a^2 C_{\alpha f} + b^2 C_{\alpha r}}{v_x} \right] \dot{\phi}_z + \left[ \frac{a C_{\alpha f} - b C_{\alpha r}}{v_x} \right] v_y = a C_{\alpha f} \delta(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Las fuerzas y momentos exteriores de origen aerodinámico se suman al lado derecho de las ecuaciones 3.13. La velocidad lateral, y la velocidad angular de pivotamiento, se obtienen (al resolver el Sistema 3.13) como función del tiempo a partir de la ley  $\delta(t)$ , que describe la variación del ángulo de giro con el tiempo. La Figura 3.17 muestra la evolución de la velocidad angular para el caso de un giro instantáneo de la dirección ( $\delta(t) = H(t)$ , con  $H(t)$  la función de Heaviside). Se observa que, como en la mayoría de procesos transitorios, el valor máximo de la respuesta (en este caso la velocidad angular de pivotamiento) supera al valor estacionario. Además, la rigidez a deriva influye en el grado de variación de la velocidad, y en el tiempo que transcurre hasta alcanzar condiciones estacionarias.

La estabilidad direccional se estudia, como en todo sistema dinámico, en la ecuación homogénea. Se investiga entonces la posible existencia de solución en ausencia de excitación exterior ( $\delta = 0$ ). En este caso se prueba con soluciones del tipo:

$$\begin{aligned} v_y &= A_1 e^{\psi t} \\ \dot{\phi}_z &= A_2 e^{\psi t} \end{aligned}$$

donde  $(A_1, A_2)$  es el autovector y  $\psi$  el autovalor. Al sustituir estas expresiones en las ecuaciones 3.13 se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas. La existencia de solución distinta de la trivial requiere que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo. De la correspondiente ecuación característica se obtiene el autovalor  $\psi$ . La solución será inestable, es decir, no tendente a la solución estacionaria, si el autovalor tiene parte real positiva. De la manipulación algebraica de la ecuación característica se obtiene que la

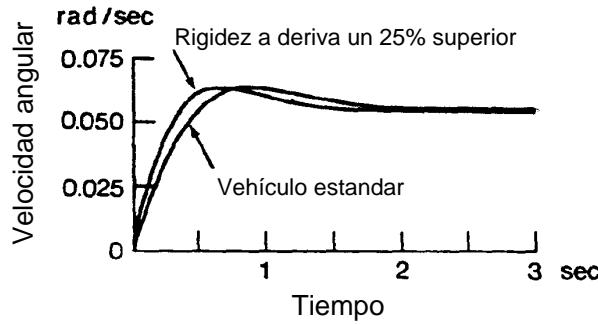


Figura 3.17: Velocidad angular de pivotamiento para dos valores de la rigidez a deriva.

condición de parte real positiva equivale a:

$$L + \frac{v_x^2}{g} U \leq 0$$

La desigualdad anterior no puede satisfacerse en el caso de automóviles subviradores o neutros  $U \geq 0$ , en cambio, para vehículos sobreviradores ( $U < 0$ ), la desigualdad se satisface para ciertos valores de la velocidad. Los automóviles sobreviradores son direccionalmente inestables para velocidades superiores a la “*Velocidad Crítica*” ( $v_{cr}$ ):

$$v_{cr} = \sqrt{\frac{Lg}{-U}}$$

Esta expresión coincide con la obtenida en el apartado 3.3. La velocidad crítica, en condiciones estacionarias, se definió como aquella velocidad para la que el vehículo se mantiene en curva con las ruedas en posición longitudinal. Ahora podemos comprobar que a esta velocidad el vehículo se hace inestable.

La palabra inestable no quiere decir “incontrolable” sino, en todo caso, “difícil de controlar”. Un ejemplo claro de sistema inestable, pero controlable, es una barra vertical apoyada por su extremo inferior en el dedo de un individuo (sistema de control). El equilibrio vertical es inestable pues cualquier perturbación tiende a amplificarse y hacer caer la barra. Sin embargo, con suficiente habilidad, se puede mantener la barra en posiciones próximas a la vertical.

### 3.6 Vehículos con Más de Dos Ejes

Los vehículos con más de dos ejes (no articulados) no pueden negociar una curva sin generar, aún para velocidades muy pequeñas, ángulos de deriva en los neumáticos. En la Figura 3.18 se muestran las fuerzas en los neumáticos traseros que dan lugar a un par que se opone al giro. Para ángulos y velocidad pequeños:

$$|F_{y2}| = |F_{y3}| + |F_{y1}|$$

donde  $F_{yi}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) es la fuerza lateral en el eje  $i$ . Del equilibrio anterior se deduce que la fuerza lateral en el segundo eje es superior a la del tercero. El ángulo de deriva en este

eje es superior, con lo que el centro de rotación está más próximo al tercer eje. La batalla efectiva es superior a la geométrica, definida como la distancia entre el eje delantero y la linea media entre ejes traseros.

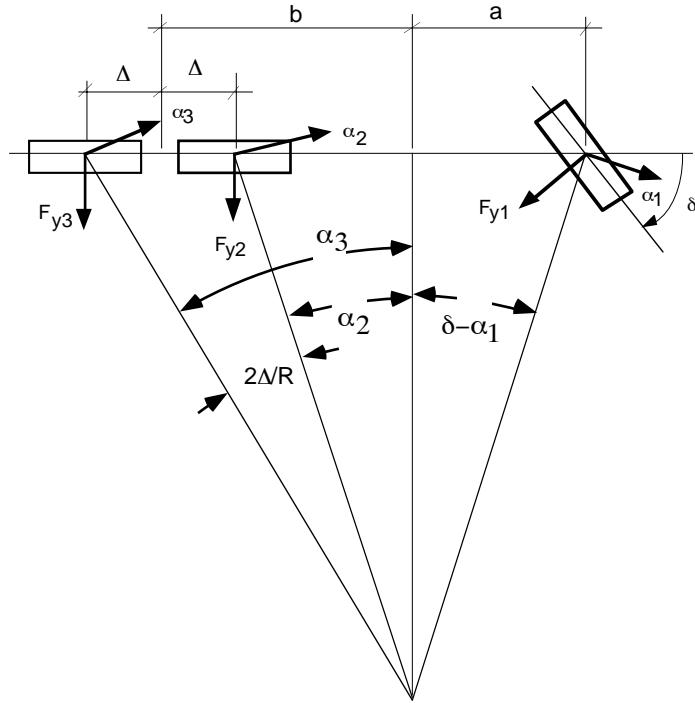


Figura 3.18: Ángulos de deriva en los neumáticos del bogie trasero.

El empleo de ruedas dobles en algunos de los ejes del camión genera un momento vertical que no se debe despreciar en las ecuaciones de equilibrio. En la Figura 3.19 se muestra la cinemática del giro de un par de neumáticos separados una distancia  $2D$ . La velocidad lineal de cada rueda es:

$$u_o = \dot{\phi}_z(R + D) \quad u_i = \dot{\phi}_z(R - D)$$

donde  $u_o$  y  $u_i$  son las velocidades lineales de la rueda exterior e interior, respectivamente.  $R$  es el radio de la curva, y  $2D$  es la separación entre neumáticos. Los pseudo-deslizamientos longitudinales (ver Capítulo 8, Apartado 8.8.3) para cada rueda vienen dados por:

$$S_{xo} = 1 - \frac{\omega R_e}{u_o} \quad S_{xi} = 1 - \frac{\omega R_e}{u_i}$$

donde  $S_{xo}$  y  $S_{xi}$  son los pseudo-deslizamientos en el neumático exterior de la rueda doble,  $\omega$  es la velocidad angular de giro de la rueda, y  $R_e$  es su radio efectivo. Teniendo en cuenta que  $u = \omega R_e = \dot{\phi} R$ , los pseudo-deslizamientos vienen dados por:

$$S_{xo} = 1 - \frac{R}{R + D} \quad S_{xi} = 1 - \frac{R}{R - D}$$

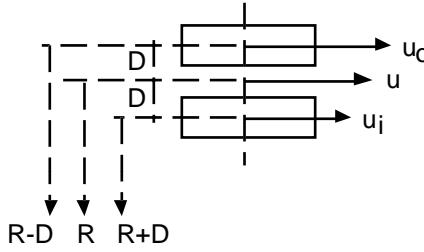


Figura 3.19: Giro de ruedas dobles.

La fuerza longitudinal generada en cada rueda es proporcional al pseu-dodeslizamiento. La constante de proporcionalidad es la rigidez longitudinal del neumático  $C'_s$ . El momento que producen las dos fuerzas opuestas es:

$$M_z = C_s \frac{D^2}{R}$$

donde  $C_s = 4C'_s$ .

La resolución del problema (“hiperestático”) requiere de ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad. Las dos ecuaciones de equilibrio lateral son:

$$\begin{aligned} F_{y1} + F_{y1} + F_{y1} &= \frac{Wv^2}{gR} \\ aF_{y1} - (b - \Delta)F_{y2} - (b + \Delta)F_{y3} &= M_{z2} + M_{z3} \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $\Delta$  es la separación entre ejes del tandem,  $b$  es la distancia horizontal entre el centro de gravedad y el centro del tandem, y  $M_{z2}$  y  $M_{z3}$  son los momentos generados en los ejes con ruedas dobles.

Las ecuaciones de compatibilidad requieren que el centro instantáneo de rotación (pivotamiento) sea único para todo el vehículo, en cuyo caso:

$$\begin{aligned} \alpha_3 - \alpha_2 &\approx \frac{2\Delta}{R} \\ \alpha_3 + \delta - \alpha_1 &\approx \frac{L + R}{R} \end{aligned}$$

donde  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son los ángulos de deriva acomodados en cada eje. Las fuerzas laterales desarrolladas en cada eje son proporcionales al ángulo de deriva al que trabaja el eje en cuestión. Con esta condición, y teniendo en cuenta las expresiones para el momento de pivoteo en cada neumático doble, se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} C_{\alpha 1} & C_{\alpha 2} & C_{\alpha 3} & 0 \\ aC_{\alpha 1} & -(b - \Delta)C_{\alpha 2} & -(b + \Delta)C_{\alpha 3} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Wv^2}{gR} \\ (C_{s2} + C_{s3})\frac{D^2}{R} \\ \frac{2\Delta}{R} \\ \frac{L + R}{R} \end{Bmatrix}$$

donde  $C_{\alpha i}$  y  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son la rigidez a deriva y el ángulo de deriva, respectivamente, del eje  $i$ ,  $C_{s i}$  ( $i = 2, 3$ ) es la rigidez longitudinal del eje  $i$ . Este sistema proporciona el

ángulo de dirección necesario (y los ángulos de deriva que se desarrollan en cada eje) para que un vehículo rígido de tres ejes recorra una curva de radio  $R$  a una velocidad  $v$ .

Si se utiliza algún tipo de dispositivo para igualar la carga vertical sobre cada eje del tandem, se pueden hacer las siguientes simplificaciones:

$$F_{z2} = F_{z3} = \frac{F_{zr}}{2} \quad C_{\alpha 2} = C_{\alpha 3} = \frac{C_{\alpha r}}{2} \quad C_{s2} = C_{s3} = \frac{C_{sr}}{2}$$

donde  $F_{zr}$ ,  $C_{\alpha r}$ , y  $C_{sr}$  están definidos por las relaciones anteriores. La expresión resultante para el ángulo de la dirección es la siguiente:

$$\delta = \frac{L}{R} + \frac{\Delta^2 + D^2 \frac{C_{sr}}{C_{\alpha r}}}{LR} \left( 1 + \frac{C_{\alpha r}}{C_{\alpha 1}} \right) + \frac{v^2}{gR} \left( \frac{F_{z1}}{C_{\alpha 1}} - \frac{F_{zr}}{C_{\alpha r}} \right) \quad (3.15)$$

La relación de Ackerman se modifica como consecuencia de la existencia de dos ejes traseros. El coeficiente de subvirador y la velocidad crítica tienen la misma expresión que para el caso de dos ejes, siempre que se utilicen las fórmulas adecuadas para la rigidez del eje trasero y la batalla equivalente.

La expresión 3.15 permite determinar la batalla equivalente del vehículo de tres ejes o, lo que es más interesante, la curva de radio mínimo que es capaz de describir.

### 3.7 Combinación Tractor–Semirremolque

Las ecuaciones de compatibilidad para una combinación tractor–semirremolque son las siguientes (ver Fig. 3.20):

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{R} &= \delta - \alpha_1 + \alpha_2 \\ \frac{L_2}{R} &= \Gamma - \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{\chi}{R} \end{aligned}$$

donde  $L_1$  es la batalla de la cabeza tractora,  $L_2$  es la distancia entre el pivote (quinta rueda) y el eje del semirremolque,  $\Gamma$  es el ángulo relativo entre cabeza tractora y el semirremolque, y  $\chi$  es la distancia entre la quinta rueda y el eje trasero de la tractora.

La primera relación es cierta cualquiera que sea la configuración detrás del tractor, sin embargo, los valores concretos de los ángulos de deriva están influenciados por el semirremolque. Teniendo en cuenta la relación entre ángulos de deriva y fuerza lateral, así como la “proporcionalidad” entre equilibrio lateral y vertical:

$$\frac{F_{yi}}{v^2/R} = \frac{F_{zi}}{g}$$

se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{L_1}{R} + U \frac{v^2}{gR} \\ \Gamma &= \frac{L_t}{R} + U_t \frac{v^2}{gR} \end{aligned}$$

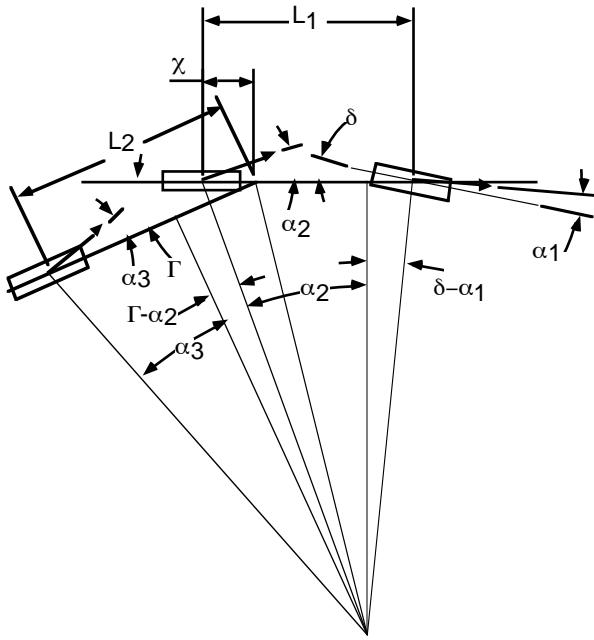


Figura 3.20: Cinemática del giro en una combinación tractor–semirremolque.

donde  $L_t = L_2 - \chi$ , y  $U$  y  $U_t$  son los coeficientes de subvirador para el tractor y el semirremolque, respectivamente. Éstos se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U &= \frac{F_{z1}}{C_{\alpha 1}} - \frac{F_{z2}}{C_{\alpha 2}} \\ U_t &= \frac{F_{z2}}{C_{\alpha 2}} - \frac{F_{z3}}{C_{\alpha 3}} \end{aligned}$$

El ángulo girado por el semirremolque ( $\Gamma$ ) por unidad de ángulo girado por la dirección ( $\delta$ ), tiene la expresión:

$$\frac{\Gamma}{\delta} = \frac{\frac{L_t}{L_1} + U_t \frac{v^2}{L_1 g}}{1 + U \frac{v^2}{L_1 g}}$$

Esta expresión tiene aspectos diferentes según los signos del coeficiente de subvirador en el tractor y en el semirremolque. En las Figuras 3.21, 3.22, 3.23, y 3.23 se muestran todos los casos posibles. Puede verse que la única opción de inestabilidad se produce cuando el tractor es sobrevirador (Figs. 3.23 y 3.24)). Cuando  $U < 0$  y  $U_t > 0$  (Fig. 3.23), se alcanza una velocidad crítica en la que la composición se cierra en “tijera”. Cuando los dos vehículos de la composición son sobreviradores (Fig. 3.24), se alcanza, de nuevo, una velocidad crítica. El comportamiento será de tijera o de “latigazo” dependiendo de que el cociente de longitudes ( $L_t/L$ ) sea mayor o menor que el de coeficientes de subvirador ( $U_t/U$ ). En el caso en que el semirremolque es sobrevirador y el tractor es subvirador (Fig. 3.22)) se alcanza una velocidad en la que el ángulo de giro del semirremolque es nulo. Esto es, el semirremolque se mantiene alineado con el tractor. No obstante, es posible negociar la curva de esta manera.

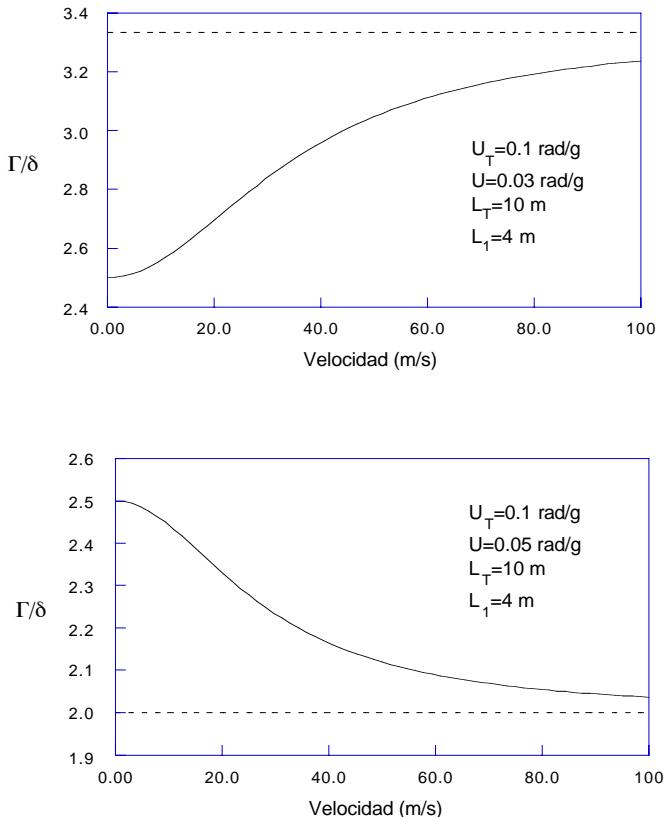


Figura 3.21: Estabilidad dinámica de la combinación tractor–semirremolque. Casos de tractor y semirremolque subviradores.

### 3.8 Dirección a las Cuatro Ruedas

Un sistema de dirección a las cuatro ruedas permite reducir considerablemente el radio de giro mínimo de un automóvil, mejorando así la maniobrabilidad del mismo a bajas velocidades. Además, un tal sistema puede, dependiendo de las distintas políticas de giro de ruedas traseras, mejorar la respuesta dinámica del vehículo en cuanto al comportamiento direccional a alta velocidad. También es posible, sin embargo, que un sistema de este tipo excite modos atípicos que introduzcan riesgo en la conducción.

Para mejorar el comportamiento direccional a alta velocidad es necesario girar las ruedas traseras en el mismo sentido que las delanteras. Con esto se consigue retrasar el centro instantáneo de rotación, disminuyendo así el ángulo de deriva global del vehículo (ángulo que forma la velocidad en el centro de gravedad con la dirección longitudinal del automóvil). Además, al girar las ruedas en este sentido, se consigue que las fuerzas centrípetas en las ruedas delanteras y traseras se generen simultáneamente. En la Figura 3.25 se muestra un modelo de bicicleta de un vehículo convencional con dirección en las ruedas delanteras.

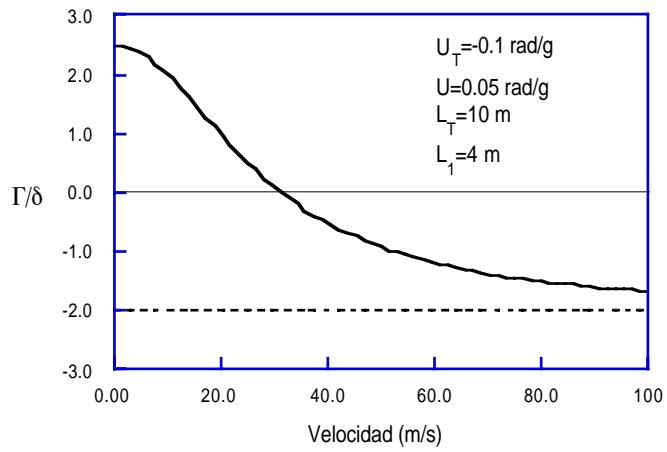


Figura 3.22: Estabilidad dinámica de la combinación tractor–semirremolque. Caso de semirremolque sobrevirador.

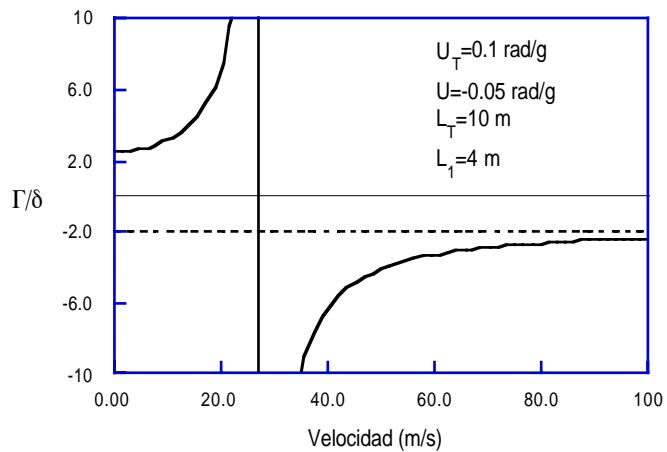


Figura 3.23: Estabilidad dinámica de la combinación tractor–semirremolque. Caso de tractor sobrevirador.

El ángulo de deriva global ( $\beta$ ) viene dado por:

$$\beta = \alpha_r - \frac{b}{R}$$

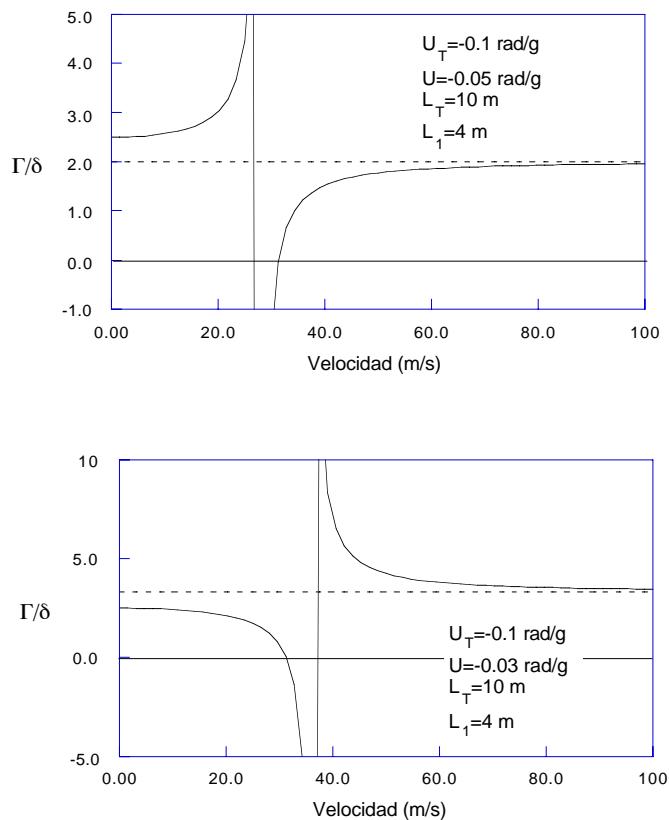


Figura 3.24: Estabilidad dinámica de la combinación tractor–semirremolque. Casos de tractor y semirremolque sobreviradores.

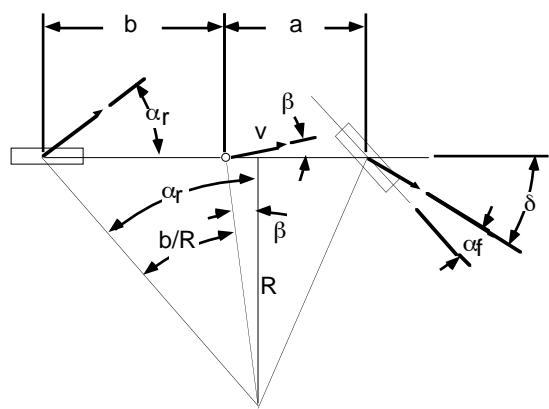


Figura 3.25: Ángulo de deriva global.

que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{W_r v^2}{C_{\alpha r} R g} - \frac{b}{R}$$

Para velocidades bajas,  $\beta$  es negativo, el vehículo se cierra sobre la curva. Sin embargo, a velocidades altas, el ángulo de deriva global puede hacerse positivo, el centro de gravedad sigue una trayectoria abierta respecto de la dirección longitudinal del automóvil, la sensación es de falta de control. La condición de  $\beta > 0$  se traduce en:

$$v > \sqrt{\frac{b g C_{\alpha r}}{W_r}}$$

que, para valores típicos de los parámetros, puede ser una velocidad bastante baja. La gran mayoría de los automóviles, por tanto, adolecen de este defecto.

Para hacer que el ángulo  $\beta$  se aproxime a cero en condiciones de alta velocidad, es necesario disponer de un sistema de dirección en los dos ejes de manera que las ruedas traseras giren en el mismo sentido que las delanteras. Existen distintos procedimientos para el control del giro de las ruedas posteriores. Mazda ha adoptado un sistema de control electrónico para determinar el ángulo de giro de las ruedas posteriores en función del ángulo de giro del volante y de la velocidad. Una familia de curvas utilizada para el control en este tipo de direcciones se muestra en la Figura 3.26. Para velocidades pequeñas, el ángulo girado por las ruedas traseras tiene sentido contrario al girado por las delanteras, con el fin de aumentar la maniobrabilidad. Para velocidades altas, los ángulos delantero y trasero tienen el mismo sentido para, como se ha comentado, intentar mejorar el comportamiento dinámico lateral.

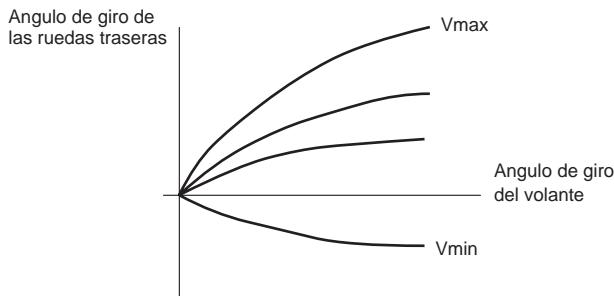


Figura 3.26: Ley de guiado para distintas velocidades.

Nalecz y Bindemann han estudiado el comportamiento dinámico de automóviles con dirección a las cuatro ruedas haciendo uso de un modelo de cuatro grados de libertad. En el trabajo se comparan las soluciones correspondientes a cuatro estrategias diferentes:

Dirección convencional a dos ruedas

Giro de ruedas traseras proporcional al de las ruedas delanteras

Giro de ruedas traseras modificado por la velocidad de giro del volante

Tanto el giro de ruedas delanteras como traseras está modificado por la velocidad de giro del volante

El resultado de la simulación numérica puede verse en la Figura 3.27. El ángulo de deriva global del vehículo se reduce considerablemente en cualquiera de los cuatro esquemas de control.

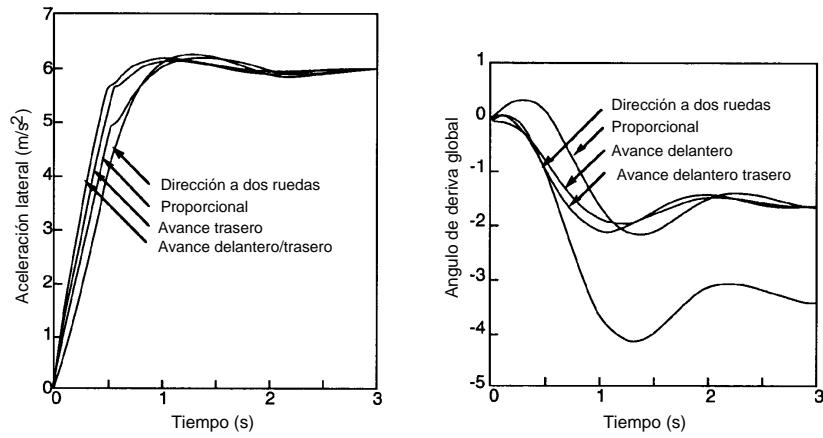


Figura 3.27: Aceleración lateral y ángulo de deriva para distintas leyes de guiado.

Una de las mayores ventajas de este tipo de sistema de dirección es la reducción del desfase entre las fuerzas laterales de los ejes delantero y trasero. En efecto, la generación de fuerza lateral en un vehículo con dirección a dos ruedas se realiza según la secuencia siguiente: al girar el volante, se giran, instantáneamente, las ruedas delanteras. Esto equivale a imponer un ángulo de deriva a estas ruedas. Como consecuencia se generan cargas laterales en el eje delantero que proporcionan un momento de pivoteo y fuerzan una trayectoria curva sobre el vehículo. Sólo cuando el automóvil comienza a ser víctima de la fuerza centrífuga, se generan fuerzas laterales en el eje trasero. Este desfase puede confundir al conductor. En un sistema de dirección a las cuatro ruedas, en cambio, todos los neumáticos acomodan un determinado ángulo de deriva en el momento en que se gira el volante. El crecimiento de fuerza lateral se produce al mismo ritmo (en fase).

### 3.9 Direccionamiento de Vehículos Oruga

En el caso de vehículos extraviarios, diseñados para circular por terrenos no preparados, las capacidades de tracción y direccionamiento se ven seriamente reducidas. Para mejorar las prestaciones se recurre al uso de cintas sobre las que se apoyan un número determinado de ruedas. El direccionamiento de este tipo de vehículos se produce al variar la velocidad de una de las cintas frente a la opuesta.

La dinámica lateral en este caso es sustancialmente diferente a la correspondiente al direccionamiento con ruedas directrices. Para velocidades bajas se puede despreciar la inercia centrífuga, con lo que el peso soportado por la cinta interior es igual al soportado por la exterior, las resistencias al movimiento en ambas cintas son, por tanto, iguales. Las

ecuaciones de equilibrio (Figura 3.28) en condiciones estacionarias, se expresan como:

$$\begin{aligned} F_o + F_i - R_{\text{tot}} &= 0 \\ \frac{B}{2}(F_o + F_i) - M_r &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  $F_o$  y  $F_i$  son las fuerzas de tracción (o frenado) en la cinta exterior e interior, respectivamente,  $R_{\text{tot}}$  es la resistencia total (ambas cintas) a la rodadura,  $M_r$  es el momento generado por las fuerzas laterales en las dos cintas, y  $B$  es la distancia entre cintas.

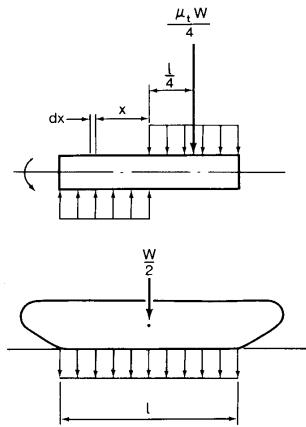


Figura 3.28: Equilibrio de fuerzas para velocidades bajas.

Si el centro de gravedad se supone situado a la mitad de la longitud de las cintas, entonces las fuerzas laterales son simétricas respecto del CDG, ya que no existe en el modelo ninguna otra fuerza lateral. El momento y fuerza resistentes son:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{\mu WL}{4} \\ R_{\text{tot}} &= \rho W \end{aligned}$$

donde  $\mu$  y  $\rho$  son los coeficientes de rozamiento transversal y de resistencia a la rodadura, respectivamente,  $W$  es el peso del vehículo, y  $L$  la longitud de apoyo de las cintas. Haciendo uso de estas expresiones se resuelve el sistema 3.16:

$$\begin{aligned} F_o &= \frac{\rho W}{2} + \frac{\mu WL}{4B} \\ F_i &= \frac{\rho W}{2} - \frac{\mu WL}{4B} \end{aligned} \quad (3.17)$$

que proporciona los valores de las fuerzas que es necesario aplicar a cada una de las cintas para provocar el giro del vehículo. Si el coeficiente de resistencia a la rodadura es menor que  $(\mu L)/(2B)$ , entonces la fuerza sobre la cinta interior es negativa.

La fuerza máxima que se puede transmitir a través de una cinta está limitada por las dimensiones de ésta y por las características resistentes del terreno. Haciendo uso de un

modelo sencillo de comportamiento mecánico del terreno, puede verse que esta fuerza está limitada por:

$$F_o \leq cbL + \frac{W \tan \phi}{2}$$

donde  $c$  y  $\phi$  son la cohesión y el ángulo de cortadura interno del suelo, y  $b$  es la anchura de una cinta. Haciendo uso de las expresiones 3.17 se tiene que la relación de aspecto del vehículo está limitada por las características del terreno:

$$\frac{L}{B} \leq \frac{2}{\mu} \left( \frac{2cLb}{W} + \tan \phi - \rho \right)$$

Vehículos con relaciones de aspecto mayores no pueden realizar giros. Así, para terreno arenoso ( $c = 0$ ,  $\phi = 30^\circ$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\rho = 0.1$ ) se tiene que  $L/B \leq 1.91$ , mientras que es posible diseñar vehículos más largos (frente al ancho,  $L/B \leq 2.88$ ) si van a moverse por terreno arcilloso ( $c = 3.45 KPa$ ,  $\phi = 10^\circ$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $\rho = 0.1$ , se ha tomado  $p = W/(2Lb) = 6.9 KPa$ ).

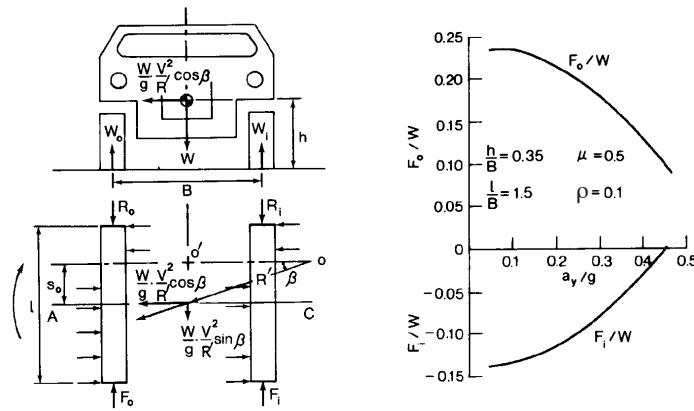


Figura 3.29: Equilibrio de fuerzas para velocidades medias y altas.

Un modelo sencillo para describir el giro a mayores velocidades se muestra en la Figura 3.29. En este caso se produce transferencia de peso de la cinta interior a la exterior. La inercia centrífuga se equilibra mediante rozamiento lateral en las cintas. La distribución de fuerzas laterales deja de ser simétrica y el centro instantáneo de rotación se adelanta respecto del centro de gravedad. Del equilibrio de fuerzas laterales se tiene:

$$s_0 = \frac{La_y}{2\mu}$$

El avance del centro de rotación ( $s_0$ ) es función de la aceleración transversal. Conocido  $s_0$  se puede obtener el momento resistente:

$$M_r = \frac{\mu WL}{4} \left[ 1 - \left( \frac{a_y}{\mu} \right)^2 \right]$$

El peso soportado por cada cinta es:

$$W_o = \frac{W}{2} + \frac{W a_y h}{B} \quad W_i = \frac{W}{2} - \frac{W a_y h}{B}$$

donde  $h$  es la altura del CDG. Las fuerzas de resistencia longitudinales son:

$$R_o = \left( \frac{1}{2} + \frac{a_y h}{B} \right) W \rho \quad R_i = \left( \frac{1}{2} - \frac{a_y h}{B} \right) W \rho$$

Teniendo en cuenta el valor de  $M_r$  y la componente longitudinal de la inercia centrífuga:

$$a_{yx} = -\frac{v^2 s_0}{g R^2}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} F_0 &= \left( \frac{W}{2} + \frac{h W a_y}{B} \right) \rho + \frac{W a_y s_0}{2R} + \frac{\mu W L}{4B} \left[ 1 - \left( \frac{a_y}{\mu} \right)^2 \right] \\ F_i &= \left( \frac{W}{2} - \frac{h W a_y}{B} \right) \rho + \frac{W a_y s_0}{2R} - \frac{\mu W L}{4B} \left[ 1 - \left( \frac{a_y}{\mu} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Estas relaciones se muestran en la Figura 3.29 en función de la aceleración transversal, y para unos valores determinados de los parámetros del problema. Puede verse que, en este caso, la fuerza sobre la cinta interior es negativa para valores de la aceleración menores que 0.45 (es necesario frenar esta cinta para tomar la curva). La magnitud de las fuerzas aplicadas a cada una de las cintas disminuye con la aceleración transversal. Esto es debido, fundamentalmente, al aumento de la fuerza centrífuga (y de su momento respecto del centro de giro) que da lugar a la disminución del momento resistente  $M_r$ .

# Capítulo 4

## Vuelco

Muchos accidentes de circulación están ocasionados por el vuelco de vehículos. Esto es especialmente verdad para vehículos industriales. En este caso, condicionantes constructivos y operativos hacen que la aceleración lateral que produce el vuelco sea relativamente baja. El análisis de los factores que intervienen en el vuelco de camiones puede clarificar el problema y generar normas de diseño, tanto para los vehículos como para las carreteras.

### 4.1 Vuelco Cuasi-Estático

#### 4.1.1 Vehículo Rígido (Sin Suspensión)

Como en casi todos los aspectos de la mecánica de vehículos, el estudio de este proceso puede hacerse usando modelos mecánicos rudimentarios o modelos sofisticados analizables sólo con técnicas numéricas. El modelo más sencillo es el vuelco cuasi-estático de un vehículo rígido (Fig. 4.1).

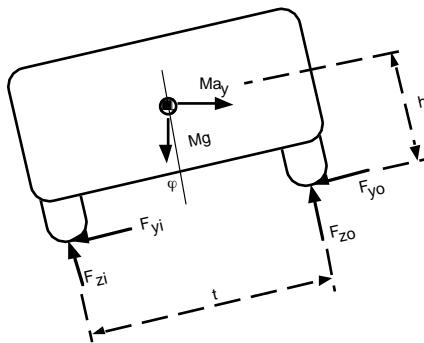


Figura 4.1: Equilibrio lateral en el caso de vehículo rígido.

Supongamos un automóvil de peso  $W$  que describe una curva con peralte  $\varphi$ , donde la aceleración lateral es  $a_y$  ( $g's$ ). El peso y la carga de inercia se equilibran generando fuerzas verticales ( $F_z$ ) y horizontales ( $F_y$ ) en las ruedas internas ( $F_{zi}$ ,  $F_{yi}$ ) y externas ( $F_{zo}$ ,  $F_{yo}$ ). Tomando momentos respecto del centro de contacto de los neumáticos exteriores, y

suponiendo ángulos pequeños, se tiene:

$$Wa_yh - W\varphi h - Wa_y\varphi \frac{t}{2} - W\frac{t}{2} + F_{zi}t = 0$$

donde  $h$  es la altura del centro de gravedad y  $t$  la vía. De esta ecuación se obtiene la aceleración lateral (en  $g's$ ) en función de la carga normal de las ruedas interiores:

$$a_y = \frac{\varphi h + \frac{t}{2} - \frac{F_{zi}t}{W}}{h - \varphi \frac{t}{2}} \quad (4.1)$$

Un vehículo que viaja en linea recta ( $a_y = 0$  y  $\varphi = 0$ ) reparte su peso por igual entre los neumáticos de cada lado ( $F_{zi} = W/2$ ). También se puede construir una curva que no produzca aceleración lateral respecto de unos ejes en movimiento con el vehículo para una velocidad determinada, el ángulo de peralte necesario es  $\varphi = a_y$ . El peralte de las curvas de carretera se usa justamente para este propósito, disminuir la aceleración "lateral" (hasta valores menores que  $0.1g$ ) para velocidades próximas a la de diseño.

De la ecuación 4.1 se obtiene la aceleración lateral que produce el inicio del proceso de vuelco, esto es, la aceleración para la que  $F_{zi} = 0$ :

$$a_y = \frac{\varphi h + \frac{t}{2}}{h - \varphi \frac{t}{2}}$$

En el caso en que no exista peralte se tiene que la aceleración lateral que inicia el vuelco es:

$$a_y = \frac{t}{2h}$$

Esta relación, resultado de un análisis muy simplificado, permite clasificar cualquier vehículo en función de parámetros geométricos relativamente fáciles de medir o calcular. El cociente  $t/2h$  se conoce como umbral de vuelco y se usa como una primera aproximación de la aceleración necesaria para volcar el automóvil. La siguiente tabla da una idea de la altura del centro de gravedad, la vía y el umbral de vuelco para distintos tipos de vehículo:

Tipo de vehículo	Altura CDG (cm)	Vía (cm)	Umbral de vuelco
Turismo	45–60	127–165	1.1–1.7
Furgoneta	75–100	165–178	0.8–1.1
Camión medio	115–140	165–190	0.6–0.8
Camión pesado	150–215	178–183	0.4–0.6

Puede verse que los camiones pesados tienen un umbral de vuelco muy pequeño. Los vehículos turismos, sin embargo, requieren unos neumáticos suficientemente buenos (con coeficiente de rozamiento  $\mu$  superior a 1.1) para que el vehículo vuelque en lugar de derrapar. En efecto, el umbral de vuelco ( $t/2h$ ) es sólo una de las dos cotas que limitan la aceleración lateral:

$$a_y < \frac{t}{2h} \quad a_y = \frac{t}{2h} \Rightarrow \text{vuelco}$$

$$a_y < \mu \quad a_y = \mu \Rightarrow \text{derrape}$$

de manera que si  $t/2h < \mu$  el vehículo vuelca, y si  $t/2h > \mu$  el vehículo se desliza lateralmente sin posibilidad de hacerlo volcar.

Valores del coeficiente de rozamiento superiores a 1.1 no son comunes en turismos. Podría afirmarse entonces que el vuelco de vehículos de este tipo es un proceso poco frecuente. Sin embargo, la experiencia en accidentes de turismo es otra, se necesita un análisis más detallado para obtener una mejor aproximación del umbral. En las secciones que siguen se realizan análisis algo más exactos.

Durante el proceso de vuelco (que suponemos cuasi-estático, y que comienza cuando se levantan las ruedas interiores), la aceleración que mantiene al vehículo inclinado respecto de la carretera disminuye con el ángulo de vuelco. No es difícil obtener el valor de  $a_y(\phi)$ :

$$a_y = \frac{\frac{t}{2} - \phi h}{h + \phi \frac{t}{2}}$$

La aceleración de vuelco se representa en función del ángulo girado por el automóvil en la Figura 4.2. El proceso es inestable, para hacer que el vehículo retorne a la posición horizontal es necesario reducir la aceleración lateral por de bajo del valor de equilibrio. Para ello el conductor debe reducir rápidamente el ángulo de dirección. El proceso es tan rápido (1-2 seg.) que no resulta nada fácil detenerlo una vez iniciado. De ahí que, desde un punto de vista práctico, el valor a controlar sea el umbral en el que se inicia el proceso.

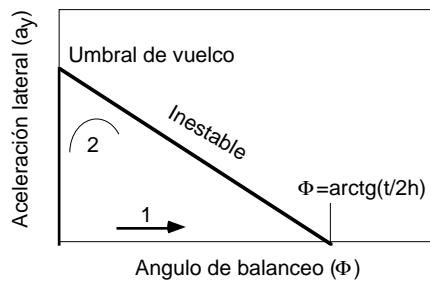


Figura 4.2: Umbral de vuelco para un vehículo rígido.

Algunos conductores pueden mantener el equilibrio alrededor del ángulo  $t/2h$  con valores muy bajos de la aceleración lateral. En general llegan a este valor del ángulo sin generar grandes aceleraciones (camino 1, Fig. 4.2), con la ayuda de una rampa. Controlar el vehículo después de “volcarlo” en curva (camino 2, Fig. 4.2) requiere aún mayor pericia.

#### 4.1.2 Vehículo con Suspensión

La elasticidad de la suspensión interviene en el sentido de disminuir el umbral de vuelco. Esto es debido a que la suspensión permite que el centro de gravedad de la masa suspendida se desplace hacia el exterior, disminuyendo así el brazo de la fuerza restauradora. Despreciando la masa y el giro de los cuerpos no suspendidos, se puede escribir la siguiente ecuación de equilibrio cuando las ruedas exteriores comienzan a despegarse de la carretera:

$$Wa_y h - W \left( \frac{t}{2} - \phi(h - h_b) \right) = 0$$

donde el ángulo  $\phi$  depende de la aceleración lateral y del coeficiente de balanceo de la suspensión ( $R_\phi = \phi/a_y$ , ver Capítulo 3), y  $h_b$  es la altura del centro de rotación de la

masa suspendida (ver Capítulo 3). La aceleración al inicio del vuelco viene entonces dada por:

$$a_y = \frac{\frac{t}{2h}}{1 + R_\phi \left(1 - \frac{h_b}{h}\right)} \quad (4.2)$$

El segundo término del denominador representa la disminución de umbral de aceleración debida a la flexibilidad al balanceo de la suspensión. Cuanto menor sea la altura del centro de balanceo ( $h_b$ ) y mayor el coeficiente de balanceo ( $R_\phi$ ), menor será el umbral de vuelco.

En la Figura 4.3 se muestra la variación de la aceleración lateral con el ángulo de vuelco. La pendiente de la recta es el inverso del coeficiente de balanceo, que está relacionado con la rigidez al vuelco. El umbral de vuelco se reduce claramente con suspensiones muy flexibles que, por otro lado, tienen que girar un ángulo de vuelco mayor antes de despegar las ruedas interiores.

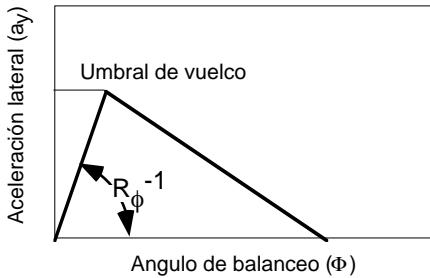


Figura 4.3: Umbral de vuelco para un vehículo con suspensión.

El modelo anterior es válido para vehículos con dos ejes iguales, esto es, con la misma carga, la misma altura de centro de balanceo, y la misma rigidez. En general se tienen dos ejes con suspensiones distintas. La transferencia de carga es diferente en cada uno de ellos. La rueda interior del eje con mayor transferencia, en relación al peso que soporta, abandona el pavimento en primer lugar. En este momento, el vuelco está contrarestando por la rigidez del eje que permanece en contacto con la carretera.

Las ecuaciones que describen la transferencia de carga se obtuvieron en el Capítulo 3 (ec. 3.9). De aquí es fácil obtener la aceleración que produce el despegue del primer eje (en general el eje trasero:  $r$ ). Éste ocurre cuando se transfiere toda la carga de la rueda exterior a la interior:

$$a_y^r = \frac{W_r/2}{W_r \frac{h_r}{t_r} + \frac{K_{\phi r}}{t_r} \frac{h_1 W}{K_\phi - W h_1}}$$

el significado de los parámetros de esta expresión está dado en el Capítulo 3. A partir de esta aceleración el vehículo se apoya, exclusivamente, en su eje delantero. La carga que queda por transferir en este eje es igual a la carga total que es necesario transferir para “volcar” este apoyo ( $W_f/2$ ), menos la que se ha transferido hasta el momento en que despegó la rueda interna trasera:

$$\Delta F'_{zf} = \frac{W_f}{2} - \Delta F_{zf}(a_y^r)$$

donde  $\Delta F_{zf}(a_y^r)$  es la carga transferida en el eje delantero para un valor de aceleración lateral igual a  $a_y^r$ .

La relación entre  $\Delta F'_{zf}$  y  $a_y$  se obtiene con expresiones análogas a la 3.9 del Capítulo 3. Basta tener en cuenta que, con la rueda trasera interna despegada, la rigidez al vuelco del vehículo completo coincide con la del eje delantero ( $K_\phi = K_{\phi f}$ ), y que el centro instantáneo de rotación en el eje trasero ha caído al suelo ( $h_r = 0$ ,  $h_1$  se modifica). Con esto se obtiene la aceleración lateral “adicional” ( $a_y^a$ ) necesaria para volcar el apoyo delantero:

$$a_y^a = \frac{W_f/2 - \Delta F_{zf}(a_y^r)}{W_f \frac{h_f}{t_f} + \frac{K_{\phi f}}{t_f} \frac{h_1' W}{K_{\phi f} - Wh_1'}}$$

El umbral de vuelco del vehículo de dos ejes es:

$$a_y = a_y^r + a_y^a$$

En la Figura 4.4 se representa la aceleración lateral en función del ángulo girado por el vehículo. Se observa que la rigidez inicial es la conjunta de ambas suspensiones. Después de que el primer eje se ha despegado del suelo, se tiene una rigidez al vuelco igual a la de la suspensión que permanece en contacto. Cuando el segundo eje abandona la carretera se inicia el proceso inestable descrito en el apartado anterior.

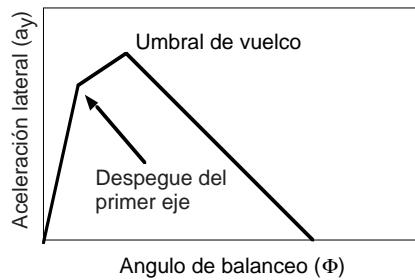


Figura 4.4: Umbral de vuelco para un vehículo de dos ejes con distinta suspensión.

En el caso de una composición tractor–semirremolque se suele tener una evolución del vuelco como la que se comenta a continuación (Figura 4.5). El primer eje en abandonar el suelo es el del semirremolque. En este momento la rigidez al giro disminuye sustancialmente (se pierde la contribución de este eje), hasta que se levanta el eje trasero de la tractora. En este instante se alcanza el nivel de aceleración lateral de vuelco, se entra en el proceso inestable de disminución de aceleración lateral con el ángulo de balanceo. En un momento determinado se termina por desprender el eje directriz y la disminución de aceleración lateral (necesaria para mantener el equilibrio) es más pronunciada.

De la Figura 4.5 se puede concluir que la rigidización del eje del trailer influye poco en el umbral de vuelco. Por el contrario, la rigidización de cualquiera de los ejes de la tractora sí tiene una influencia sustancial en el sentido de aumentar el umbral. El aumento de rigidez del eje directriz puede que no se refleje claramente en la aceleración umbral debido a la gran flexibilidad a torsión del bastidor de la tractora. Estudios experimentales demuestran que se consiguen aumentos sensibles del umbral cuando se combina la rigidización del eje directriz con la rigidización torsional del bastidor.

Un análisis más detallado del proceso de vuelco debe incluir:

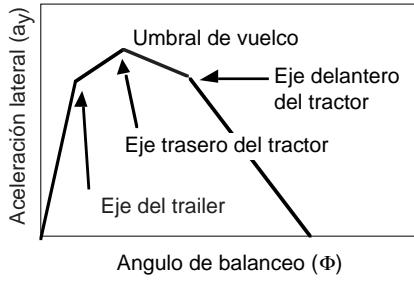


Figura 4.5: Umbral de vuelco para una composición tractor–semirremolque.

1. Desplazamiento lateral del centro de giro de la suspensión debido a la cinemática del mecanismo.
2. Desplazamiento lateral del vehículo debido a la elasticidad transversal de los neumáticos.

## 4.2 Medida del Umbral de Vuelco

El método más sencillo para la determinación del umbral de vuelco es el basado en una mesa inclinable. Consiste en generar una pseudo-aceleración lateral a base de inclinar la mesa donde se apoya el vehículo. Cuando el ángulo girado por la mesa es  $\phi$ , se tiene una “aceleración lateral” de valor  $\sin \phi$  (en g’s).

El inconveniente de este método es la reducción de “peso” que acompaña a la generación de “aceleración” lateral. El peso aparente está afectado del factor  $\cos \phi$ . El error introducido es pequeño en el caso de camiones donde el máximo ángulo girado no suele superar los  $25^\circ$  ( $\cos(25^\circ) = 0.9$ ). En el caso de turismos, en cambio, el ángulo es próximo a  $45^\circ$ , en cuyo caso la reducción de peso es considerable ( $\cos(45^\circ) = 0.7$ ). La suspensión se relaja y el vehículo aparenta un CDG más alto que el real. El umbral de vuelco medido es algo inferior al real.

Existe un método más exacto que consiste en tirar con un cable del centro de gravedad del vehículo. El procedimiento es complicado de implementar, y no está libre de errores: la fuerza lateral (aceleración lateral) no afecta a la masa no suspendida (no se tira de la masa no suspendida).

## 4.3 Vuelco en Régimen Transitorio

Como es sabido, la respuesta transitoria de un sistema dinámico, en general (salvo sistemas sobreamortiguados) amplifica, en mayor o menor medida, la respuesta estacionaria. En el caso del balanceo de vehículos, esto indica que el ángulo girado por el cuerpo del vehículo, cuando es excitado por una aceleración lateral oscilatoria, es superior al correspondiente valor estacionario, dando lugar a una disminución del umbral de vuelco.

Cuando el conductor realiza una maniobra de entrada en curva o cambio de carril, está sometiendo al vehículo a una excitación de aceleración lateral que varía con el tiempo ( $a_y(\tau)$ ). La transformación de Fourier permite descomponer la señal  $a_y(\tau)$  en una superposición de armónicos. Por tanto, es interesante conocer la respuesta del vehículo ante

excitaciones laterales de carácter armónico.

El modelo más simple es el mostrado en la Figura 4.6. Se trata de un sistema de un grado de libertad: el balanceo de la masa suspendida. Para simplificar, se supone que el vehículo está unido a un eje rígido, sin masa, mediante un muelle ( $k_\phi$ ) y un amortiguador ( $c_\phi$ ) de giro. El giro de la masa suspendida ( $\phi$ ) se considera pequeño. Las ecuaciones que permiten encontrar el valor de la fuerza en las ruedas “interiores” son:

$$-I\ddot{\phi} + tF_i(\tau) + Wa_y(\tau)h - W\left(\frac{t}{2} - \phi(\tau)h_1\right) = 0 \quad (4.3)$$

$$I\ddot{\phi} + c_\phi\dot{\phi} + (k_\phi - Wh_1)\phi = Wa_y(\tau)h_1 \quad (4.4)$$

donde  $t$  es la vía,  $I$  la inercia de la masa suspendida respecto del centro de balanceo y  $\tau$  es el tiempo.

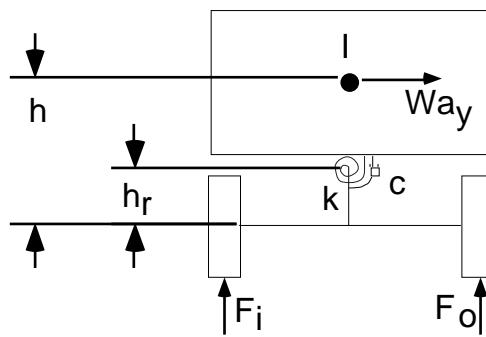


Figura 4.6: Modelo de un grado de libertad para excitación dinámica.

La función  $a_y(\tau)$  es dato para las ecuaciones anteriores. Conocida su expresión, se obtiene  $\phi(\tau)$  de la ecuación 4.4. Las expresiones  $a_y(\tau)$  y  $\phi(\tau)$  permiten obtener la carga en las ruedas interiores en función del tiempo ( $F_i(\tau)$ ). Se considera que la aceleración  $a_y(\tau)$  es capaz de volcar el vehículo cuando el mínimo de  $F_i(\tau)$  se hace cero o negativo. En el caso de aceleración armónica  $a_y(\tau) = A_y e^{i\omega\tau}$ , la resolución de las ecuaciones 4.3 y 4.4 proporciona el valor de la amplitud  $A_y$  que produce el vuelco. Éste es el umbral de vuelco bajo excitación armónica:

$$A_y = \frac{\frac{2}{h}}{1 + \frac{1}{h}(h_1 + r^2\omega^2) \frac{Wh_1}{k_\phi - Wh_1 + i\omega c_\phi - \omega^2 I}}$$

que, como cabía esperar, se reduce a la expresión 4.2 para  $\omega = 0$ .

En la Figura 4.7 se muestra el umbral de vuelco bajo excitación armónica para distintos tipos de vehículos. Puede verse que, para vehículos turismo, la frecuencia de resonancia es mayor que  $1.5\text{Hz}$ . No es usual encontrar frecuencias tan altas en las maniobras que se efectúan en marcha. En el caso de camiones, en cambio, la frecuencia natural es inferior a  $1\text{Hz}$ . Este valor está dentro del rango de frecuencias generadas en una maniobra rápida de cambio de carril. Con una excitación armónica de frecuencia inferior a  $1\text{Hz}$  el umbral de vuelco del camión es muy bajo, cercano a  $0.1g$ .

El problema del vuelco de camiones puede verse agravado por la sensación de falta de respuesta en vehículos de gran batalla (la ganancia de velocidad angular disminuye con

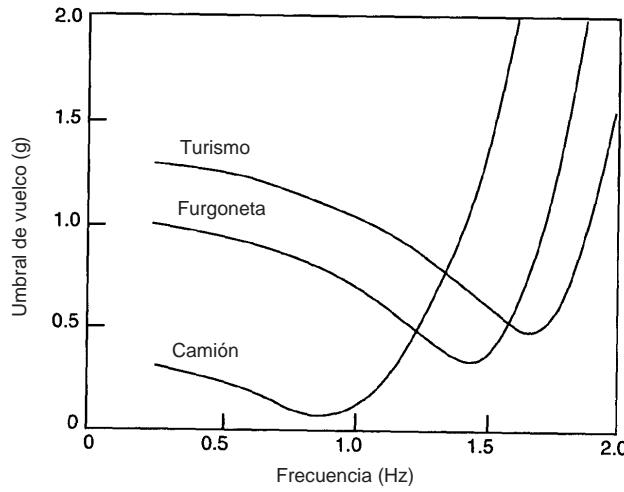


Figura 4.7: Umbral de vuelco en función de la frecuencia de la excitación.

la distancia entre ejes, ver expresión 3.3, Capítulo 3). El desfase entre la respuesta de pivotamiento y el giro del volante aumenta con la distancia entre ejes.

En la Figura 4.8 se muestra la aceleración que produce el vuelco en función del coeficiente de amortiguamiento (respecto del grado de libertad de giro), para el caso de una solicitud del tipo escalón en aceleración lateral. Un sistema con amortiguamiento crítico (100%) o sobreamortiguado tiene el mismo umbral de vuelco en respuesta transitoria que en respuesta permanente.

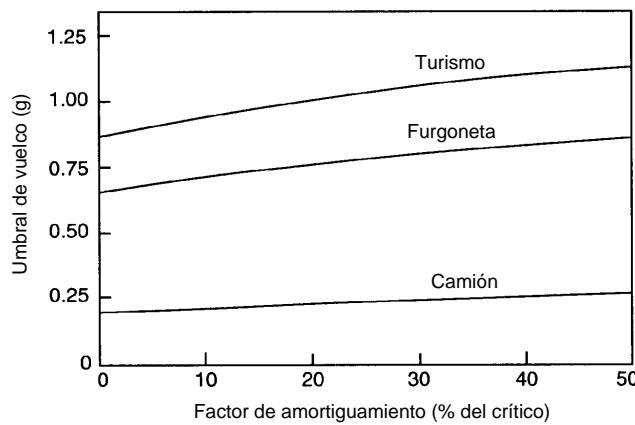


Figura 4.8: Umbral de vuelco en función del factor de amortiguamiento.

## 4.4 Estadísticas de Accidentes

En la Figura 4.9 se muestra el número de accidentes en los que se produjo vuelco del vehículo en función de su umbral de vuelco  $t/2h$ . Parece que la tendencia es hacia la disminución del número de accidentes con el umbral  $t/2h$ . Sin embargo, la dispersión es tan grande que hace pensar que hay más factores involucrados que deben ser analizados.

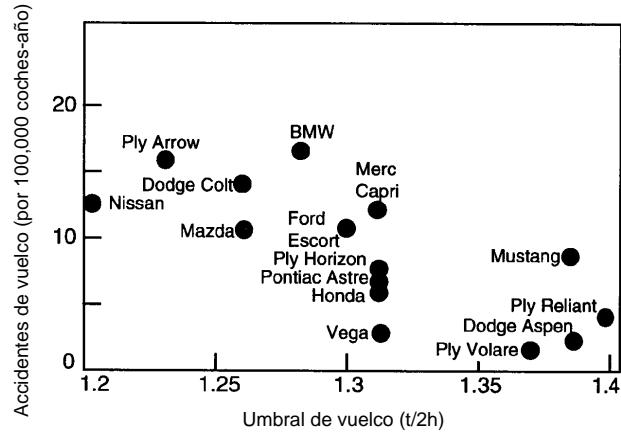


Figura 4.9: Número de accidentes en función del umbral de vuelco.

Cuando se incluyen las camionetas y furgonetas en el gráfico, parece que la tendencia es aún más clara (Fig. 4.10). Sin embargo, también se puede correlacionar el número de accidentes de vuelco con la distancia entre ejes. Luego no parece conveniente intentar restringir a la industria automovilística con leyes, como la que se pretende introducir en EEUU, que limitan el umbral  $t/2h$  a valores superiores a 1.2 para furgonetas y camionetas, hasta no disponer de estudios más sofisticados.

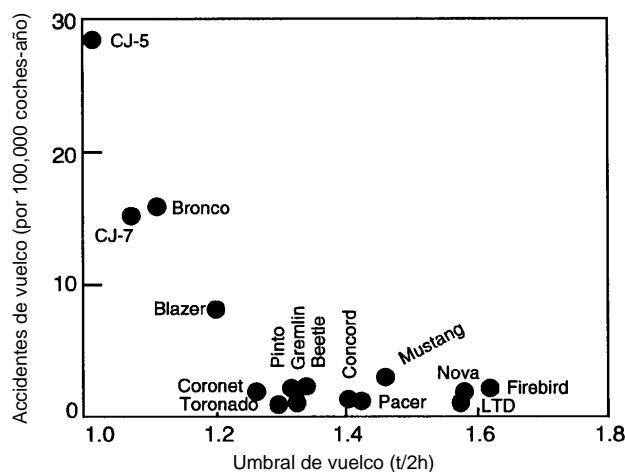


Figura 4.10: Número de accidentes en función del umbral de vuelco para varios tipos de vehículos.

## Capítulo 5

# Dinámica Vertical

No es técnicamente factible construir pistas perfectamente niveladas para que rueden los vehículos de tierra. Las carreteras son superficies irregulares con variaciones sensibles de cota que provocan solicitudes verticales sobre cada una de las ruedas del automóvil. El deterioro progresivo de la pista agrava el fenómeno anterior. El movimiento del vehículo sometido a las irregularidades de la carretera puede llegar a ser muy violento (grandes aceleraciones) para valores altos de la velocidad del vehículo.

Es posible disminuir las aceleraciones que experimenta el cuerpo del vehículo aun cuando la rueda esté forzada a recorrer el perfil de la carretera. Para ello se interpone un elemento elástico entre la rueda y el bastidor del automóvil capaz de almacenar la energía destinada a acelerar la masa suspendida del vehículo. Por otra parte, para que el movimiento oscilatorio no tenga una duración excesiva, y para evitar en la medida de lo posible que la rueda pierda contacto con la carretera, se interpone también entre las masas suspendida y no suspendida un elemento disipador de la energía, un amortiguador.

Desde los primeros carruajes se sabe que es necesario conectar elásticamente el cuerpo del vehículo con los ejes para mejorar la calidad del viaje. En estos primeros vehículos la cabina estaba colgada (suspendida) por medio de unas correas ancladas a unos pequeños mástiles flexibles. En la actualidad el vehículo no suele ir suspendido sino apoyado en el elemento elástico, el sistema ha mantenido el nombre de suspensión sin embargo.

La Figura 5.1 muestra esquemáticamente los distintos aspectos relacionados con el estudio de la dinámica vertical de vehículos. El automóvil y su sistema de suspensión constituyen un sistema mecánico excitado por una serie de fuentes de vibración. Una de estas fuentes es la irregularidad de la carretera. La suspensión “filtrá” esta solicitud, de manera que la vibración que percibe el pasajero, o la carga, es una vibración con distinta amplitud y contenido en frecuencias. El sistema de suspensión debe diseñarse para que las vibraciones transmitidas sean de la amplitud y frecuencia más tolerable.

En este capítulo se tratan cada uno de los aspectos del esquema 5.1. El análisis de vibraciones aleatorias puede encontrarse resumido en el Apéndice A o, con mayor extensión, en textos específicos [?, ?].

### 5.1 Función del Sistema de Suspensión

Como se ha mencionado en la introducción, la función del sistema de suspensión es “filtrar” la vibración provocada por la carretera. La reducción de amplitud puede llegar a ser

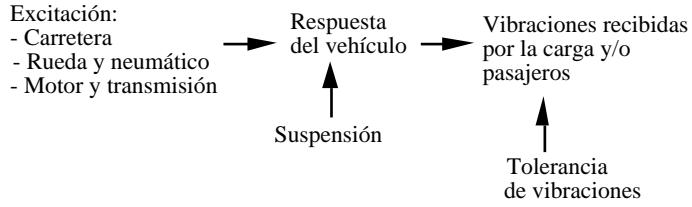


Figura 5.1: Esquema de la interacción Carretera–Vehículo–Individuo.

extraordinaria. El siguiente ejemplo sencillo muestra cómo las aceleraciones de la masa suspendida aumentan dramáticamente si se prescinde del elemento elástico.

Sea un vehículo modelado por un sistema de un solo grado de libertad (de frecuencia natural  $\omega_n$ ) que se mueve por una pista con el siguiente desnivel:

$$y(x) = \begin{cases} y_0(1 - \cos \frac{2\pi}{L} x) & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

donde  $y(x)$  es la altura de la carretera en la sección  $x$  (coordenada longitudinal), y  $L$  es la longitud de la irregularidad en cuestión. La ecuación que gobierna el movimiento vertical de la masa suspendida es:

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = \omega_n^2 y - g \quad (5.1)$$

donde  $z$  es el desplazamiento vertical de la masa suspendida respecto de la posición que ocupa cuando los muelles están relajados, y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

La solución de 5.1, para un vehículo que se desplaza a la velocidad  $v$  ( $x = vt$ ), es:

$$z = y_0 \left( 1 + \frac{\tau^2}{1 - \tau^2} \cos \omega_n t + \frac{1}{\tau^2 - 1} \cos \alpha t \right) - \frac{g}{\omega_n^2}$$

y la aceleración vertical es:

$$\ddot{z} = \frac{y_0 \alpha^2}{\tau^2 - 1} (\cos \omega_n t - \cos \alpha t)$$

donde:

$$\alpha = \frac{2\pi v}{L}, \quad \tau = \frac{\alpha}{\omega_n}$$

Una cota superior para la aceleración anterior es:

$$\ddot{z} \leq \frac{2y_0 \alpha^2}{|\tau^2 - 1|} \quad (5.2)$$

Sea  $v = 33m/s$ ,  $y_0 = 0.01m$  y  $L = 4m$ , valores razonables en una carretera media a una velocidad típica. En este caso, la cota de aceleraciones 5.2 tiene un valor de  $0.081g$  cuando el vehículo está equipado con una suspensión típica de frecuencia natural  $\omega_n = 1Hz$ . Sin embargo, si se elimina la suspensión ( $\omega_n = \infty$ ), la cota de aceleraciones alcanza valores intolerables:  $5.5g$ .

## 5.2 Tolerancia de Vibraciones

La “calidad de marcha” de un vehículo es todavía un tema controvertido en la comunidad científica y técnica. Existen métodos y medios objetivos para la medición de vibraciones, pero no se conoce con precisión cómo esta vibración es percibida por el ser humano, ni cómo afecta a su capacidad de concentración y de ejecución de tareas. Aunque se han realizado estudios estadísticos para el caso de vibraciones unidireccionales de banda estrecha, no existen criterios aceptados universalmente sobre la influencia de factores como:

1. vibración multiaxial frente a unidireccional
2. vibración de banda ancha frente a vibración quasi-monocromática
3. solicitud adicional de vibración visual y sonido
4. vibración adicional a través de manos y pies
5. posición del asiento

La norma ISO 2631/1 se encarga de acotar el problema de la toma de datos relacionados con la tolerancia del cuerpo humano expuesto a vibraciones, así como del problema de la interpretación de los datos existentes. Con anterioridad a la aparición de esta norma se habían formulado límites basados en la amplitud y la frecuencia del desplazamiento (Fig. 5.2) supuesto éste monocromático. Para frecuencias comprendidas entre 1 y  $6\text{Hz}$  se limitaba la sobreaceleración máxima ( $A\omega^3 \leq 12.6\text{ms}^{-3}$ , siendo  $A$  la amplitud del desplazamiento, y  $\omega$  la frecuencia), para frecuencias entre 6 y  $20\text{Hz}$  es la aceleración máxima lo que se limita ( $A\omega^2 \leq 0.33\text{ms}^{-2}$ ), mientras que en vibraciones de alta frecuencia ( $20\text{Hz} < \omega < 60\text{Hz}$ ) se acota la velocidad máxima ( $A\omega \leq 2.7\text{ms}^{-1}$ ). En la actualidad se utilizan nuevos límites obtenidos mediante tratamiento estadístico de datos experimentales.

Existen tres tipos de exposición a vibraciones:

1. Vibraciones transmitidas simultáneamente a toda la superficie del cuerpo o a grandes porciones del mismo. Esto ocurre cuando el cuerpo se encuentra sumergido en un medio vibrante. Un ejemplo típico de este tipo de vibraciones es el de un cuerpo sometido a sonido de alta intensidad.
2. Vibraciones transmitidas al cuerpo a través de la superficie de apoyo. Los pies, el trasero o la espalda, según la posición del individuo. Este tipo de vibraciones se produce en vehículos, en edificios, y en la proximidad de maquinaria vibrante.
3. Vibraciones aplicadas a zonas particulares del cuerpo. Por ejemplo, a través de manillares, pedales o reposacabezas.

También se dan situaciones en que una vibración externa es causa de fatiga o reducción del confort, por ejemplo, el caso de la fijación de la vista sobre un panel vibrante. La norma antes mencionada trata fundamentalmente el caso 2 debido a la falta de datos para los casos 1 y 3. Provisionalmente, y a la espera de recopilar más datos, recomienda hacer uso de los mismos resultados para el caso de posición recostada que para posición sentada.

El sistema de referencia para la medida de las vibraciones es el mostrado en la Figura 5.3. Es necesario tener en cuenta las vibraciones según estos ejes, así como las

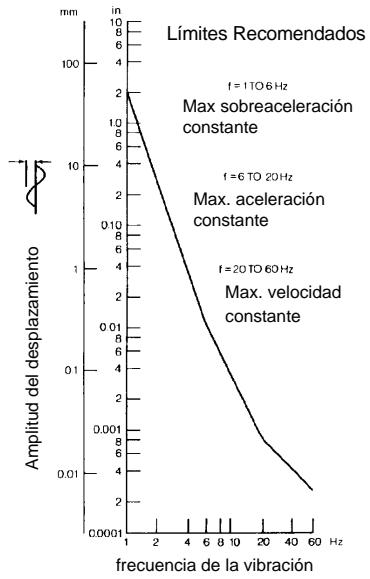


Figura 5.2: Límites de aceleración en función de la frecuencia.

vibraciones angulares asociadas a cada uno de ellos. Los datos respecto de tolerancia a vibraciones angulares son muy escasos, de manera que sólo se presentan resultados correspondientes a vibraciones según los ejes. La medida de la vibración debe hacerse lo más cerca posible del punto de transmisión al cuerpo. Si esto no es posible, se tendrá en cuenta la elasticidad del medio separador en los cálculos de la vibración real transmitida. La intensidad de la vibración se mide como “Raíz Cuadrática Media (r.m.s.)” de la aceleración. Si el factor de pico (cociente entre el máximo y la r.m.s.) es superior a 3, los resultados se toman como una primera aproximación. Se están realizando trabajos para estudiar la influencia de este tipo de picos infrecuentes.

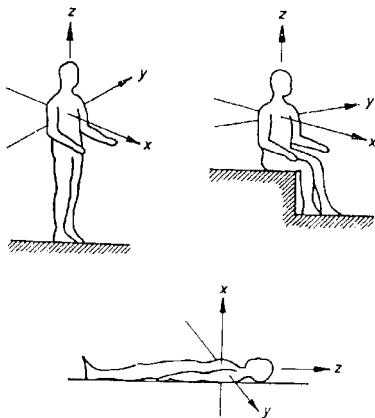


Figura 5.3: Sistema de referencia basado en las “coordenadas locales” del individuo.

Los datos estadísticos que se resumen en las Figuras 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7, han sido obtenidos mediante encuestas a pilotos y conductores. De estos datos es posible obtener tres límites:

1. Reducción del confort
2. Reducción del rendimiento en la tarea realizada (límite de fatiga)
3. Aparición de problemas para la salud y daño

La Figura 5.4 muestra el límite de fatiga para vibraciones verticales. Las curvas están, en este caso, parametrizadas en frecuencia. A modo de ejemplo, supongamos que un individuo está sometido a una vibración “vertical” de banda estrecha. El centro de la banda puede situarse en torno a  $4\text{Hz}$ , y la Raíz Cuadrática Media de la aceleración es  $1\text{m/s}^2$ . Entrando con estos datos en la gráfica de la Figura 5.4, se tiene que el límite de fatiga para esta vibración es de  $1\text{h}$ . Esto es, los individuos que fueron sometidos a esta vibración, por término medio, experimentaban una reducción en su capacidad de trabajo después de una hora.

Para obtener el límite de reducción de confort se multiplican los valores de aceleración (r.m.s.) por un factor de  $1/3$ . Análogamente, para obtener el límite de aparición de daño se multiplica la aceleración (r.m.s.) por un factor de 2.

El aparente desorden en frecuencias (Fig. 5.4), se entiende cuando se presenta el límite de fatiga en función de la frecuencia, con el tiempo como parámetro (Fig. 5.5). Los correspondientes límites de fatiga para vibraciones horizontales se presentan en las Figuras 5.6 y 5.7, en función del tiempo y parametrizadas en frecuencia, en un caso (Fig. 5.6), y en función de la frecuencia parametrizadas en tiempo, en el otro (Fig. 5.7).

Puede verse que las vibraciones más molestas son las de frecuencias comprendidas entre  $4$  y  $8\text{Hz}$  para la aceleración “vertical” (en la dirección de pies a cabeza) y por debajo de los  $2\text{Hz}$  para las aceleraciones “horizontales”. Para frecuencias bajas, las aceleraciones horizontales son más desagradables que las verticales. Lo contrario es cierto para frecuencias entorno a  $2.8\text{Hz}$ . El rango de malestar en la vibración vertical ( $4\text{--}8\text{Hz}$ ) está relacionado con resonancias en la cavidad abdominal. Las inflexiones que se observan en las curvas proporcionadas por algunos autores en el rango de  $10$  a  $20\text{Hz}$  pueden estar relacionadas con resonancias en otros órganos. Por ejemplo, la cabeza tiene una frecuencia natural en torno a los  $10\text{Hz}$ . El malestar en la vibración horizontal ( $1\text{--}2\text{Hz}$ ) se ha relacionado con la vibración de la región alta del torso. La región de bajas frecuencias ( $\omega < 1\text{Hz}$ ) se asocia a la sensación de mareo. Este tipo de excitación se ha estudiado muy poco. El malestar generado está relacionado con factores como la visión y el olfato.

En los casos en que la vibración tiene componentes según varios ejes, cada uno de los límites se aplica a la componente correspondiente. El mismo tipo de superposición se aplica en caso de vibración de banda ancha (ya sea aleatoria o determinista). Se supone entonces que no existe interacción entre ejes ni entre distintas frecuencias. Existen criterios alternativos basados en la suma de potencias en cada dirección.

La norma ISO proporciona un procedimiento alternativo para tener en cuenta la “superposición” de frecuencias. Se trata de calcular una nueva aceleración cuadrática media resultado de multiplicar cada una de las r.m.s. (obtenidas al filtrar la señal con un filtro de banda estrecha) por una función de ponderación (Fig. 5.8) que tiene en cuenta el grado de molestia que proporcionan las distintas frecuencias. El tiempo de fatiga, en función de la r.m.s. ponderada, se muestra en la Figura 5.9.

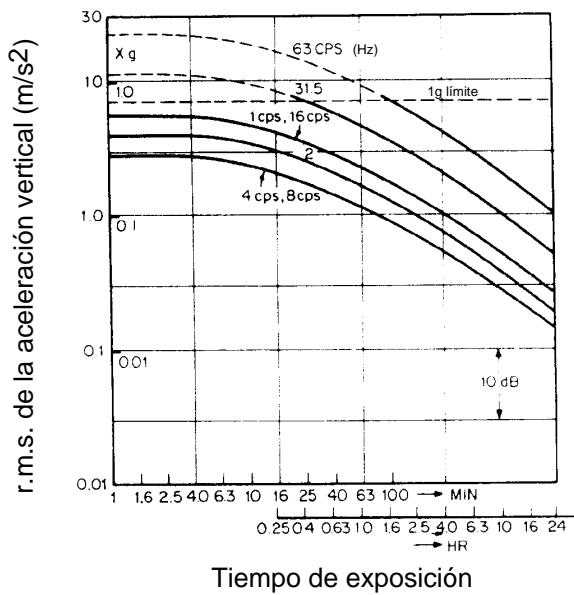


Figura 5.4: Límites de exposición a vibraciones (vertical, parametrizada en frecuencia).

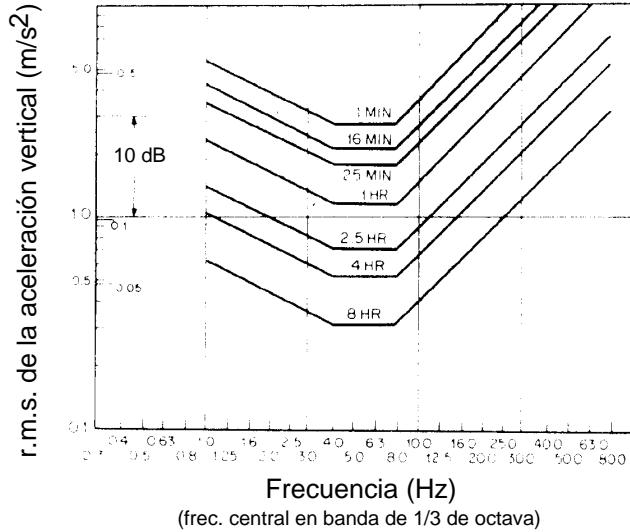


Figura 5.5: Límites de exposición a vibraciones (vertical, parametrizada en tiempo).

### 5.3 Fuentes de Excitación

#### 5.3.1 Carretera

Una manera muy conveniente de representar el perfil de la carretera (rugosidad y desniveles) es mediante su descripción estadística como proceso aleatorio. Cada tramo de carretera

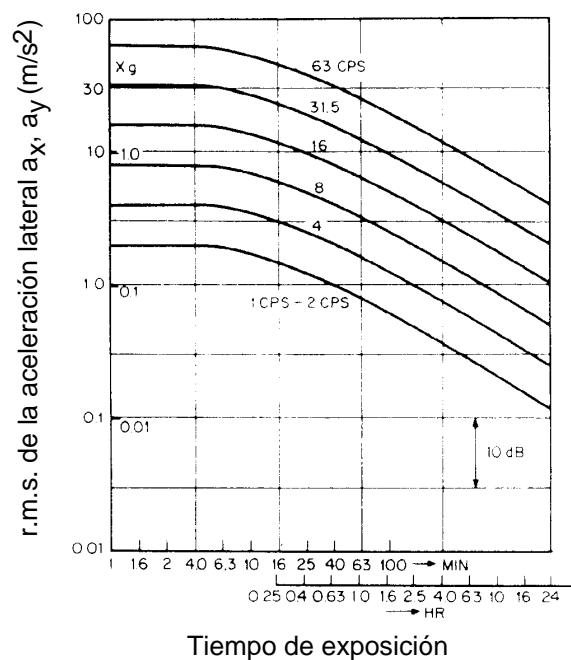


Figura 5.6: Límites de exposición a vibraciones (horizontal, parametrizada en frecuencia)

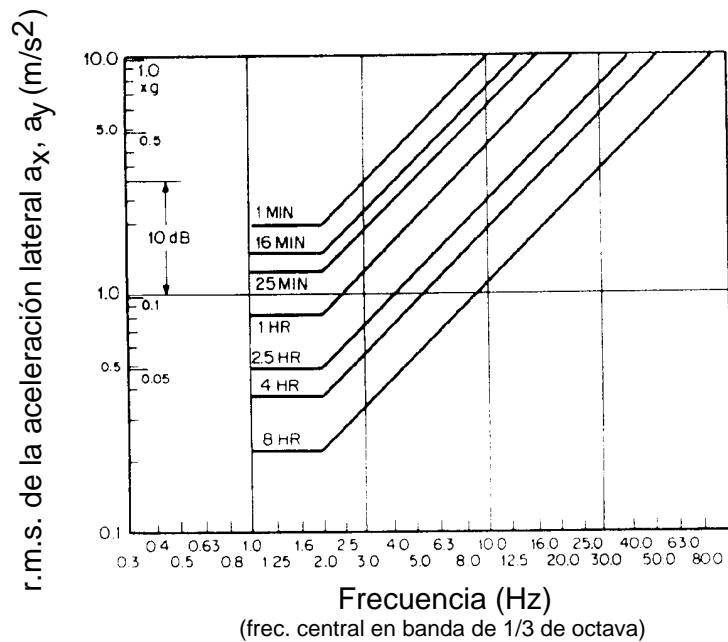


Figura 5.7: Límites de exposición a vibraciones (horizontal, parametrizada en tiempo)

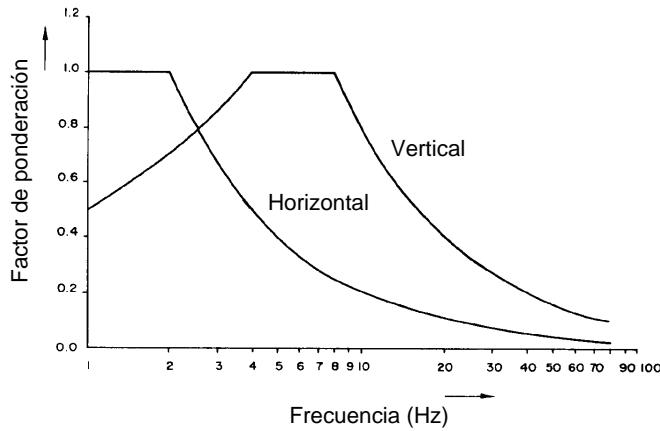


Figura 5.8: Funciones de ponderación para considerar procesos de banda ancha.

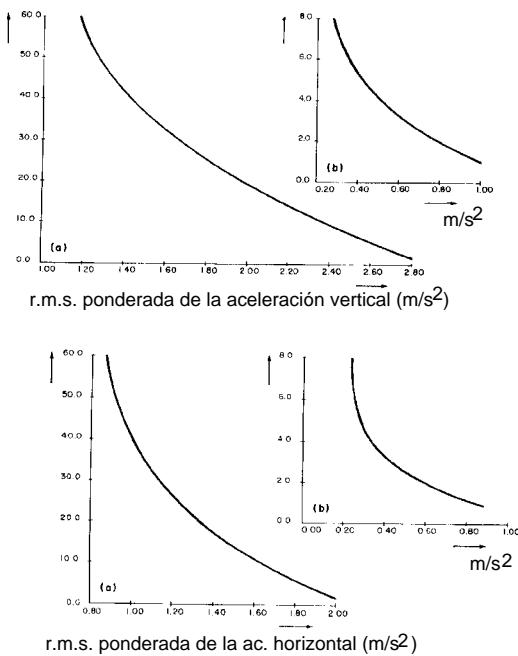


Figura 5.9: Límites de fatiga para vibraciones de banda ancha (vertical (a), y horizontal (b)).

permite obtener una densidad espectral representativa de dicha sección. La toma de datos para un número elevado de carreteras permite obtener espectros medios representativos del tipo de carretera en cuestión. En la Figura 5.10 se muestra la densidad espectral media para estructuras rígidas de hormigón, y para pavimentos flexibles de materiales bituminosos.

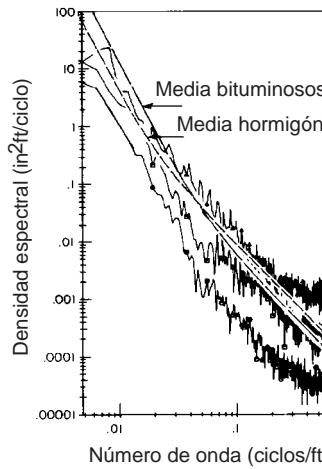


Figura 5.10: Densidad espectral para dos tipos de carreteras.

Como cabía esperar, la amplitud disminuye con el número de onda (no hay montañas cada metro). Se han propuesto diversas expresiones para ajustar los datos experimentales. Una de ellas es la siguiente:

$$S(\gamma) = \begin{cases} S(\gamma_0) \left| \frac{\gamma}{\gamma_0} \right|^{-n_1} & \text{para } |\gamma| \leq \gamma_0 \\ S(\gamma_0) \left| \frac{\gamma}{\gamma_0} \right|^{-n_2} & \text{para } |\gamma| \geq \gamma_0 \end{cases}$$

donde  $S$  es la densidad espectral (ver apéndice A),  $\gamma$  es la frecuencia espacial o número de onda, y  $\gamma_0$ ,  $n_1$ , y  $n_2$  son constantes. Se han recomendado los siguientes valores para el ajuste:  $\gamma_0 = 1.0 \text{ rad/m}$ ,  $n_1 = 2.0$  y  $n_2 = 1.5$ . La constante  $S(\gamma_0)$  depende del tipo de carretera y su calidad geométrica,  $S(\gamma_0) = 1.275 \text{ m}^3/\text{rad}$  corresponde a una carretera “buena”, mientras que  $S(\gamma_0) = 0.318 \text{ m}^3/\text{rad}$  corresponde a una pista del tipo “muy buena”. Existen otras expresiones que permiten ajustar los datos experimentales, por ejemplo:

$$S(\gamma) = S_0 \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \right]}{\gamma^2}$$

Cualquiera de ellas, junto con un generador de números aleatorios, permite “reconstruir” perfiles aleatorios cuyo contenido en frecuencias responda al tipo de carretera en cuestión.

La densidad espectral de la carretera está en función de la “frecuencia espacial” o “número de onda”  $\gamma$ . Las frecuencias temporales dependen de la velocidad a la que se recorra el perfil. La relación entre número de onda y frecuencia es:

$$\omega = v\gamma$$

La densidad espectral en función de la frecuencia  $\omega$  viene dada por:

$$S(\omega) = \frac{1}{v} S(\gamma)$$

Si se toma la diferencia entre las medidas tomadas por dos perfilómetros en la parte derecha e izquierda del vehículo se obtiene la solicitud de balanceo. Esta solicitud debe tratarse, al igual que la vertical, como un proceso aleatorio para el que se puede definir una densidad espectral. El aspecto de esta PSD es similar al que se tienen para el movimiento vertical (bote). También es posible obtener la densidad espectral del cociente balanceo/bote. Un ejemplo se muestra en la Figura 5.11. Para números de onda pequeños, la solicitud de balanceo es mucho menor que la correspondiente a la dirección vertical. Por el contrario, para números de onda elevados, las solicitudes del lado derecho e izquierdo se hacen cada vez más incorrelacionadas, con lo cual, la diferencia de ambas es del mismo orden que cada una de ellas. La PSD tiende a 1 para números de onda elevados.

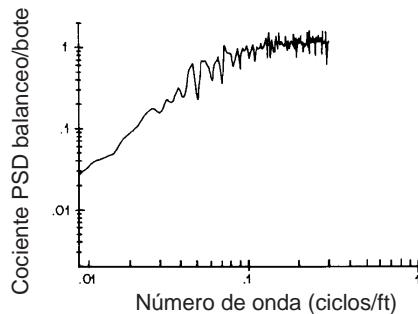


Figura 5.11: Densidad espectral del cociente bote/balanceo.

En general, la frecuencia natural de balanceo es inferior a la vertical. Pero, como se ha visto, para frecuencias bajas la solicitud de balanceo es débil. Esto implica que la solicitud vertical suele ser más importante que la de balanceo.

### 5.3.2 Rueda y Neumático

Ciertos desequilibrios en el neumático y la llanta dan lugar a vibraciones que se suman a las producidas por la carretera y disminuyen la comodidad de la marcha. Las irregularidades pueden ser de los tipos siguientes:

1. Desequilibrio de masa
2. Imperfecciones geométricas
3. Variaciones de rigidez

Estos desequilibrios se traducen en fuerzas y momentos en las tres direcciones: vertical, longitudinal y transversal. En general, las vibraciones son más incomodas cuando se generan en una rueda directriz. Esto es debido a que se transmiten directamente al conductor a través del sistema de dirección incrementando su nivel de exposición.

El desequilibrio de masa de la rueda se suele dividir en el desequilibrio medido en el plano diametral y el que se puede medir en el eje de giro. El equilibrado consistirá en llevar el centro de gravedad hasta el eje de giro (equilibrado estático) y en distribuir las masas de manera que se elimine también el momento alrededor de un eje transversal (equilibrado dinámico). Este equilibrado se realiza mediante la colocación de una masa

adicional en algunos puntos (internos y externos) de la llanta. La determinación de la masa, y su colocación, es un proceso rutinario que se realiza en máquinas cuyo eje está instrumentalizado con galgas extensométricas que miden la flexión a que está sometido.

En un neumático existen imperfecciones geométricas que son consecuencia del proceso de fabricación. Por ejemplo, un neumático formado por cuatro láminas se fabrica de forma que el solape de cada lámina esté desfasado (repartido) a lo largo de la circunferencia de la rueda. Esto va a dar lugar a una imperfección geométrica del tipo “cuadrado” o de 4º armónico. También existen imperfecciones correspondientes a cualquier otro armónico: excentricidad (primer armónico), deformación oval (segundo armónico), deformación triangular (tercer armónico) ... La medida exacta del perfil y su desarrollo en serie permite la determinación de la importancia de cada una de estas deformaciones.

La rueda imperfecta hace variar la altura del eje de la rueda respecto del suelo y, por tanto, representa una solicitud vertical. Por otra parte la distancia recorrida sobre el terreno depende de esta deformación. Se genera entonces una aceleración longitudinal en el eje que de lugar a esta variación de velocidad. Esto quiere decir que las imperfecciones geométricas son tanto una solicitud vertical como longitudinal.

Por último, es posible que la rueda presente variaciones radiales de rigidez. El resultado es que el eje sufre variaciones de altura para la misma carga. La vibración es similar al de una rueda con imperfecciones geométricas: solicitudes verticales y longitudinales.

### 5.3.3 Motor y Transmisión

La vibración del motor se debe, fundamentalmente, a la variación del par debido al número finito de cilindros. Para aislar esta vibración es conveniente montar el motor sobre cogidas elásticas que permitan el giro alrededor del eje del par, o mejor, alrededor del eje principal de menor inercia (Fig. 5.12) que suele estar ligeramente inclinado respecto del par debido a la masa de la transmisión. Como comentario a esta última afirmación cabe decir que, si el momento de inercia alrededor de un eje es muy grande, la variación del momento según dicho eje no va a ser capaz de hacerlo vibrar. Esta componente del momento tiene menor importancia que la aplicada según el eje de menor inercia.

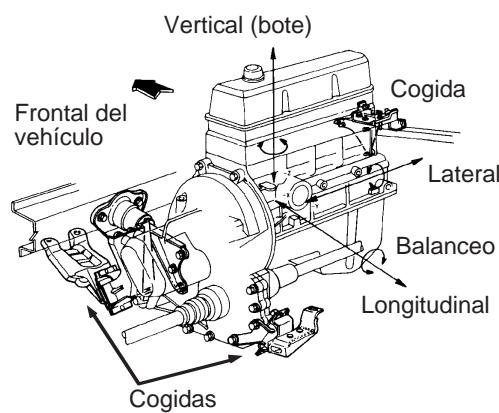


Figura 5.12: Cogidas del motor y transmisión al bastidor del vehículo.

Las cogidas deben ser suficientemente flexibles como para dar lugar a una frecuencia

natural inferior a la menor frecuencia de giro del motor. En este caso, las vibraciones del motor se filtran en las cogidas antes de excitar el cuerpo del vehículo. Es más, el motor puede utilizarse como absorbente de las vibraciones procedentes de la carretera. Para ello las cogidas deben ser tales que la frecuencia natural vertical sea del orden de la correspondiente a la masa no suspendida (12–15 Hz.).

La transmisión genera vibraciones en las cogidas del chasis cuando, en una junta, el par cambia de dirección. El cambio de dirección se traduce en un par transmitido directamente a la cogida (Fig. 5.13). Cuando, debido al movimiento vertical del vehículo, el ángulo en la junta varía, también lo hace el momento transmitido, siendo esta variabilidad una fuente de vibraciones. Estas variaciones de ángulo pueden ser importantes en el caso de vehículos pesados.

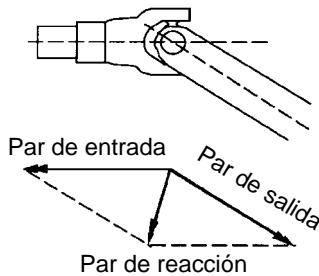


Figura 5.13: Reacción en las cogidas de la transmisión.

En la Figura 5.14 se muestran los registros de aceleraciones (verticales y longitudinales) medidos en la cabina de un camión que rueda por una pista muy lisa. Todas las ruedas, salvo una, se han equilibrado convenientemente. La frecuencia natural de la cabina es fácilmente detectable puesto que las vibraciones se amplifican a dicha frecuencia, independientemente de la velocidad del vehículo. Los distintos armónicos de la rueda se detectan pues se desplazan hacia frecuencias altas proporcionalmente a la velocidad, además, los distintos armónicos están relacionados entre sí mediante números enteros. Aparecen otras dos frecuencias que aumentan proporcionalmente con la velocidad, guardan relación entera entre ellas ( $3.7f$  y  $7.4f$ ), pero no guardan relación entera con las frecuencias del neumático. Estas son claramente dos frecuencias naturales de la transmisión.

## 5.4 Bote y cabeceo

### 5.4.1 Modelo 1/4

El siguiente razonamiento intuitivo ayuda a comprender el problema de la distribución de masa en suspendida y no suspendida. Se hará uso del modelo de la Figura 5.15 (a veces conocido como modelo de cuarto de vehículo).

Puesto que, en la mayoría de los automóviles, la masa suspendida ( $m_s$ ) es un orden de magnitud superior a la masa no suspendida ( $m_{ns}$ ), y puesto que la rigidez de los neumáticos ( $k_t$ ) es también un orden de magnitud mayor que la rigidez de la suspensión ( $k_s$ ), se puede hacer la siguiente aproximación para el cálculo de las frecuencias naturales de cada uno de los dos grados de libertad del sistema. La masa suspendida está muy

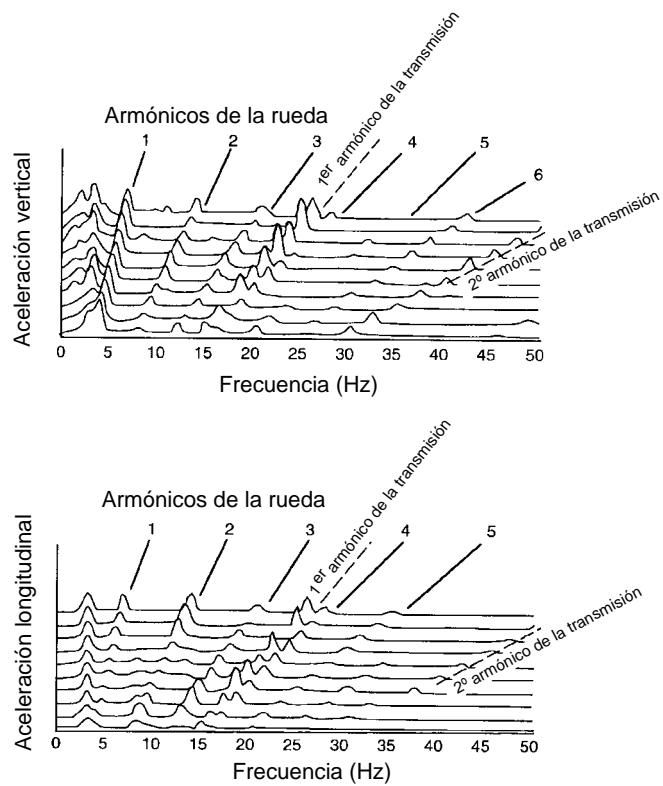


Figura 5.14: Aceleraciones verticales y horizontales en función de la frecuencia para distintas velocidades del vehículo.

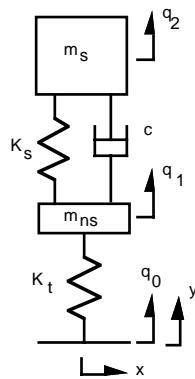


Figura 5.15: Modelo 1/4 para la dinámica vertical de vehículos.

poco influenciada por  $m_{ns}$ , puede suponerse que  $m_s$  está apoyada directamente sobre la

carretera a través de  $k_s$  y  $k_t$  en serie. La frecuencia natural de la masa suspendida es:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_s k_t / (k_s + k_t)}{m_s}}$$

La masa suspendida es muy superior a la no suspendida, se puede suponer que esta última está vibrando entre dos apoyos (la carretera y la masa  $m_s$ ) con dos muelles en paralelo. La frecuencia natural es entonces:

$$\omega_{ns} = \sqrt{\frac{k_s + k_t}{m_{ns}}}$$

Cuando el vehículo está sobre el bache, la masa no suspendida ha sido excitada y está vibrando a su frecuencia natural  $\omega_{ns}$ . Este movimiento constituye la excitación a que se ve sometida la masa suspendida. Puesto que esta excitación es de una frecuencia muy superior a la natural de  $m_s$ , las vibraciones estarán muy amortiguadas. De hecho, cuanto menor sea la masa no suspendida, mayor será  $\omega_{ns}$  y la transferencia de esta vibración a  $m_s$  estará más filtrada. Estas ideas pueden comprobarse con un análisis exacto del modelo simplificado de la Figura 5.15.

Si se analiza la evolución de los automóviles (y también de los ferrocarriles), se observa una clara tendencia a la disminución de las masas no suspendidas. En efecto, las suspensiones en forma de puente corrido están dando paso a otros mecanismos con menor inercia lineal y giroscópica, los muelles a torsión (barras o helicoidales) están sustituyendo a los de flexión, y los motores en bogies de ferrocarril pasan de estar anclados directamente a la estructura del bogie a apoyarse sobre el bastidor del vagón.

### 5.4.2 La Distancia entre Ejes como Filtro de Solicitaciones

index Vibraciones aleatorias!filtrado de

El modelo 1/4 del apartado anterior elimina un aspecto muy interesante de la dinámica vertical de vehículos: el filtrado de las solicitudes que se produce al someter las ruedas delanteras y traseras al mismo perfil vertical desplazado en el espacio y, por tanto, en el tiempo. En la Figura 5.16 se muestra un automóvil con batalla  $L$ . El perfil de carretera se puede descomponer en suma de funciones armónicas y analizar la respuesta del vehículo a cada una de ellas. Si el número de ciclos de este armónico que caben entre los dos ejes es un número entero, entonces el vehículo no cabecea al recorrer el perfil, sólo bota. En cambio, si el número de ciclos en la distancia entre ejes es  $1/2$  o un múltiplo de este valor, entonces los puntos situados a la mitad de la distancia entre ejes no varían su altura durante el viaje, esto es, no botan, sólo cabecean. Por lo tanto, la respuesta medida en ciertos puntos del vehículo está filtrada, existen ciertas frecuencias que no producen excitación, como si no estuvieran presentes.

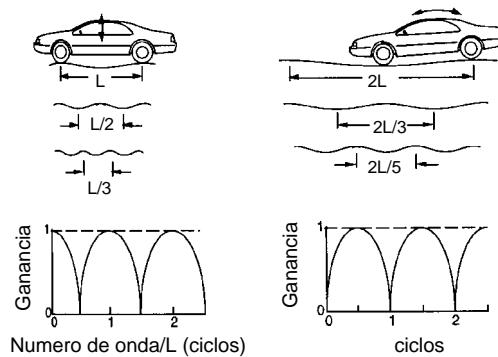


Figura 5.16: Filtrado en bote y cabeceo.

En la Figura 5.16 se muestra la ganancia de la respuesta en función del cociente Número de Onda/Batalla. La respuesta medida en un punto a la mitad de la distancia entre ejes de un vehículo se muestra en la Figura 5.17. En la misma figura se muestra la respuesta que proporcionaría un modelo 1/4. Este modelo no permite el cabeceo del vehículo, de manera que esta respuesta, el cabeceo, se compara, también, con la respuesta vertical.

El efecto de filtrado comentado es función del punto donde se mida la respuesta. En la Figura 5.18 se muestran los registros de aceleraciones (longitudinales, unas, y verticales, otras) en varios puntos de un camión. La respuesta en puntos situados en la misma sección que los ejes no está influenciada por la batalla. El filtrado es más pronunciado a medida que el punto de observación se acerca al punto medio entre ejes.

### 5.4.3 Centros de Bote y Cabeceo

Los modos de vibración de bote y cabeceo están acoplados en la mayoría de vehículos de dos ejes. Un modelo simplificado para el estudio de estos modos de vibración es el mostrado en la Figura 5.19. El modelo tiene dos grados de libertad: el bote, representado

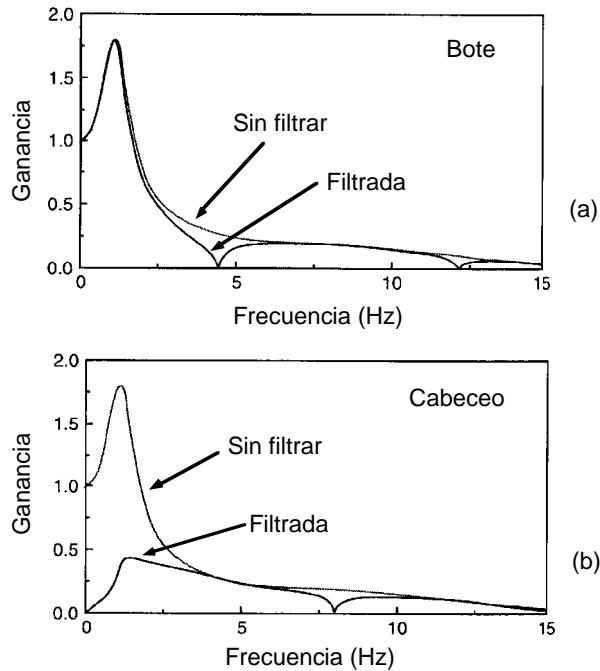


Figura 5.17: Supresión de ciertas frecuencias en la respuesta de bote (a) y cabeceo (b).

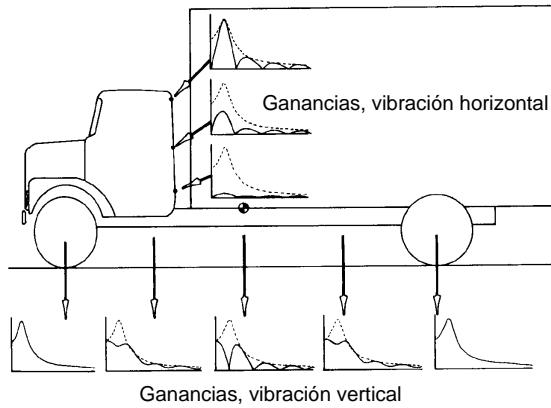


Figura 5.18: Respuesta en distintos puntos de un vehículo industrial.

por el movimiento vertical  $z$ , y el cabeceo, representado por el giro  $\theta$  alrededor del centro de gravedad.

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + k_f(z - a\theta) + k_r(z + b\theta) &= 0 \\ I\ddot{\theta} - k_f(z - a\theta)a + k_r(z + b\theta)b &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde  $m$  es la masa del vehículo,  $k_f$  y  $k_r$  son las rigideces de la suspensión delantera y

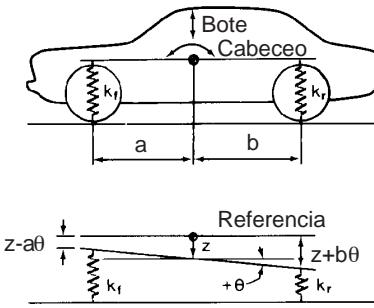


Figura 5.19: Modelo de dos grados de libertad para el estudio del bote y cabeceo.

trasera, respectivamente. Los parámetros  $a$  y  $b$  son las distancias del centro de gravedad a los ejes delantero y trasero, respectivamente. Por último,  $I$  es el momento de inercia del vehículo respecto de su CDG.

Definiendo las constantes:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{k_f + k_r}{m} \\ D_2 &= \frac{k_r b - k_f a}{m} \\ D_3 &= \frac{k_r a^2 + k_f b^2}{m} \end{aligned}$$

se pueden reescribir las ecuaciones 5.3 como:

$$\begin{aligned} \ddot{z} + D_1 z + D_2 \theta &= 0 \\ \ddot{\theta} \frac{D_2}{r^2} z + D_3 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde  $r$  es el radio de giro correspondiente a  $I$  y  $m$  ( $\Rightarrow I = mr^2$ ). El factor de acoplamiento  $D_2$  es, en general, no nulo. Desaparece en el caso en que  $K_r b = K_f a$ . Esto implica que una fuerza aplicada en el centro de gravedad no genera cabeceo, y que un momento aplicado en el CDG no genera balanceo. Una suspensión que cumpla esta condición no es muy común puesto que solicitudes al eje delantero hacen que el vehículo experimente un movimiento de cabeceo muy incómodo.

Las frecuencias naturales se obtienen de suponer movimiento armónico en las ecuaciones 5.4. En este caso:

$$\begin{pmatrix} D_1 - \omega_n^2 & D_2 \\ \frac{D_2}{r^2} & D_3 - \omega_n^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Z \\ \Theta \end{Bmatrix} = 0$$

de donde:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_3) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(D_1 - D_3)^2 + \frac{D_2^2}{r^2}}$$

que proporciona dos frecuencias:  $\omega_1$  (signo menos), y  $\omega_2$  (signo más). Una de las frecuencias está relacionada con el modo de vibración de bote, mientras que la otra lo está con el modo de cabeceo.

Las relaciones entre amplitudes de cabeceo y balanceo para cada una de las frecuencias naturales son:

$$\frac{Z}{\Theta} = \frac{D_2}{\omega_1^2 - D_1}, \quad \frac{Z}{\Theta} = \frac{D_2}{\omega_2^2 - D_1}$$

Estas relaciones determinan, aproximadamente, la distancia del centro de cabeceo al centro de gravedad cuando el sistema vibra a la frecuencia  $\omega_1$ , en un caso, y a la frecuencia  $\omega_2$ , en el otro. En el caso general, la vibración será una combinación de las dos rotaciones anteriores. Cuando el factor de acoplamiento  $D_2$  es nulo, uno de los centros de rotación está en el CDG y el otro en el infinito. Esta situación no es cómoda, las rotaciones alrededor del CDG son molestas. Mejor comportamiento se obtiene en el caso en el que el radio de giro del vehículo respecto del CDG coincide con la raíz del producto de las distancias entre éste y cada uno de los ejes:  $r^2 = ab$ . Si es así, las distancias de los centros de rotación al CDG coinciden con  $a$  y  $b$ , los centros de rotación están sobre las verticales en cada eje. El sistema se comporta como si las masas estuvieran concentradas sobre cada eje, no existe interacción entre la suspensión trasera y delantera. Los ejes están sobre los centros de percusión del vehículo. El cociente  $\frac{r^2}{ab}$  se conoce como *índice dinámico*. En la mayoría de los vehículos turismo, el índice dinámico es próximo a la unidad, varía desde 0.8 para coches deportivos hasta 1.2 en algunos modelos con motor delantero.

En la Figura 5.20 se muestra la posición de los centros de rotación en función del cociente entre las frecuencias naturales delanteras y traseras. Éstas se definen como:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{k_f g}{W_f}}, \quad \omega_r = \sqrt{\frac{k_r g}{W_f}}$$

Donde  $W_f$  y  $W_r$  son los pesos sobre el eje delantero y trasero, respectivamente. La Figura es antisimétrica respecto del eje  $\omega_f/\omega_r = 1$  como cabía esperar. La relación  $\omega_f/\omega_r = 1$  es equivalente a  $D_2 = 0$ , esto es, uno de los centros de rotación coincide con el de gravedad.

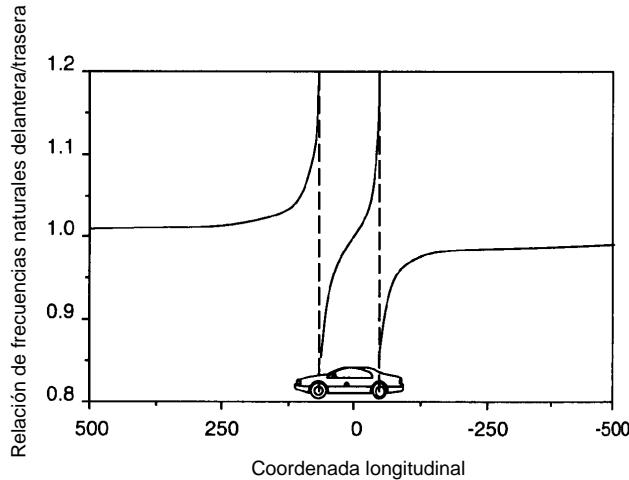


Figura 5.20: Posición de los centros de rotación en función de la relación de frecuencias naturales.

En la mayoría de los automóviles, la frecuencia de bote está en el rango de  $1.0\text{--}1.2\text{ Hz}$ , y la frecuencia natural de cabeceo es ligeramente superior. Puesto que las vibraciones

transversales son más incómodas en este rango de frecuencias, se tiene que, desde el punto de vista del confort del pasajero, el cabeceo es más molesto que el bote. Para disminuir el movimiento de cabeceo se coloca una suspensión más rígida en el eje trasero que en el delantero ( $\omega_f < \omega_r$ ), de esta manera se reduce, como se muestra intuitivamente en la Figura 5.21, la solicitud de cabeceo. En efecto, el movimiento del eje trasero es igual, aunque retrasado, al del delantero. Si la suspensión trasera se hace más rígida se reduce la diferencia de amplitudes en los anclajes de las suspensiones (Fig. 5.21), sin que el movimiento de la parte trasera se modifique sustancialmente. Esta diferencia de amplitud está relacionada con el movimiento de cabeceo del cuerpo del vehículo. En la Figura 5.22 se muestra el resultado de una simulación numérica sencilla que demuestra lo comentado anteriormente.

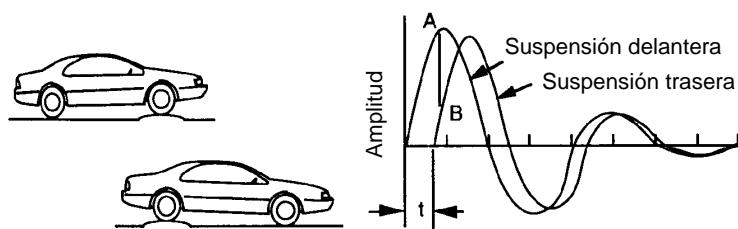


Figura 5.21: Relación del movimiento de cabeceo con la rigidez de la suspensión trasera.

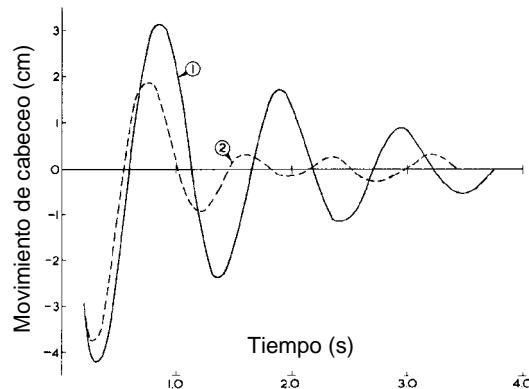


Figura 5.22: Movimiento de cabeceo para  $\omega_r/\omega_f = 0.91$  (curva 1) y  $\omega_r/\omega_f = 1.11$  (curva 2).

La mayoría de los criterios que se han mencionado en esta sección fueron ya postulados por Maurice Olley (ingeniero inglés que trabajó para GM) en 1930. Para obtener sus conclusiones realizó experimentos en un vehículo de la época en el que podía variar el momento de inercia respecto del centro de gravedad (“the  $k^2$  rig”, Fig. 5.23). Sus criterios eran subjetivos pero las conclusiones varían poco de las que podemos obtener hoy en día con métodos algo más sofisticados.

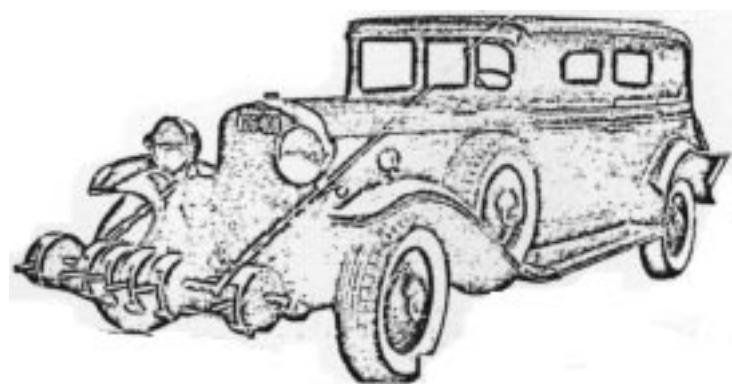


Figura 5.23: Sistema experimental utilizado por M. Olley: “the  $k^2$  rig”.

## Capítulo 6

# Sistema de Suspensión

En el capítulo 5 se demostró que, para filtrar las irregularidades de la carretera, es necesario interponer elementos elásticos entre el bastidor del vehículo y las ruedas. Para permitir este movimiento relativo y, a la vez, mantener cierto control sobre la posición de los neumáticos, se diseña el mecanismo de la suspensión.

Se trata de permitir el movimiento procurando que la zona de contacto rueda–carretera se mueva lo menos posible (poco desgaste), que los ángulos de la dirección se vean poco afectados, o afectados favorablemente, y que el centro instantáneo de rotación no esté excesivamente alejado del centro de gravedad de la masa suspendida. Además, el mecanismo debe resistir las fuerzas longitudinales de aceleración y frenado, así como cargas laterales en curva.

Existen muchos diseños de suspensiones. En este capítulo se muestran y comentan algunos de ellos.

### 6.1 Suspensión de Eje Rígido

La suspensión de puente corrido se sigue usando en vehículos industriales por la simplicidad del mecanismo y el reducido número de elementos de que consta. Este sistema se suele usar con muelles de ballesta que además pueden proporcionar el control direccional del eje, esto es, absorber los esfuerzos longitudinales de tracción y frenado. Este es el caso de la suspensión Hotchkiss. Uno de los principales inconvenientes de este tipo de suspensiones es la elevada inercia lineal y giroscópica del puente que hace las veces de *inercia no suspendida* (ver capítulo 5). Además, el acoplamiento giroscópico de las ruedas de un eje direccional puede dar lugar a vibraciones tipo *shimmy*. Estos ejes, sin embargo, permiten grandes niveles de carga y necesitan un bajo mantenimiento.

En vehículos industriales se suelen disponer grupos de ejes con el propósito de que funcionen como una unidad. El objetivo es repartir la carga entre un elevado número de neumáticos. Cada uno de los ejes que forman el grupo está dotado de un mecanismo de suspensión de eje rígido. Sin embargo, los mecanismos no pueden ser independientes, se necesitan dispositivos para repartir la carga en cualquier posición. En efecto, si los ejes del grupo fueran independientes, se tendrían situaciones, provocadas por los desniveles de la carretera, en las que un eje soportaría toda la carga, mientras que los otros descansarían “colgados” del bastidor. Para evitar esta situación se tienen las siguientes tipologías de ejes múltiples:

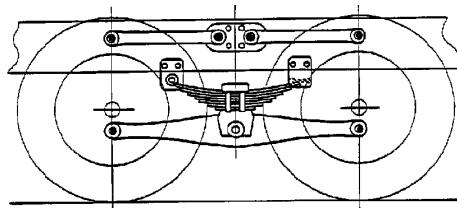
1. Suspensiones con centro de cabeceo:

- (a) Suspensión de viga flotante
- (b) Suspensión de ballesta invertida

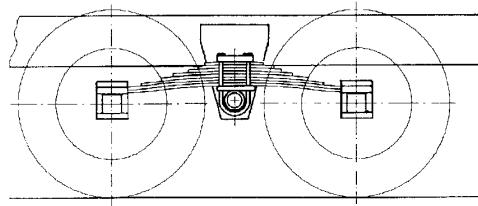
2. Suspensiones tipo “cuatro ballestas”

3. Suspensiones neumáticas

La ecualización de las cargas en las suspensiones con centro de cabeceo se realiza mediante una “barra” que une ambos ejes y que puede pivotar alrededor de un punto medio. Las dos configuraciones básicas se muestran en la Figura 6.1. Son suspensiones robustas con gran capacidad de articulación. Por esto suelen utilizarse en aplicaciones en las que se encuentran condiciones especialmente difíciles, como la construcción, la recogida de basuras, las aplicaciones fuera de carretera, etc.



(a) suspensión de viga flotante



(b) suspensión de ballesta invertida

Figura 6.1: Suspensiones con centro de cabeceo.

En las suspensiones tipo “cuatro ballestas” la carga se equilibra al conectar las ballestas, por sus extremos, mediante balancines (Fig. 6.2). Este tipo de montaje no tiene una gran capacidad de articulación. Sin embargo, es sencillo, ligero, y requiere poco mantenimiento. El par de frenado desequilibra las cargas en los ejes. Para evitarlo, se colocan barras descentradas que absorben el par (Fig. 6.2).

Las suspensiones neumáticas (Fig. 6.3) consiguen equilibrar las cargas conectando las balonas (“muelles”) de cada eje. La conexión iguala las presiones en las balonas, de manera que las cargas estáticas no pueden ser diferentes.

Existe un diseño de suspensión patentado en 1894 por Count de Dion que constituye el eslabón entre las suspensiones de eje rígido y las independientes. Este diseño se volvió a utilizar con profusión a partir de los 60. Un ejemplo es el mostrado en la Figura 6.4.

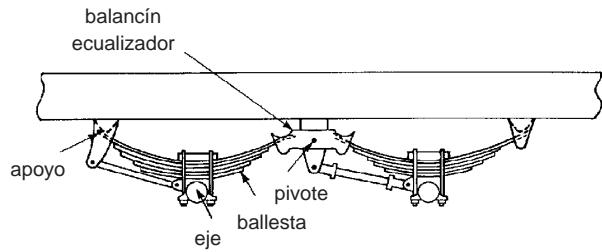


Figura 6.2: Suspensiones tipo “cuatro ballestas”.

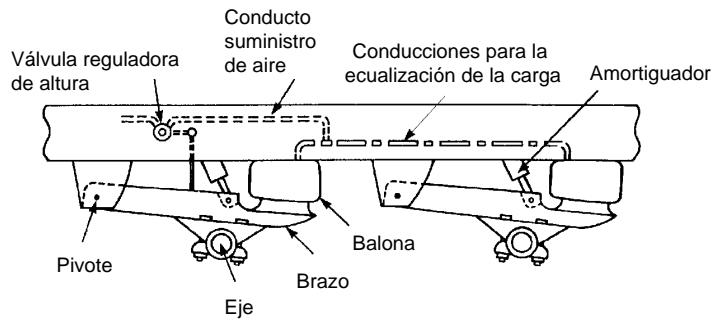


Figura 6.3: Suspensiones neumáticas.

Las dos ruedas están unidas por un tubo común. Este tubo está unido al chasis mediante los tubos semi-trailers y el mecanismo centrador (en el alzado). La ventaja que introdujo este sistema, y que los asemeja a los de ruedas independientes, es que el diferencial está anclado al chasis, disminuyendo así la masa no suspendida.

## 6.2 Suspensión Independiente

De entre el gran número de diseños de suspensiones independientes se destacará, por la profusión de su uso, la suspensión MacPherson y la de doble horquilla. Los ejemplos corresponden, ambos, a ejes delanteros. La suspensión MacPherson es más común en ejes delanteros que en traseros, mientras que la de doble horquilla lo es en ejes traseros. Existen versiones para ejes directrices y no directrices de ambos diseños.

En la Figura 6.5 se muestra un ejemplo del mecanismo de doble horquilla. Las longitudes de los brazos inferior y superior se determinan de manera que se establezca un compromiso entre la variación del ángulo de caída de la rueda y el desplazamiento lateral de la zona de contacto rueda–carretera. Si los dos brazos tienen la misma longitud, la rueda se desplaza paralelamente a sí misma y el ángulo de caída no se modifica, sin embargo, el desplazamiento lateral del contacto (frotación) es elevado. Con brazos muy desiguales, se obtiene un desplazamiento lateral pequeño pero una gran variación del ángulo. La determinación de las longitudes óptimas debe tener en cuenta estos dos aspectos.

Las horquillas pueden ser una única pieza que soporte, además, los esfuerzos longitudi-

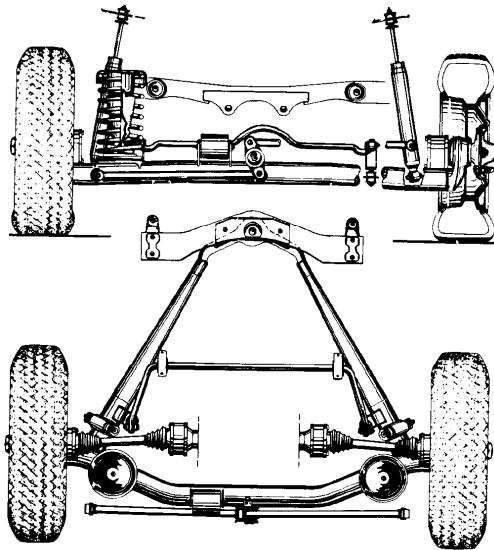


Figura 6.4: Sistema de suspensión de Dion (Alfa 6).

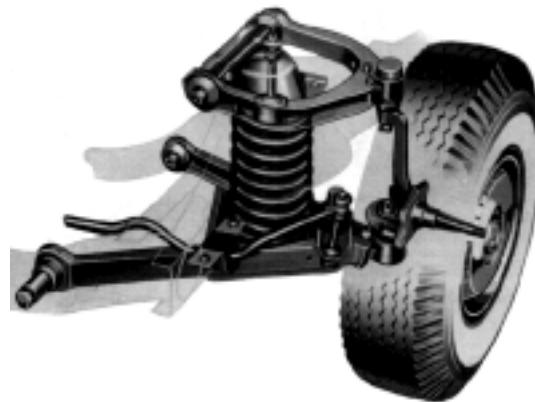


Figura 6.5: Suspensión de doble horquilla de longitudes desiguales.

nales, o se puede formar a base de barras articuladas. El ejemplo más claro de este último caso son las suspensiones de los coches de formula. En estas suspensiones los muelles y amortiguadores están escondidos en la carrocería. Las fuerzas se transmiten hasta estos componentes a través de bielas y balancines.

Cuando los ejes de giro de las horquillas no coinciden con la dirección longitudinal del vehículo, se tiene una suspensión de horquilla con carácter “semi-trailing”. Estos sistemas aportan una cierta contribución al carácter direccional del vehículo (subvirador o sobrevirador). En efecto, cuando la suspensión se contrae por el efecto del balaceo del vehículo en curva, el plano de la rueda deja de ser paralelo a la dirección longitudinal. Esto es así en todos los casos salvo en los dos extremos: horquillas totalmente remolcadas

(ejes de giro transversales), y horquillas no remolcadas (ejes de giro longitudinales).

En la Figura 6.6 se muestra un ejemplo del mecanismo patentado por MacPherson (ingeniero de Ford) en 1940. Este sistema reduce el número de elementos del mecanismo y, aproximadamente, reproduce el mismo movimiento de la rueda que se tiene con el sistema de doble horquilla. En el diseño original la horquilla inferior se sustituye por una barra y los esfuerzos longitudinales se equilibran en la propia barra estabilizadora. Existen algunos modelos de pequeños utilitarios actuales que mantienen esta economía de piezas. Uno de los inconvenientes es el riesgo de encasquillamiento del amortiguador. El diagrama de momentos flectores de la barra telescópica no es nulo en la sección del pistón del amortiguador. Para contrarrestar este problema se aplica material antifricción al amortiguador, y se inclina el muelle respecto de la dirección longitudinal de la barra. De esta manera se produce un momento flector de signo contrario al existente en la sección del pistón.

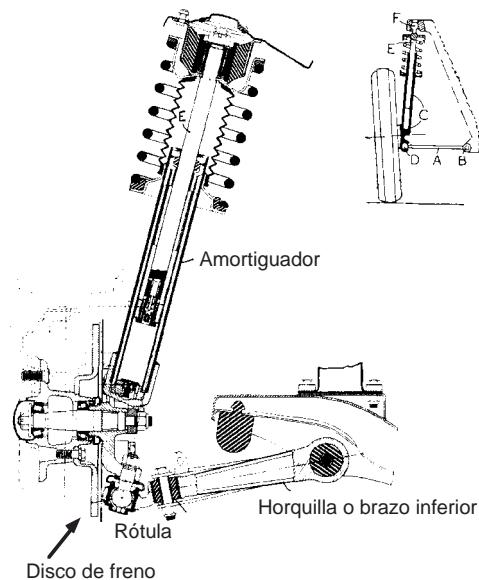


Figura 6.6: Sistema de suspensión MacPherson.

### 6.3 Centro Instantáneo de Balanceo

Uno de los parámetros cinemáticos de interés en el estudio de mecanismos de suspensión es el Centro Instantáneo de Balanceo (CIB). Este es el punto alrededor del cual gira el vehículo cuando está solicitado por cargas laterales como la fuerza centrífuga. El momento de balanceo es el producto de la fuerza lateral por la distancia entre el CDG y el CIB.

Si el diseño del mecanismo de la suspensión es tal que la altura del CIB es la misma que la del CDG, el cuerpo del vehículo no vuelca (no gira alrededor de su eje longitudinal) en curva. Para conseguir esto, sin embargo, es necesario hacer demasiadas concesiones en cuanto al control posicional de la rueda. En general, es preferible limitar el giro del cuerpo del vehículo aumentando la rigidez al vuelco (ver la Sección 6.4.5), o haciendo uso

de suspensiones activas.

La posición del CIB se obtiene haciendo uso del teorema de los tres centros. Las figuras 6.7 y 6.8 muestran dos mecanismos de suspensión así como la obtención geométrica del CIB. Su posición coincide con la intersección de las rectas que unen los centros de rotación rueda–carretera y rueda–chasis.

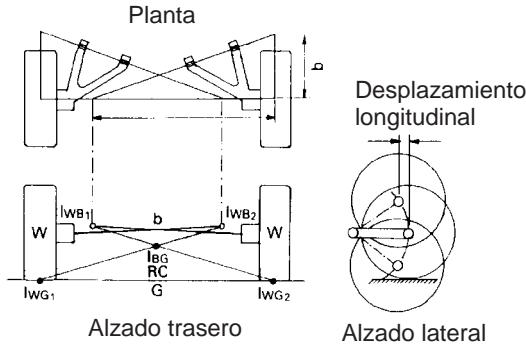


Figura 6.7: Obtención geométrica del centro instantáneo de balanceo para una suspensión semi-trailer.

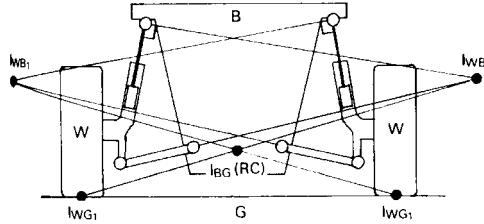


Figura 6.8: Obtención geométrica del centro instantáneo de balanceo para una suspensión MacPherson.

Cuando los mecanismos de la suspensión se proyectan en un alzado lateral, se puede obtener el eje instantáneo de rotación del cuerpo del vehículo respecto de la carretera al estar sometido a cargas longitudinales de aceleración o frenado. Si la altura de este eje coincide con la del CDG, el vehículo no “hocica” en frenada, ni se “encabrita” en aceleración. Este tipo de diseños son relativamente comunes en vehículos turismos y en algunas motocicletas.

## 6.4 Muelles

Los muelles para suspensiones de vehículo pueden dividirse según la forma de trabajo del material de que están construidos. Material trabajando a flexión (ballestas), a torsión (barras de torsión y muelles helicoidales) y cortante (bloques de elastómero). También existen muelles neumáticos en donde la energía se almacena comprimiendo un gas en un

recinto de volumen variable.

#### 6.4.1 Muelles de Flexión

La rigidez de un fleje de sección uniforme, simplemente apoyado entre dos puntos, es:

$$K = \frac{48EI}{L^3}$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $I$  es el momento de inercia del fleje, y  $L$  la longitud entre apoyos. En el caso de varios flejes de la misma longitud unidos sin fricción, la rigidez no es sino:

$$K = \frac{48E \sum_{i=1}^n I_i}{L^3}$$

donde  $I_i$  es la inercia de cada fleje. La expresión se complica ligeramente cuando los flejes son de diferente longitud.

En las Figuras 6.9 y 6.10 se muestran tres ejemplos de ballestas. La mostrada en la Figura 6.9a es una ballesta semielíptica. Este tipo de ballestas ha sido muy utilizada en vehículos pesados debido a su bajo mantenimiento. La fricción entre flejes hace las veces de disipador de energía eliminando la necesidad de un amortiguador adicional. Esta ventaja es, a la vez, un inconveniente puesto que la fricción seca da lugar a un ciclo de histéresis como el de la Figura 6.11. Esto hace que la rigidez efectiva para pequeños desplazamientos sea muy superior a la rigidez para desplazamientos grandes (Fig. 6.11). El vehículo tiene mejor suspensión (más flexibles) en carreteras malas (desplazamientos grandes) que en carreteras buenas (desplazamientos pequeños).

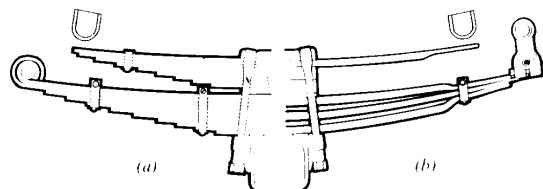


Figura 6.9: Ballestas semielípticas (a) y parabólicas (b).

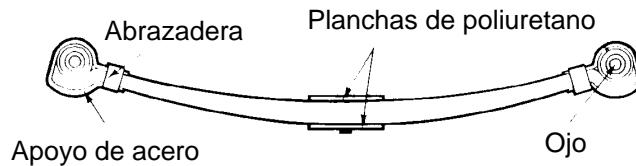


Figura 6.10: Ballesta de material compuesto.

Para solucionar este problema se están empezando a utilizar las ballestas parabólicas (Fig. 6.9b) en las que se reduce la fricción seca separando los flejes. En algunos casos la ca-

pacidad de disipación está tan reducida que es necesario utilizar un pequeño amortiguador de aceite adicional.

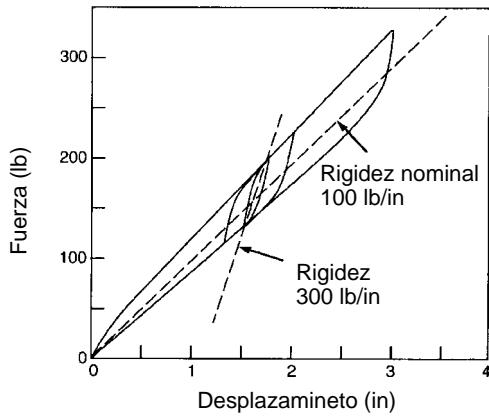


Figura 6.11: Ciclo de Histéresis en muelles de ballesta.

Ultimamente se están empezando a utilizar, también, las ballestas de material compuesto (Fig. 6.10). La principal ventaja de estos materiales es su alta rigidez y resistencia por unidad de peso.

#### 6.4.2 Muelles a Torsión

En primera aproximación la rigidez de una barra de torsión de longitud  $L$ , accionada por un brazo de longitud  $R$  es:

$$K = \frac{GJ}{R^2L}$$

El mecanismo de accionamiento se puede diseñar para conseguir cierta no-linelaidad en el comportamiento.

Las barras de torsión se utilizan en vehículos pequeños en donde se intenta reducir el volumen ocupado por el mecanismo de la suspensión. También, en la mayoría de vehículos, tanto ligeros como pesados, se usan barras de torsión para incrementar la rigidez al balanceo (vuelco).

El material de los muelles helicoidales está sometido a torsión (la deformación cortante puede despreciarse). La rigidez de un muelle de  $n$  espiras, con diámetro de hélice  $D$ , formado por alambre de diámetro  $d$  y módulo a cortante  $G$ , es:

$$K = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$

Estos muelles son los más utilizados en las suspensiones de vehículos turismos. Su capacidad de almacenamiento de energía por unidad de volumen es alta. Tienen poca disipación interna por lo que deben usarse junto con amortiguadores de aceite.

### 6.4.3 Muelles a Cortante

La rigidez de muelles a cortante es, en primera aproximación, la siguiente:

$$K = \frac{AG}{L}$$

donde  $A$  es la sección transversal del material,  $L$  la longitud entre los apoyos móviles, y  $G$  el módulo a cortante.

Dos ejemplos de muelles a cortante se dan en las Figuras 6.12 y 6.13. El mostrado en la Figura 6.12 se utiliza en vehículos ligeros. Como se observa en la Figura 6.14, estos muelles, en ciertas disposiciones, exhiben un ciclo de histéresis análogo al comentado para ballestas semielípticas.

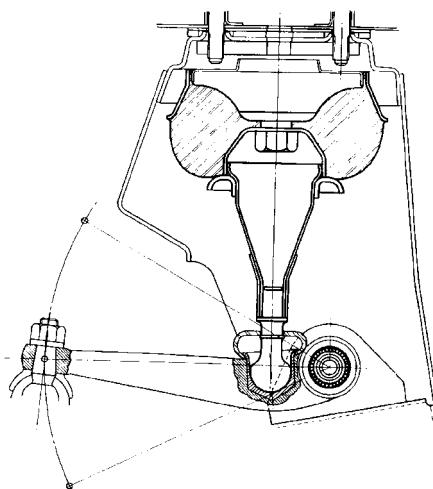


Figura 6.12: Muelle a cortante para vehículo turismo.

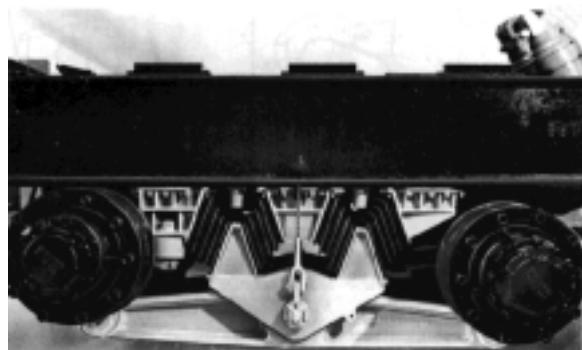


Figura 6.13: Muelle a cortante para vehículo pesado.

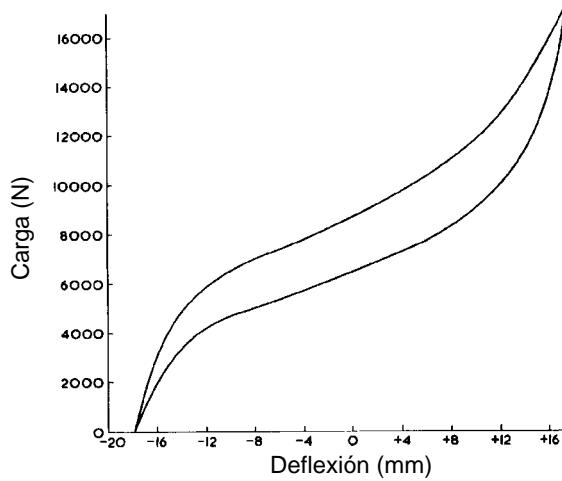


Figura 6.14: Ley de comportamiento de algunos muelles a cortante.

#### 6.4.4 Muelles Neumáticos

Los muelles neumáticos almacenan energía comprimiendo un gas (aire en la mayoría de los casos) en una cámara de volumen variable. La compresión del gas obedece a algún proceso politrópico:

$$PV^n = \text{cte}$$

donde  $P$  es la presión,  $V$  el volumen, y  $n$  una constante que depende del tipo de proceso de compresión. Por ejemplo,  $n = 1$  corresponde a una compresión isotérmica, y  $n = \gamma$  corresponde a una compresión adiabática. En cualquiera de los casos, la fuerza es función del desplazamiento según la siguiente relación:

$$F = \left[ \frac{P_0 V_0^n}{(V_0 - A\delta)^n} - P_0 \right] A$$

donde  $F$  es la fuerza de reacción del muelle cuando se contrae una longitud  $\delta$ ,  $P_0$  y  $V_0$  son la presión y volumen iniciales, antes de la compresión, y  $A$  es el área transversal del pistón móvil.

La rigidez del muelle es la derivada de la fuerza  $F$  respecto del desplazamiento  $\delta$ :

$$K = \frac{\partial F}{\partial \delta} = \frac{A^2 P_0 V_0^n n}{(V_0 - A\delta)^{n+1}}$$

El muelle puede diseñarse para conseguir la rigidización con el desplazamiento (no-linealidad). En efecto, si el volumen inicial ( $V_0$ ) es del mismo orden de magnitud que las variaciones de volumen ( $A\delta$ ), entonces la contracción del muelle ( $\delta \uparrow$ ) provoca un aumento de rigidez ( $K \uparrow$ ). Por el contrario, si el volumen inicial es muy grande en comparación con las variaciones de volumen, entonces:

$$K \approx A^2 P_0 V_0^{-1} n$$

El muelle es aproximadamente lineal (rigidez constante).

Es interesante notar que la frecuencia natural de un peso ( $W = mg$ ) soportado por un muelle neumático ( $P_0 = mg/A$ ) es independiente de la masa:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{A^2 P_0 V_0^{-1} n}{m}} = \sqrt{A g v_0^{-1} n}$$

Esta propiedad los hace extraordinariamente atractivos para su uso en vehículos, y en particular, en vehículos industriales en los que la masa varía sustancialmente de situaciones de plena carga a vacío. En la Figura 6.15 se dan algunos ejemplos de suspensiones con muelles de este tipo.

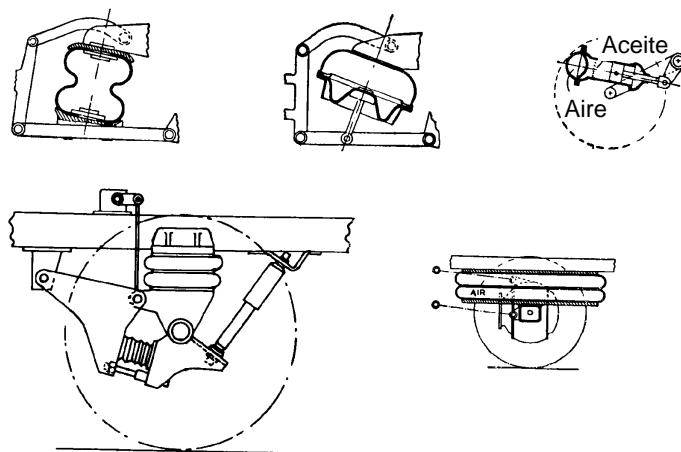


Figura 6.15: Ejemplos de muelles neumáticos y su disposición en suspensiones.

#### 6.4.5 Barras Estabilizadoras

Para aumentar la rigidez al balanceo (vuelco) del cuerpo del vehículo sin comprometer la rigidez vertical de la suspensión. Se disponen barras estabilizadoras como la de la Figura 6.16. Como puede verse en la Figura, estas barras no están solicitadas cuando el eje atraviesa un bache que afecte a las dos ruedas del mismo. Sin embargo, cuando el cuerpo del vehículo gira respecto del eje longitudinal (Fig. 6.16), la barra sufre una torsión que se opone a este movimiento, esto es, incrementa la rigidez de vuelco. Se rigidiza este grado de libertad sin comprometer la flexibilidad vertical.

También es posible usar muelles de flexión como el de la Figura 6.17 que hacen las veces de suspensión y barra estabilizadora al mismo tiempo.

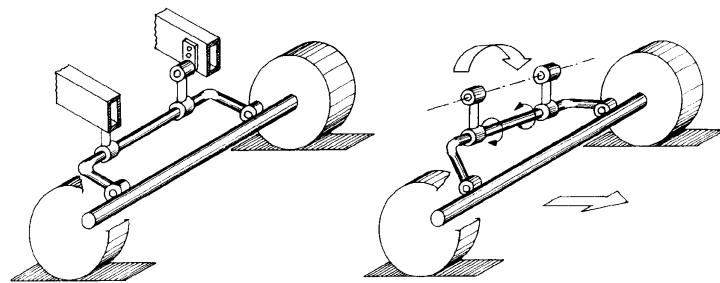


Figura 6.16: Barra estabilizadora.

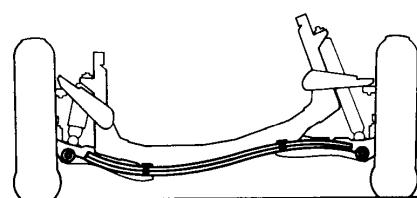


Figura 6.17: Suspensión de ballesta corrida.

## 6.5 Amortiguadores

El amortiguador es el elemento disipador de energía en el sistema de suspensión. Su función es facilitar que el movimiento oscilatorio del vehículo desaparezca en un intervalo de tiempo finito una vez desaparecida la fuerza excitadora. También, una suspensión dotada de amortiguador evita, en general, el despegue de las ruedas respecto de la carretera. Esto es, aumenta la fuerza de contacto media entre rueda y carretera, lo cual redunda en un mejor control direccional y mayor seguridad.

La energía comunicada por la carretera al vehículo se disipa en los amortiguadores. El movimiento de un pistón en el interior del cilindro del amortiguador hace pasar fluido a través de pequeños orificios. El flujo turbulento en estos orificios favorece la disipación de energía en forma de calor. La fuerza total generada por la diferencia de presión a cada lado del pistón es aproximadamente proporcional a la velocidad relativa entre los dos “ojos” del amortiguador.

Un diseño de amortiguador como el esquematizado en la Figura 6.18a no puede funcionar como disipador de energía. Cuando el pistón se desplaza hacia la izquierda, el volumen desplazado en la zona izquierda del cilindro es superior al generado en la zona derecha. Puesto que los líquidos son prácticamente incompresibles, este dispositivo se atasca y no puede hacer las veces de amortiguador. Para evitar este problema se diseñan los amortiguadores de doble tubo (Fig. 6.18b), de cámara de gas (Fig. 6.18c) o de balancín (Fig. 6.18d).

La cámara exterior en los amortiguadores de doble tubo absorbe las diferencias de volumen. Las válvulas redirigen el fluido en la carrera de contracción y extensión, de manera que el coeficiente de amortiguamiento puede ser distinto en cada una de estas carreras. En el caso de amortiguadores de cámara de gas existe un pistón libre adicional que separa el aceite del gas. Éste, el gas, es el encargado de absorber las diferencias de volumen. En algunas versiones de este tipo de amortiguadores se suprime el pistón, alojando el gas en forma de suspensión en el fluido. En amortiguadores de balancín los volúmenes desplazados en la carrera de contracción y expansión son iguales, de manera que no se necesita disponer de un fluido compresible. Tampoco es necesario el gas en aquellos amortiguadores en los que la espiga central puede recorrer todo el cilindro como es el caso de los utilizados en direcciones de motocicletas.

## 6.6 Suspensión Neumática e Hidroneumática

Como se ha mencionado en el apartado 6.5 las suspensiones neumáticas son de especial interés en vehículos industriales. Algunos ejemplos de construcción se muestran en la Figura 6.15, en donde puede verse que el control en altura del vehículo es posible con la instalación de una válvula accionada por el acercamiento entre las masas suspendida y no suspendida. Ésta es una de las propiedades más interesantes de este tipo de suspensiones. En efecto, en suspensiones tradicionales de muelles metálicos, la frecuencia natural ( $\omega_n$ ) es función directa de la deflexión estática ( $x_{st}$ ):

$$x_{st} = \frac{g}{\omega_n^2}$$

Para reducir la frecuencia natural a valores en torno a  $1\text{Hz}$  se deben permitir deflexiones estáticas del orden de  $250\text{mm}$ , lo cual puede dificultar el diseño del mecanismo de la

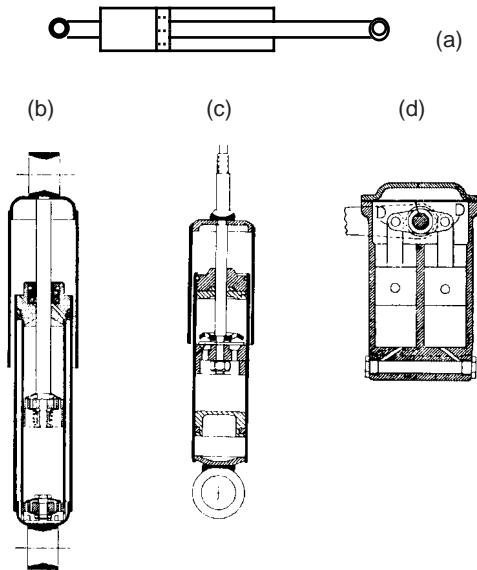


Figura 6.18: Amortiguadores.

suspensión. En cambio, en suspensiones neumáticas, la deflexión estática se puede variar arbitrariamente modificando la presión inicial.

En el caso de suspensión hidroneumática (Fig 6.19), el accionamiento de los muelles de nitrógeno se hace a través de un líquido. El pistón que lo acciona puede ser troncocónico para dotar al muelle de cierta no-linealidad. La válvula hace las veces de amortiguador. La interconexión entre suspensiones delantera y trasera es fácil. Esta interconexión mejora las características de cabeceo, aunque también aumenta la rigidez vertical global. La interconexión de suspensiones en cada eje puede hacer las veces de estabilizador al vuelco. También es fácil diseñar un sistema para el control de altura (Fig. 6.20).

La suspensión hidroelástica (Fig. 6.21) es similar a la hidroneumática. La diferencia son los muelles de elastómero a cortante que sustituyen a los de hidrógeno .

## 6.7 Suspensión Activa

El concepto de suspensión totalmente activa es el de una suspensión con actuadores, sin elementos pasivos que absorben o almacenan energía. El sistema, estaría dotado de un “lector” de carretera capaz de enviar información sobre el estado de la carretera delante del vehículo a un actuador de la rueda. Éste tomaría las medidas necesarias para mantener la masa suspendida a cota constante (aceleraciones nulas). Un tal sistema es aún ciencia ficción pues, aun cuando la tecnología es factible, los costes de fabricación y, sobre todo, los de operación (potencia necesaria para los actuadores) representan un serio inconveniente para su desarrollo.

En suspensiones semi-activas (Fig. 6.22), la actuación afecta a alguno de los parámetros de la suspensión, en general se controla el coeficiente de amortiguación y, a veces, también la rigidez del muelle. La denominación “semi-activa” se refiere a suspensiones en las que

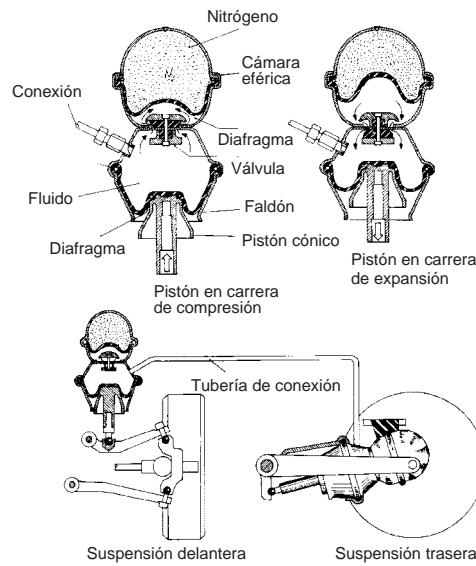


Figura 6.19: Suspensión hidroneumática.

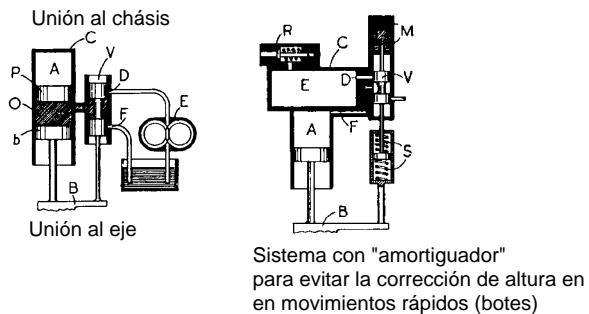


Figura 6.20: Control de altura en suspensiones hidroneumáticas.

no se necesita más potencia exterior que la requerida para operar válvulas, sensores y controladores.

La Figura 6.25 muestra los resultados analíticos y experimentales obtenidos con un modelo de cuarto de vehículo (Fig. 6.23) en el que se puede controlar el amortiguador. Un motor de pasos controla la válvula del amortiguador (Fig. 6.24) permitiendo abrir un número arbitrario de orificios (25 posiciones), de esta manera se puede elegir entre cualquiera de las curvas Fuerza–Velocidad relativa ( $F-V_{\text{rel}}$ ) de la Figura 6.24. Los resultados muestran dos tipos de control distintos:

1. Control ON/OFF:

$$F = \begin{cases} C_{\text{on}} V_{\text{rel}} & \text{si } V_{\text{abs}} V_{\text{rel}} > 0 \\ C_{\text{off}} V_{\text{rel}} & \text{si } V_{\text{abs}} V_{\text{rel}} < 0 \end{cases}$$

donde  $C_{\text{on}}$  es el coeficiente de amortiguación que se obtiene cuando la válvula está parcialmente cerrada. Al cerrar más o menos orificios se obtienen coeficientes

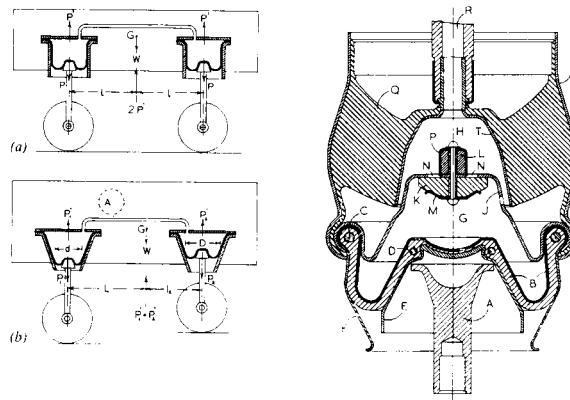


Figura 6.21: Suspensión hidroelástica.

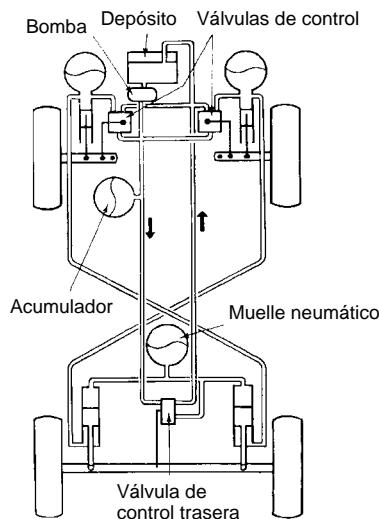


Figura 6.22: Suspensión semiactiva.

distintos,  $C_{\text{on}}$  se puede elegir entre 25 valores. Por otra parte,  $C_{\text{off}}$  es el coeficiente más bajo posible, el que se obtiene con la válvula de bypass abierta. Por último,  $F$  es la fuerza de reacción del amortiguador,  $V_{\text{rel}}$  es la velocidad relativa entre los dos extremos (“ojos”) del amortiguador, y  $V_{\text{abs}}$  es la velocidad de la masa suspendida respecto de unos ejes fijos.

## 2. Control continuo semiactivo:

$$F = \begin{cases} C_{\text{Con}} V_{\text{abs}} & \text{si } V_{\text{abs}} V_{\text{rel}} > 0 \\ C_{\text{off}} V_{\text{rel}} & \text{si } V_{\text{abs}} V_{\text{rel}} < 0 \end{cases}$$

La diferencia con el control anterior es la variación continua de  $C_{\text{On}}$  en el tramo activo. Con esta variación se consiguen fuerzas de reacción en el amortiguador

iguales (aproximadamente) a un coeficiente por la velocidad absoluta de la masa suspendida. Con esto se simula un amortiguador anclado directamente a un elemento fijo (*skyhook damper*).

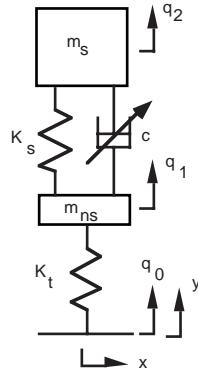


Figura 6.23: Modelo 1/4 con amortiguador activo.

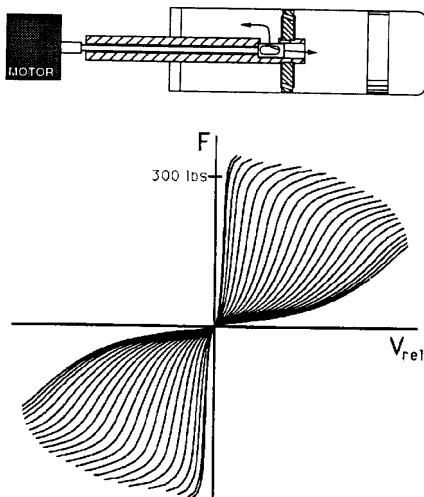


Figura 6.24: Amortiguador activo.

El sistema experimental (utilizado para comprobar la efectividad de los dos tipos de control) es capaz de medir la fuerza en el amortiguador, la aceleración en la masa  $M$  (Fig. 6.23), el desplazamiento de  $M$ , y el desplazamiento relativo en los muelles  $K_s$  y  $K_t$ . La excitación se hace lo más cercana posible al ruido blanco, es más, las diferencias entre la entrada real y el ruido blanco se modelaron también en el análisis.

La calidad de la suspensión se mide en base a cuatro parámetros:

1. Raíz cuadrática media de la fuerza de contacto rueda–carretera (normalizada)

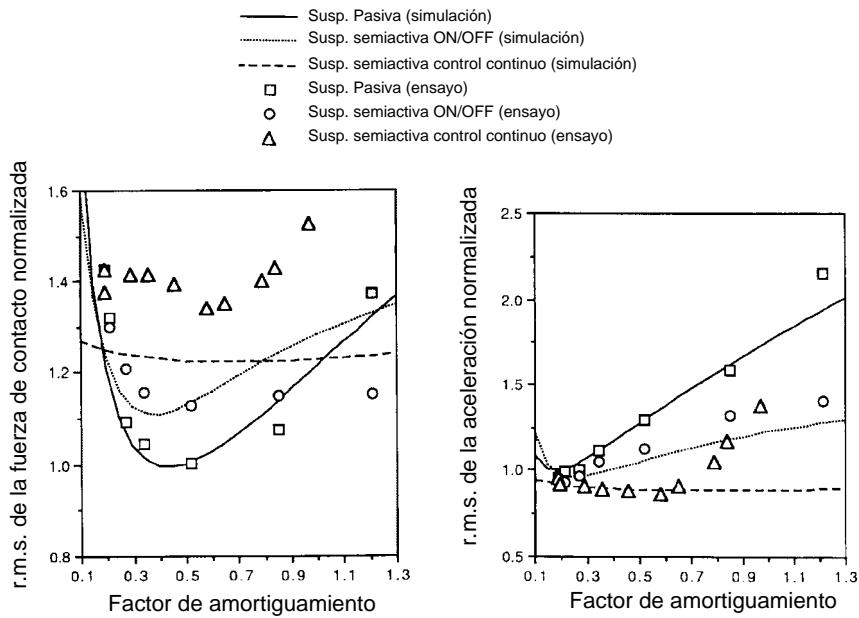


Figura 6.25: Resultados numéricos y experimentales sobre modelo 1/4 pasivo, con control ON/OFF, y con control continuo semiactivo.

2. Raíz cuadrática media de la aceleración en el cuerpo de vehículo (normalizada)
3. Raíz cuadrática media del desplazamiento relativo en la suspensión (normalizado)
4. Porcentaje de rebote

Los resultados se muestran en la Figura 6.25. Se observa que un simple control ON/OFF es capaz de mejorar la fuerza de contacto y la aceleración al mismo tiempo. Por otra parte, el control continuo semiactivo produce mejoras importantes en un rango amplio de coeficientes de amortiguamiento.

# Capítulo 7

## Sistema de Frenos

Todos los vehículos están dotados de un sistema para transformar su energía cinética en algún otro tipo de energía y, de esta forma, reducir su velocidad. En el caso de vehículos automóviles, en general, la energía cinética se transforma directamente en energía térmica que se descarga a la atmósfera. El aparato para hacer la transformación (el freno) suele ser un dispositivo de fricción controlado por un circuito de presión.

En este capítulo se analizan brevemente algunos aspectos relacionados con la dinámica de vehículos sometidos a fuerzas de frenado, y se describen los distintos elementos que componen el sistema.

### 7.1 Estabilidad con un Eje Bloqueado

La disipación de energía en los frenos de un automóvil se traduce en la generación de una fuerza de rozamiento entre los neumáticos y la calzada. La zona de contacto del neumático con la carretera está dividida en una región de adherencia y otra de deslizamiento (ver capítulo 8). Cuando se satura la zona de contacto, toda ella pasa a ser región de deslizamiento y la resultante de tensiones tangenciales ( $F$ ) puede expresarse como un “coeficiente de fricción” ( $\mu$ ) por la carga normal a la superficie ( $N$ ). En cualquier otra situación, la fuerza de rozamiento será inferior a  $\mu N$ . Se puede definir un coeficiente de saturación, o coeficiente de rozamiento aprovechado, como el cociente entre la resultante de tensiones tangenciales y la carga normal en cada eje (sumando las fuerzas de cada neumático del eje):

$$\mu_1 = \frac{F_1}{N_1} \quad \mu_2 = \frac{F_2}{N_2}$$

donde los subíndices 1 y 2 hacen referencia a los ejes delantero y trasero, respectivamente (Fig. 7.1). Por definición, los coeficientes  $\mu_1$  y  $\mu_2$  tienen valores comprendidos entre 0 y  $\mu$ .

Cuando el coeficiente de saturación alcanza el valor  $\mu$ , se produce, pasado un corto tiempo, el bloqueo de la rueda correspondiente. Para una rueda bloqueada todas las direcciones presentan la misma resistencia al movimiento. La dirección diametral ya no es una dirección privilegiada en la que la resistencia a la marcha es muy inferior a la de cualquier otra dirección. Una rueda bloqueada es, por tanto, una rueda incontrolable direccionalmente. En el párrafo siguiente se analiza la estabilidad del vehículo frente al bloqueo de alguno de sus ejes.

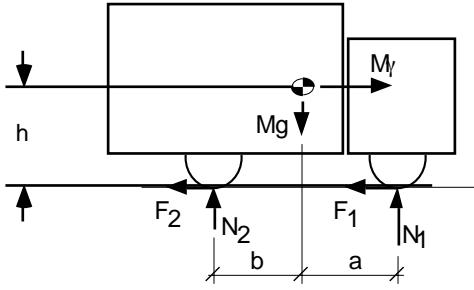


Figura 7.1: Equilibrio de fuerzas durante el frenado.

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos en un automóvil que frena (Fig. 7.1) son las siguientes:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= Mg \\ F_1 + F_2 &= M\gamma \\ N_1(a + b) &= M\gamma h + Mgb \end{aligned} \quad (7.1)$$

La máxima deceleración de frenado se consigue cuando las dos ruedas están a punto de bloquearse al mismo tiempo. En este caso  $F_1 = \mu N_1$  y  $F_2 = \mu N_2$ , con lo que  $\gamma = mg$  (sustituyendo en la segunda de las ecuaciones de 7.1). La máxima deceleración de frenado es  $\mu$  veces el valor de la aceleración de la gravedad. En el caso general no va ser posible hacer que los dos ejes se bloqueen al mismo tiempo, la deceleración en este caso será inferior a  $\mu g$ .

Para estudiar la estabilidad frente al bloqueo del eje delantero se supone que la posición del vehículo ha sufrido una perturbación de ángulo  $\theta$  respecto de su trayectoria longitudinal (Fig. 7.2a). La situación será estable si el momento restaurador, que tiende a devolver el vehículo a su posición longitudinal, es superior al momento desestabilizador. La condición se escribe como:

$$M\gamma b \sin \theta > \mu N_1(a + b) \sin \theta$$

Sustituyendo el valor de  $N_1$  (ec. 7.1) y reordenando los términos se puede reescribir la inecuación de la siguiente manera:

$$b > \frac{\mu \gamma h}{\gamma - \mu g}$$

El numerador de la expresión es siempre positivo, por otra parte, como se ha visto, la deceleración no puede en ningún caso ser mayor que  $\mu g$ , con lo que el denominador es siempre negativo. Luego la condición de estabilidad se limita a que  $b$  sea mayor que un número negativo, lo cual es siempre cierto pues no se pueden fabricar vehículos con el centro de gravedad por detrás del eje trasero. El bloqueo de las ruedas delanteras es estable, el vehículo no tiene tendencia a hacer el trompo en este caso.

La condición de estabilidad con las ruedas traseras bloqueadas se escribe de la siguiente manera (ver Fig. 7.2b):

$$\mu N_2(a + b) \sin \theta > M\gamma a \sin \theta$$

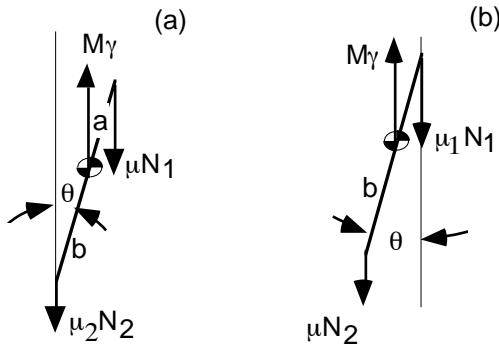


Figura 7.2: Equilibrio de fuerzas durante el bloqueo del tren delantero (a) y trasero (b).

Lo cual se traduce en:

$$a > \frac{\mu\gamma h}{\mu g - \gamma}$$

Aunque la desigualdad anterior es posible, no es en absoluto probable, ya que el denominador puede llegar a ser pequeño. El bloqueo de las ruedas traseras de un vehículo suele ser inestable, esto es, un vehículo con las ruedas traseras bloqueadas tiene tendencia a hacer el trompo. Como veremos, existen dispositivos para impedir que las ruedas traseras se bloqueen antes que las delanteras.

## 7.2 El Frenado

### 7.2.1 Frenado Convencional

Un sistema de frenado convencional está formado por un circuito hidráulico de presión única que acciona las zapatas o pastillas de cada rueda. Las fuerzas de frenado desarrolladas en cada eje ( $F_i$ ,  $i = 1, 2$ ) son proporcionales a la presión del circuito ( $p$ ):

$$F_i = K_i p$$

donde  $K_i$ ,  $i = 1, 2$  son dos constantes de proporcionalidad. Éstas dependen del dispositivo de frenado en cuestión y del radio de la rueda. Las ecuaciones de equilibrio 7.1 se escriben ahora como:

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{\mu_1} p + \frac{K_2}{\mu_2} p &= Mg \\ K_1 p + K_2 p &= M\gamma \\ \frac{K_1}{\mu_1} p(a + b) &= M\gamma h + Mgb \end{aligned} \tag{7.2}$$

Conocida la presión en el circuito, se pueden determinar los coeficientes de saturación en cada eje y la deceleración que sufre el vehículo. Como alternativa, se puede elegir el coeficiente  $\mu_2$  como variable independiente, y expresar el resto de variables en función de

ella:  $p(\mu_2)$ ,  $\gamma(\mu_2)$ ,  $\mu_1(\mu_2)$ . Las expresiones resultantes son:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{\lambda a' \mu_2}{b' + \mu_2(1 + \lambda)h'} \\ p &= \frac{Mg\mu_2 a'}{K_2 [1 + \mu_2(1 + \lambda)h']} \\ \gamma' &= \frac{\mu_2(1 + \lambda)a'}{1 + \mu_2(1 + \lambda)h'}\end{aligned}\quad (7.3)$$

Donde  $\lambda$  es el cociente  $\lambda = K_1/K_2$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $h'$  son los parámetros adimensionales que definen la geometría del vehículo ( $a' = a/L$  con  $L = a + b$ ,  $b' = b/L$ ,  $h' = h/L$ ), y  $\gamma'$  es la deceleración adimensional en g's ( $\gamma' = \gamma/g$ ). El aspecto típico de las Expresiones 7.3 se muestra en la Figura 7.3a.

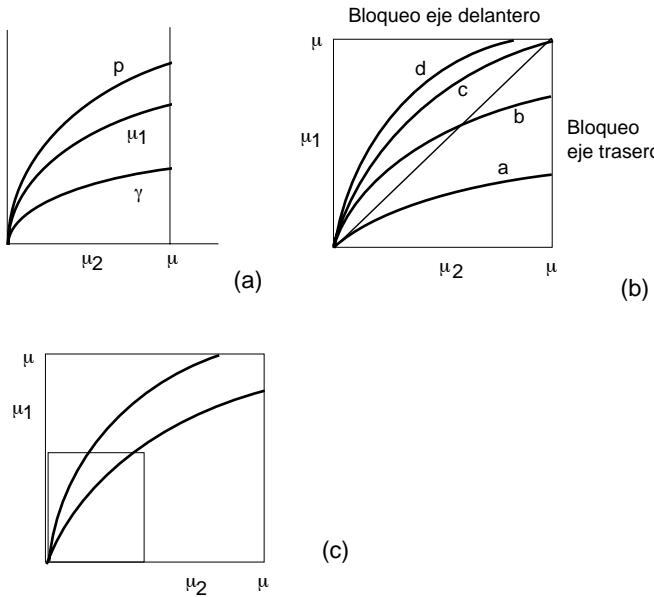


Figura 7.3: Diagramas de frenado para el caso convencional.

La discusión sobre el bloqueo preferencial de uno u otro eje es fácil en el plano  $\mu_1-\mu_2$ . Si la curva corta a la recta vertical  $\mu_2 = \mu$  dentro del rectángulo de lado  $\mu$ , entonces el eje trasero se bloquea antes que el delantero. Si la salida del rectángulo se produce por la cara superior, las ruedas delanteras se bloquean antes que las traseras. Se pueden distinguir los siguientes casos (Fig. 7.3):

1. La pendiente en el origen de la curva  $\mu_1(\mu_2)$  es inferior a 1. En este caso se tiene prioridad de bloqueo del eje trasero. La derivada en el origen viene dada por:

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2} = \frac{a\lambda b}{[b + \mu_2 h(\lambda + 1)]^2}$$

De manera que la condición  $(d\mu_1/d\mu_2)_{\mu_2=0} < 1$  se traduce en:

$$\lambda < \frac{b}{a}$$

2. También se puede tener prioridad de bloqueo del eje trasero en aquellos casos en que se produce el corte con la diagonal  $\mu_1 = \mu_2$  dentro del cuadrado de lado  $\mu$ , a pesar de que la pendiente en el origen sea superior a la unidad. La condición se escribe como:

$$\mu_2 = \mu_1 = \frac{a\lambda\mu_2}{b + \mu_2 h(\lambda + 1)} < \mu$$

Que se traduce en:

$$\lambda < \frac{b + \mu h}{a - \mu h}$$

3. El bloqueo simultaneo de los dos ejes se produce en aquellos casos en que el corte de la curva con la diagonal se produce justo en el vértice. Esto es:

$$\mu_2 = \mu_1 = \mu$$

O lo que es lo mismo:

$$\lambda = \frac{b + \mu h}{a - \mu h}$$

4. Cuando la intersección de la curva con la diagonal se produce fuera del cuadrado, se tiene prioridad de bloqueo del eje anterior:

$$\lambda > \frac{b + \mu h}{a - \mu h}$$

Las curvas  $p(\mu_2)$ ,  $\gamma(\mu_2)$ ,  $\mu_1(\mu_2)$  son función de una serie de parámetros que varían con la carga del vehículo. Estos parámetros son la masa total  $M$ , y aquellos que indican la posición del centro de gravedad:  $a$ ,  $b$  y  $h$ . Un vehículo concreto está entonces caracterizado por un abanico de curvas (Fig. 7.3c) en función de su nivel de carga. Además, el cuadrilátero puede disminuir su lado  $\mu$  drásticamente cuando, por ejemplo, se pasa a un terreno mojado. Estos dos factores pueden hacer que la prioridad de bloqueo sea distinta para diversas condiciones.

### 7.2.2 Frenado Óptimo Ideal

En un sistema de frenos óptimo la distribución de presiones entre ejes puede regularse continuamente, de manera que los coeficientes de saturación sean iguales en los dos ejes. En este caso, los dos ejes están, en todo momento, y para todas las condiciones de marcha, con idéntica reserva de adherencia. Las ecuaciones 7.3 se modifican ahora de la siguiente manera. La variable  $p$  se transforma en dos nuevas variables: la presión en el circuito delantero  $p_1$ , y la presión en el circuito trasero  $p_2$ . Por otra parte, las variables  $\mu_1$  y  $\mu_2$  se transforman en una sola ( $\mu_s$ ) puesto que los coeficientes de saturación coinciden en los

dos ejes. Las nuevas ecuaciones se escriben:

$$\begin{aligned}\frac{K_1}{\mu_s}p_1 + \frac{K_2}{\mu_s}p_2 &= Mg \\ K_1p_1 + K_2p_2 &= M\gamma \\ \frac{K_1}{\mu_s}p_1(a+b) &= M\gamma h + Mgb\end{aligned}\tag{7.4}$$

La resolución del sistema proporciona las siguientes expresiones para las curvas  $p_1(\mu_s)$ ,  $p_2(\mu_s)$  y  $\gamma(\mu_s)$ :

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{Mg}{K_1(a+b)}(b+h\mu_s)\mu_s \\ p_2 &= \frac{Mg}{K_2(a+b)}(a-h\mu_s)\mu_s \\ \gamma &= \mu_s g\end{aligned}$$

Cuyo aspecto general se muestra en la Figura 7.4a. La Figura 7.4b muestra gráficamente la capacidad de frenado desaprovechada en sistemas convencionales. Para un mismo nivel de saturación en el eje trasero, se consigue menor deceleración  $\gamma$  en un sistema convencional que en el óptimo.

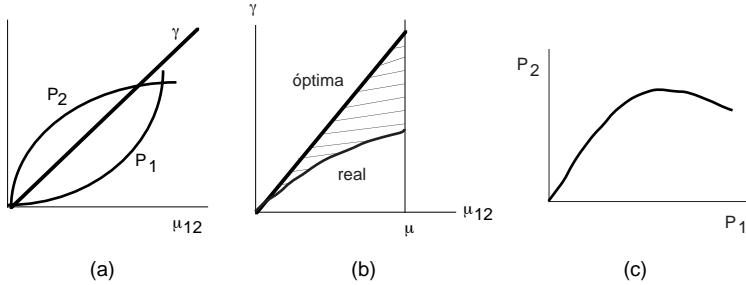


Figura 7.4: Diagramas de frenado en el caso óptimo.

Un sistema de frenado óptimo debe ser capaz de variar la presión del circuito trasero en función de la del delantero según una curva precisa (Fig 7.4c) que depende, además, del nivel de carga del vehículo. Por otra parte, un sistema como el descrito no impide que los ejes se bloqueen, sólo fuerza a que el bloqueo se produzca simultáneamente. Todos estos inconvenientes desaconsejan el uso de un sistema de este tipo. Una alternativa más inteligente es modular la presión de cada freno para evitar el bloqueo de la rueda en cuestión (sistemas ABS).

### 7.2.3 Válvulas Limitadoras de Presión

La manera más económica de evitar la prioridad de bloqueo del eje trasero es la colocación de una válvula que limite la presión en este circuito. Se tiene un sistema convencional ( $p_1 = p_2$ ) hasta una presión determinada, cualquier incremento posterior de la presión sólo se deja sentir en el circuito delantero, el trasero está cerrado (Fig. 7.5). En la Figura 7.5

se muestran las presiones de corte necesarias para vehículo vacío y vehículo lleno. De la misma manera se pueden determinar las presiones intermedias y calibrar la válvula en consecuencia.

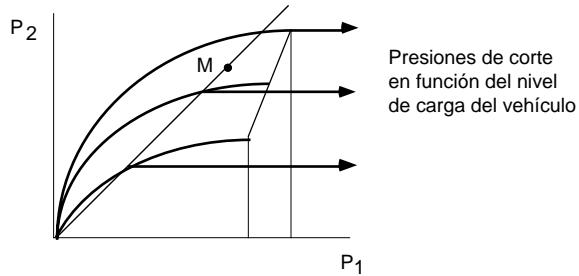


Figura 7.5: Presiones de corte en función del nivel de carga del vehículo.

En la Figura 7.6 se muestra un esquema de una tal válvula limitadora de presión. La presión de corte está regulada por el nivel de carga del vehículo. El cuerpo de la válvula está fijado al chasis, mientras que el pistón está unido al eje a través de un muelle. Cuando el vehículo está cargado, la fuerza ejercida por el muelle es mayor, y la presión de cierre crece. El aspecto general de las curvas  $p(\mu_2)$ ,  $\gamma(\mu_2)$ ,  $\mu_1(\mu_2)$  resultantes se muestran en la Figura 7.7.

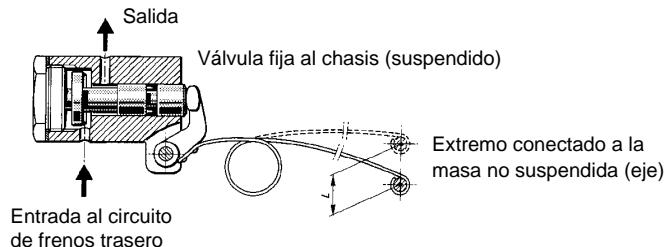


Figura 7.6: Válvula limitadora de presión.

La prioridad de bloqueo se puede analizar sobre curvas  $p_2(p_1)$  (Fig. 7.5). En efecto, para un nivel de carga como el mostrado en la Figura 7.5, si el vehículo frena con una presión trasera  $p_2$  superior a la óptima (punto M en la figura) se tendrá prioridad de bloqueo en el eje trasero. Si por el contrario la presión  $p_2$  es inferior a la óptima, la prioridad de bloqueo se dará en el eje delantero. La presión de corte se obtiene haciendo  $p_2 = p_1$  en la curva de presión óptima. La expresión resultante es:

$$p_c = \frac{Mg(\lambda a - b)}{K_2 h(\lambda + 1)^2}$$

Existen válvulas limitadoras de presión que no bloquean totalmente el circuito trasero. Al “cerrar” la válvula, se interpone una perdida de carga adicional que reduce el aumento de presión en el circuito trasero. Para describir esta válvula se facilitan dos parámetros:

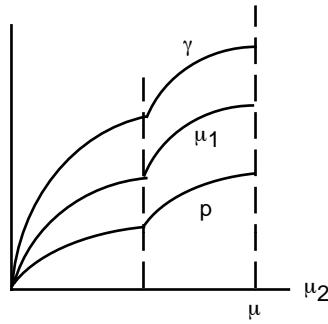


Figura 7.7: Diagramas de frenado en sistemas con válvula limitadora.

la presión de cierre y la razón de crecimiento a partir de este valor. Así, una válvula 2/0.3 permanece abierta hasta que la presión de actuación alcanza los  $2MPa$ , a partir de este valor, un incremento unitario de la presión de actuación se traduce en un incremento de 0.3 unidades en el circuito trasero. En el caso general, las presiones en cada circuito vienen dadas por:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_a \\ p_2 &= \begin{cases} p_a & \text{para } p_a \leq p_c \\ p_c + r(p_a - p_c) & \text{para } p_a \geq p_c \end{cases} \end{aligned}$$

Donde  $p_c$  es la presión de cierre,  $p_a$  la presión de actuación, y  $r < 1$  la razón de crecimiento.

#### 7.2.4 Sistemas de Freno Antibloqueo

Los sistemas antibloqueo reciben información del movimiento de cada rueda y la procesan para determinar si se está en situación de bloqueo inminente. Si éste es el caso, se reduce la presión en el circuito de la rueda en cuestión hasta que se recupera la rodadura de ésta. La problemática relacionada con los criterios de bloqueo, y la relativa a los dispositivos moduladores, se comentan a continuación.

El siguiente ejercicio sencillo clarifica el proceso de bloqueo de una rueda frenada. Sea una rueda de masa  $M$  y momento de inercia  $I$ , que está siendo frenada con un momento  $M_f$ , y que genera una fuerza de fricción en la región de contacto igual a  $F_f$ . Las ecuaciones de equilibrio son (Fig. 7.8):

$$\begin{aligned} F_f &= M\gamma \\ M_f &= F_f R + I\alpha \end{aligned} \tag{7.5}$$

donde  $\gamma$  y  $\alpha$  son la deceleración lineal y angular, respectivamente, y  $R$  es el radio de la rueda.

Para la solución de las ecuaciones 7.5 se pueden distinguir dos casos:

1. La fuerza de rozamiento es menor que el máximo. En este caso la rueda gira sin deslizar y, por tanto, existe una relación cinemática entre la deceleración de su centro de gravedad y la deceleración angular. Estas condiciones se escriben como:

$$F_f < \mu M g \quad \alpha = \frac{\gamma}{R}$$

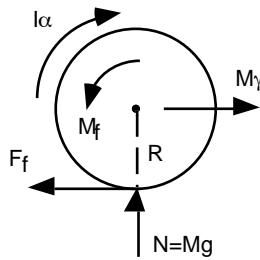


Figura 7.8: Fuerzas y momentos en una rueda frenada.

que introducidas en 7.5 proporcionan:

$$\gamma = \frac{M_f}{MR + \frac{I}{R}}$$

Esto es, la deceleración varía linealmente con el momento de frenado aplicado a la rueda (Fig 7.9). El resto de variables ( $\alpha$ ,  $F_f$ ) están también determinadas por el valor del par de frenado.

- Si la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo, se produce deslizamiento global en la región de contacto y se pierde la relación cinemática entre las deceleraciones lineal y angular. En cambio, se tiene una nueva restricción, la fuerza de rozamiento es conocida. Las condiciones se escriben ahora como:

$$F_f = \mu Mg \quad \alpha > \frac{\gamma}{R}$$

De donde se obtiene que:

$$\alpha = \frac{M_f - M\mu g R}{I}$$

La deceleración lineal es ahora constante y la angular varía linealmente con  $M_f$ , pero más rápidamente que en el caso (1), eventualmente se va a detener su giro, la rueda se bloquea.

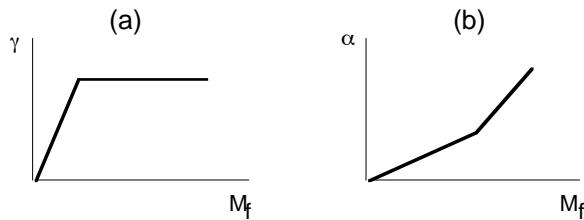


Figura 7.9: Variación de la aceleración lineal y angular de una rueda frenada.

En el caso de un vehículo con más de una rueda, las expresiones anteriores se modifican ligeramente. Pero el proceso de bloqueo es conceptualmente similar.

Un algoritmo muy simple, aunque difícil de implementar, para la detección del bloqueo inminente es el siguiente:

1. Si  $\alpha = \gamma/R$  entonces la rueda no desliza, no hay peligro de bloqueo, y se puede seguir incrementando la presión en el circuito del freno correspondiente.
2. Si  $\alpha > \gamma/R$  entonces la rueda está deslizando, es necesario reducir la presión en el circuito correspondiente para que se reestablezca la rodadura.

Para implementar este criterio se necesita un acelerómetro para medir  $\gamma$ , y un sensor en la rueda para medir  $\omega$ . Además, el sistema electrónico debe ser capaz de derivar la señal del sensor para obtener la aceleración angular  $\alpha$ . Como alternativa se usan los siguientes algoritmos que disminuyen el coste del dispositivo:

1. Si  $\alpha R \geq cg$  se considera que la rueda desliza. En efecto, si se toma  $c = 1.5\text{--}2$ , se tiene que la rueda se está desacelerando muy rápido. Además, es muy poco probable que esto corresponda a la deceleración global del vehículo puesto que se requerirían coeficientes de rozamiento muy elevados (1.5–2).
2. Una ligera modificación del criterio anterior que lo hace algo más fiable es la siguiente. El freno se libera si se cumple simultáneamente que  $\alpha R > 1.6g$  y  $\omega(t) < 0.95\omega(t-\Delta t)$ , donde  $\Delta t$  es una pequeña fracción de tiempo del orden de  $150ms$ . Esto asegura que efectivamente se está produciendo una deceleración importante.
3. El último criterio hace uso del supuesto de que es muy poco probable que las cuatro ruedas se bloqueen a la vez. Se compara la deceleración de la rueda con la media de las deceleraciones de las cuatro ruedas, si los valores son muy distintos se toma la decisión de liberar el freno.

El circuito hidráulico de un sistema ABS se muestra en la Figura 7.10. El sensor de velocidad angular envía una señal a la unidad de control para que se tome la decisión de seguir aumentando la presión o liberarla. El cilindro maestro comunica presión al líquido de frenos, este líquido accede, a través de la válvula solenoide, a la pinza del freno. En situaciones en las que interesa seguir aumentando la presión, el electroimán está inactivo y la válvula abierta. Cuando es necesario mantener la presión al valor actual, se hace pasar una corriente por el electroimán para cerrar la válvula e impedir que la presión creciente del cilindro maestro afecte al freno en cuestión. Si la decisión es la de disminuir la presión en el circuito, se hace pasar una corriente superior por el solenoide y se abre el conducto de retorno. El circuito de retorno está asistido por una bomba de pistones y válvulas de una sola dirección. Este sistema hace que la disminución de presión pueda hacerse rápidamente.

La Figura 7.11 muestra la variación de la velocidad de la rueda en función del tiempo, así como la variación de la presión y la velocidad del vehículo. La Figura 7.12 muestra el esquema de un sensor de velocidad de la rueda. Un imán genera una corriente eléctrica en la bobina que lo rodea cuando el campo magnético sufre una perturbación. Esta perturbación la produce una masa metálica en movimiento en las proximidades del imán. La señal senoidal resultante se puede convertir en digital con un simple discriminador (0 low, 1 high). De esta manera, el recuento de 1's en un pequeño intervalo de tiempo, conocida la separación entre dientes de la rueda, proporciona la velocidad angular de la misma.

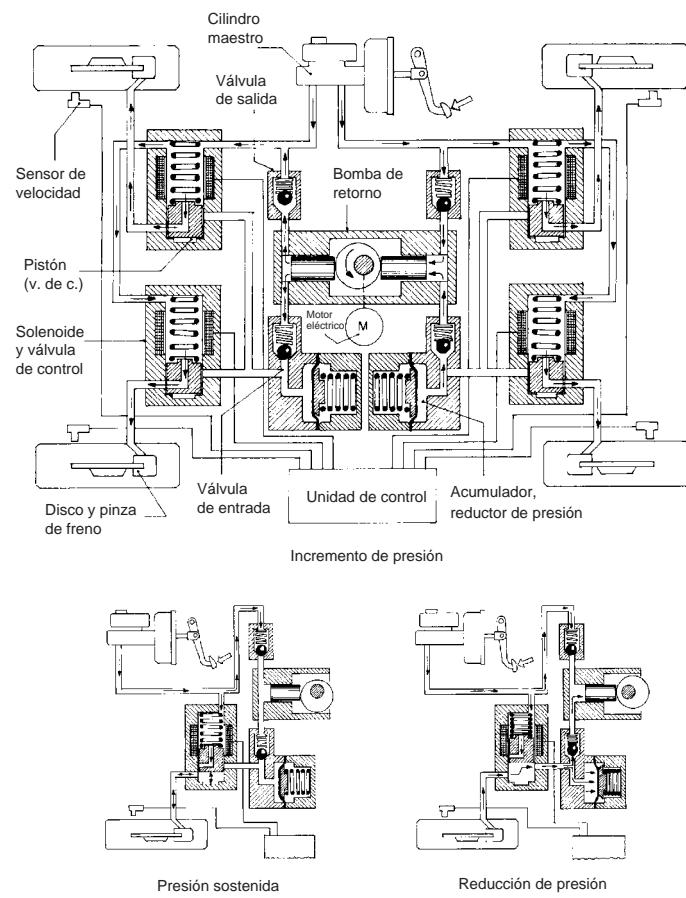


Figura 7.10: Circuito hidráulico de un sistema ABS.

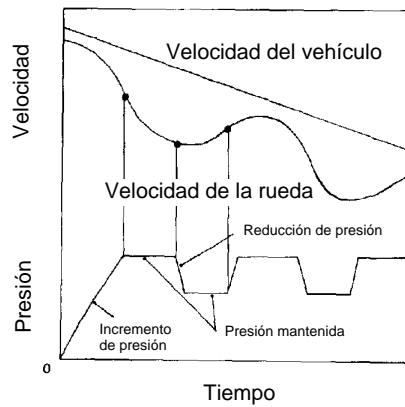


Figura 7.11: Velocidad del vehículo y de la rueda en función del tiempo.

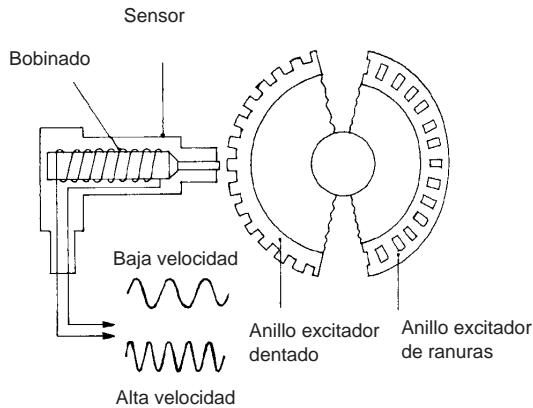


Figura 7.12: Sensor de velocidad angular.

### 7.2.5 Rendimiento y Distancia de Frenado

Se puede definir el rendimiento  $\eta_b$  de un sistema de frenos como el cociente:

$$\eta_b = \frac{\gamma}{\max(\mu_1, \mu_2)}$$

En efecto, la deceleración  $\gamma$  es siempre un valor intermedio entre los coeficientes de saturación delantero y trasero. De manera que cuando estos coeficientes coinciden (caso de frenado óptimo), también coinciden con el valor de la deceleración, y el rendimiento es entonces unidad. Cuando los niveles de saturación difieren mucho entre sí, el rendimiento toma un valor sustancialmente menor que la unidad.

Como alternativa, se puede definir el rendimiento de frenado como el cociente entre la deceleración real del vehículo y la máxima posible:

$$\eta_b = \frac{\gamma}{\mu g}$$

La distancia recorrida durante el frenado se expresa en función de este rendimiento. En efecto, el vehículo recorre la distancia  $ds$  en el intervalo de tiempo  $dt$ , la relación de estas dos variables con la velocidad es la siguiente:

$$ds = v dt = v \frac{dv}{\gamma} = v \frac{dv}{F_f/M} = \frac{M}{F_f} v dv$$

La expresión anterior se puede corregir para incluir el efecto de la inercia al giro de los elementos rotativos que se están decelerando. Para ello se incrementa la masa del vehículo  $M$  mediante un factor  $\beta$  de mayoración. En automóviles este factor está en torno a 1.04:

$$ds = \frac{\beta M}{F_f} v dv$$

La fuerza total resistente viene dada por (Fig. 7.13):

$$F_f = (F_1 + F_2) + Mg \sin \theta + \rho Mg \cos \theta + c_a v^2$$

donde  $c_a$  es un coeficiente que tiene en cuenta la resistencia aerodinámica y el área frontal del automóvil. Las fuerzas ( $F_1 + F_2$ ) se obtienen al multiplicar la máxima fuerza de frenado posible ( $\mu Mg$ ) por el rendimiento  $\eta$ :

$$F_1 + F_2 = \eta \mu Mg$$

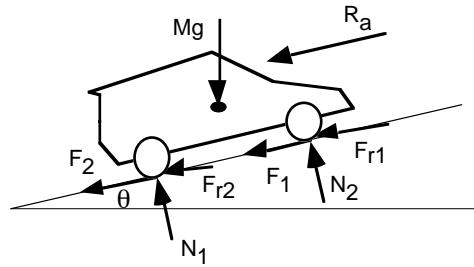


Figura 7.13: Fuerzas que se oponen al movimiento en un vehículo que frena.

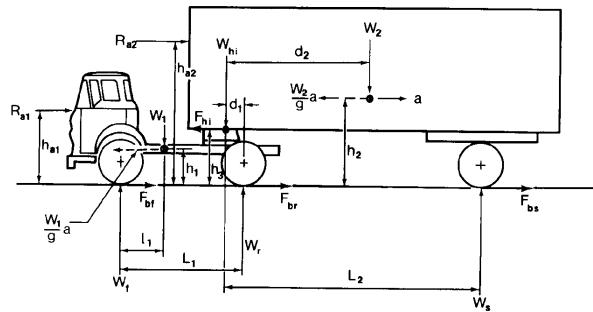
La distancia recorrida cuando se frena desde la velocidad  $v_1$  a la velocidad  $v_2$  es (integral de  $ds$ ):

$$s = \frac{\beta M}{2c_a} \ln \left( \frac{Mg(\eta\mu + \sin\theta + \rho \cos\theta) + c_a v_1^2}{Mg(\eta\mu + \sin\theta + \rho \cos\theta) + c_a v_2^2} \right)$$

### 7.2.6 Frenado de un Tractor–Semirremolque

Las ecuaciones de equilibrio para cada miembro de la composición y para el conjunto del camión se dan en la Figura 7.14. Al igual que en el caso de dos ejes, este sistema admite solución para cada una de las políticas de frenado: convencional, óptimo, con válvulas limitadoras.

También es posible hacer un estudio de la estabilidad frante al bloqueo de alguno de los ejes. Se obtiene que la prioridad de bloqueo debe ser: eje delantero del tractor, eje del semirremolque, eje trasero del tractor. Si se bloquean las ruedas traseras del tractor se produce una tijera. Si se bloquean las ruedas del semirremolque se produce el coleo del mismo, esto no tiene demasiada influencia en la estabilidad del tractor, aunque puede ser causa de otros accidentes en la carretera. Si se bloquean las ruedas delanteras se produce una pérdida de control direccional.



**A** Para la tractora

$$\begin{aligned}
 W_f + W_r &= W_1 + W_{hi} \\
 C_f W_f + C_r W_r &= \frac{a}{g} W_1 + F_{hi} \\
 \frac{a}{g} W_1 h_1 + F_{hi} h_3 + W_1 (L_1 - l_1 - d_1) + W_r d_1 &= W_f (L_1 - d_1)
 \end{aligned}$$

**B** Para el semirremolque

$$\begin{aligned}
 W_{hi} + W_s &= W_2 \\
 F_{hi} + C_s W_s &= \frac{a}{g} W_2 \\
 W_2 d_2 + F_{hi} h_3 &= \frac{a}{g} W_2 h_2 + W_s L_2
 \end{aligned}$$

**A** Para la tractora

$$\begin{aligned}
 W_f + W_r &= W_1 + W_{hi} \\
 C_f W_f + C_r W_r &= \frac{a}{g} W_1 + F_{hi} \\
 \frac{a}{g} W_1 h_1 + F_{hi} h_3 + W_1 (L_1 - l_1 - d_1) + W_r d_1 &= W_f (L_1 - d_1)
 \end{aligned}$$

**B** Para el semirremolque

$$\begin{aligned}
 W_{hi} + W_s &= W_2 \\
 F_{hi} + C_s W_s &= \frac{a}{g} W_2 \\
 W_2 d_2 + F_{hi} h_3 &= \frac{a}{g} W_2 h_2 + W_s L_2
 \end{aligned}$$

Figura 7.14: Equilibrio en el frenado de una composición tractor–semirremolque.

## 7.3 Frenos

### 7.3.1 Sistema General

El accionamiento mecánico de los frenos de un vehículo (Fig. 7.15a), aunque en principio muy simple, presenta una serie de inconvenientes:

1. Se producen desequilibrios en los pares de frenado de cada rueda, a no ser que las distancias entre zapata y tambor estén bien igualadas
2. Dificultad para limitar los pares traseros
3. Para multiplicar la fuerza se necesita un gran recorrido de pedal o sistemas complejos

El primer problema tiene una solución ingeniosa que puede utilizarse en otros muchos mecanismos. Consiste en dividir la fuerza a través de un brazo flotante (Fig. 7.15b). En este caso, la fuerza transmitida a cada uno de los frenos es necesariamente la misma. El giro del brazo flotante absorbe las pequeñas diferencias de holgura en cada tambor.

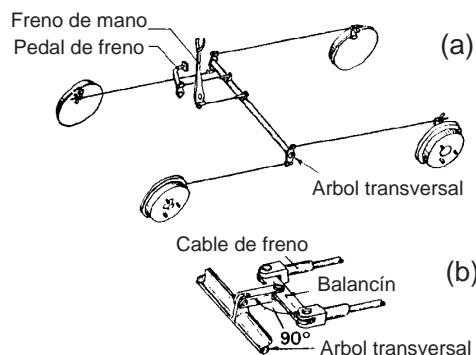


Figura 7.15: Accionamiento mecánico de frenos.

Los dispositivos hidráulicos permiten una fácil solución de los problemas anteriores. En efecto, la igualdad de pares de frenado se resuelve automáticamente puesto que la presión en circuitos comunicados debe ser la misma, independiente de los recorridos de cada bombín. La limitación de los pares en el circuito trasero se implementa fácilmente, basta con interponer una válvula entre los circuitos delantero y trasero que se cierre a una presión determinada. La multiplicación de la fuerza se ha resuelto con sistemas relativamente simples como los servofrenos de vacío.

En general los circuitos hidráulicos se dividen en dos para evitar que algún fallo en la presión deje totalmente inactivo el sistema de frenos. En la Figura. 7.16a se muestran algunas alternativas. División entre circuito delantero y trasero, división en diagonal, y división en triángulo con doble circuitería delantera. Cualquiera de estas divisiones requiere partir el cilindro maestro en dos. En la Figura 7.16b se muestra este tipo de cilindros tandem. La figura es autoexplicativa en cuanto al funcionamiento del sistema en caso de fallo en alguna de las líneas de presión. La reserva de líquido de frenos es necesaria para compensar las dilataciones debidas a los cambios de temperatura durante

el funcionamiento y, en su caso, para compensar las pequeñas pérdidas que se puedan producir.

Cuando los niveles de fuerza necesarios son muy importantes, se recurre a sistemas de accionamiento neumático. En este caso, el pedal de freno no se utiliza para generar presión en el circuito sino para activar una válvula de control. Estos dispositivos se comentan en el Apartado 7.3.3.

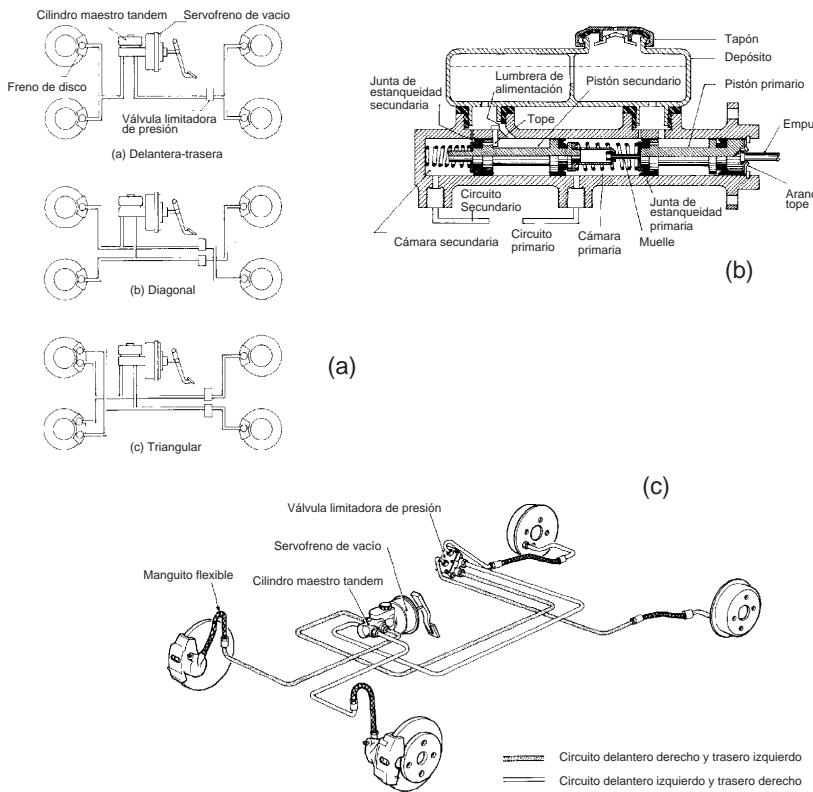


Figura 7.16: Sistemas hidráulicos para el accionamiento de frenos.

### 7.3.2 Servofreno de Vacío

Los servofrenos de vacío se utilizan en motores de gasolina aprovechando la depresión en los colectores de admisión. Esta depresión aumenta precisamente en las situaciones en que se hace uso del freno, esto es, con la palometa del carburador cerrada.

El esquema general es el de la Figura 7.17a. La diferencia de presiones a uno y otro lado del diafragma ayuda al pistón en su movimiento de compresión del líquido de frenos. Cuando se acciona el freno, se abre una válvula que deja entrar aire a presión atmosférica a un lado de la cámara, mientras que el otro se mantiene a la presión de los colectores de admisión. El gráfico de la Figura 7.17b muestra la presión en el cilindro maestro en función de la fuerza sobre el empulador del pedal de freno para los casos asistido y manual. Las dos pendientes son iguales para fuerzas pequeñas debido a que la válvula requiere una

fuerza inicial para su apertura. A partir de ese instante comienza a crecer la diferencia de presiones en el diafragma y, por tanto, la pendiente de la recta con asistencia es superior a la manual. Cuando se alcanza la máxima diferencia de presiones, la fuerza sobre el diafragma es constante y las dos rectas se hacen paralelas.

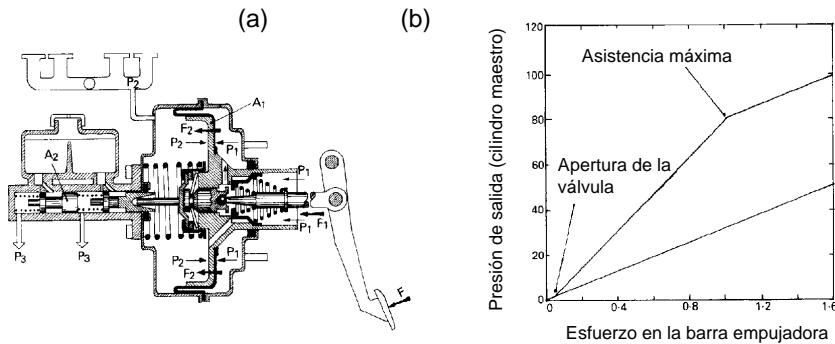


Figura 7.17: Esquema general de un servofreno de vacío.

La Figura 7.18 muestra el funcionamiento de la válvula del servofreno. Si no se ejerce fuerza sobre el impulsor (Fig. 7.18a), los muelles helicoidales mantienen la válvula abierta de manera que ambos lados del diafragma están a la presión de los colectores de admisión. Cuando se ejerce una fuerza sobre este impulsor (Fig. 7.18b), se cierra la comunicación con los colectores a la vez que se abre la comunicación con la atmósfera. La entrada de aire a mayor presión se transforma en una fuerza neta de asistencia. Cuando se libera el freno la situación vuelve a ser la de la Figura 7.18a. Esto significa que el aire que entró durante el frenado en la cámara del servo, pasa a los colectores y de aquí a los cilindros. De ahí que sea estrictamente necesario disponer de un filtro de aire a la entrada del servo.

### 7.3.3 Frenos de Aire Comprimido

Un esquema básico de un sistema de frenos por aire comprimido se muestra en la Figura 7.19. El aire se toma del exterior y se filtra en 2, en 3 se mezcla con alcohol para bajar su punto de congelación. En 4 se comprime y se envía a 5 desde donde se envía a 7 si la presión es baja, o a la calle si es alta. En este último caso el compresor trabaja en vacío y la potencia que consume es muy pequeña. El depósito 7 tiene una válvula de seguridad 6 y otra de drenaje para extraer el agua con alcohol condensada (no congelada). La válvula 10 se abre según la fuerza ejercida sobre el pedal de freno, actuando así sobre los bombines 1.

Para conseguir un sistema seguro ante el fallo (fail-safe) basta con invertir la válvula 10 y colocar unos potentes muelles para accionar los frenos. El aire comprimido se encarga entonces de mantener estos muelles inactivos. Algunos camiones tienen sistemas failsafe y tradicionales mezclados.

En la Figura 7.20 se muestra un secador de aire más efectivo que el simple mezclado con alcohol. En la Figura 7.21 se muestra un compresor de los utilizados para el sistema de frenos neumáticos. En este caso, el compresor recibe potencia a través de un embrague de manera que en lugar de hacer trabajar al compresor en vacío, se desconecta para alargar

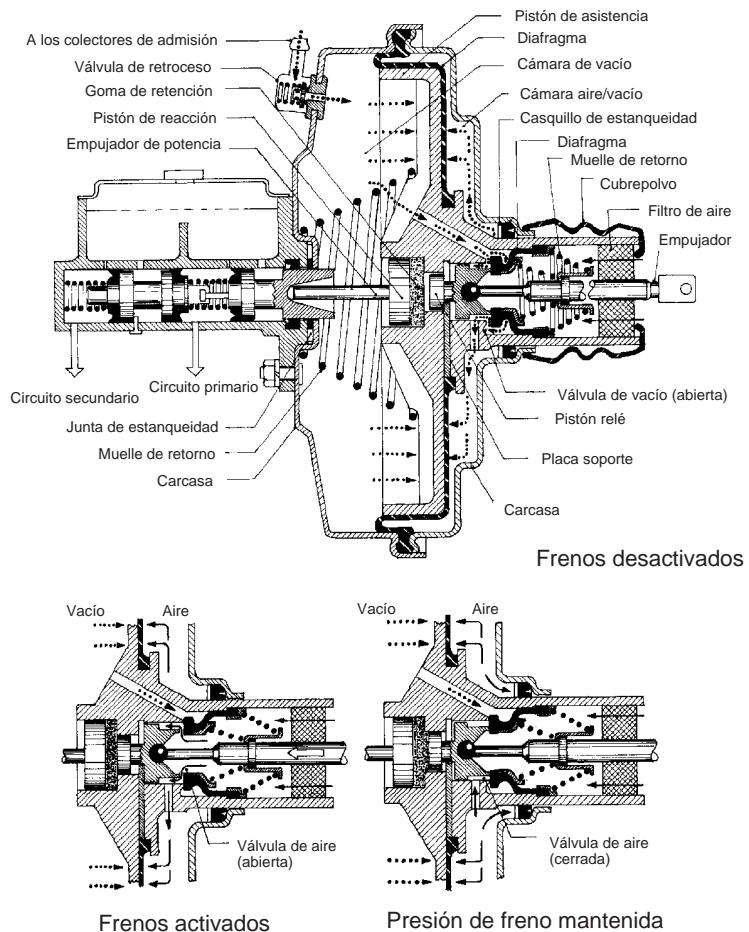


Figura 7.18: Funcionamiento de la válvula del servofreno.

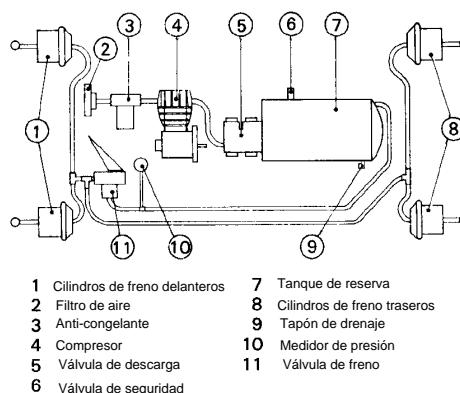


Figura 7.19: Sistemas de freno neumático.

su vida.

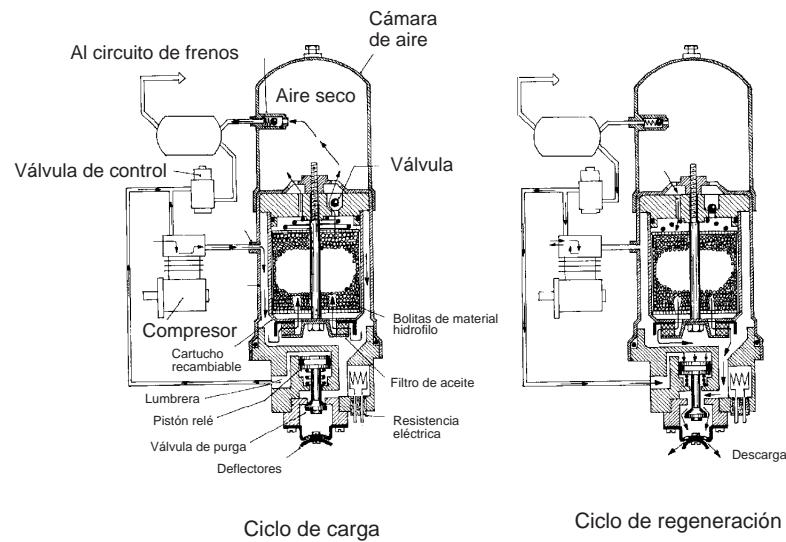


Figura 7.20: Secador de aire.

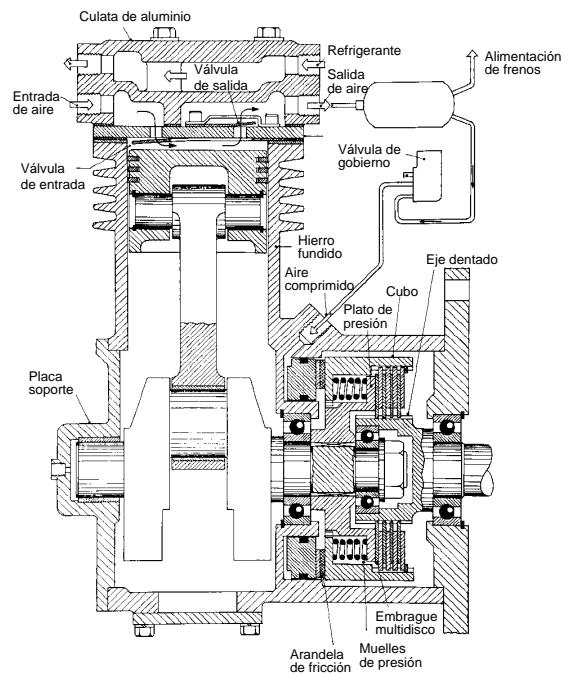


Figura 7.21: Compresor volumétrico.

### 7.3.4 Frenos de Tambor

El freno de tambor (Fig. 7.22) es un dispositivo de freno de fricción muy utilizado. Unas zapatas fijas al chasis se disponen en el interior de un tambor que gira con las ruedas. El accionamiento del freno consiste en separar las zapatas entre sí para hacerlas friccionar con la superficie interna del tambor. El accionamiento puede ser a través de un bombín directamente conectado al extremo móvil de la zapata (Fig. 7.22), o a través de una leva interpuesta, también, entre los extremos móviles de las zapatas.

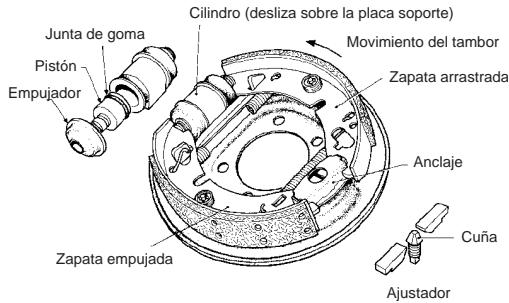


Figura 7.22: Freno de tambor.

La distribución de presiones normales se muestra en la Figura 7.23. La distribución de tensiones tangenciales es proporcional a la anterior y, por tanto, tiene un aspecto similar al de la Figura 7.23. La expresión analítica de la distribución de presiones normales es:

$$\sigma = \sigma_0 \cos \omega$$

donde  $\sigma_0$  es la presión máxima (que puede determinarse planteando el equilibrio de la zapata), y  $\omega$  es el ángulo circunferencial medido desde el punto de presión máxima (Fig. 7.23). La determinación de la expresión anterior puede hacerse geométricamente suponiendo que la presión es proporcional al nivel de desgaste del forro de la zapata. El nivel de desgaste en cada punto se obtiene al dar un pequeño giro al soporte (sólido rígido) de la zapata (Fig. 7.23).

El par de frenado se obtiene al integrar la distribución de presiones tangenciales en el arco abarcado por el material de fricción (ver Fig. 7.23b):

$$M_f = \mu R(\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1)$$

donde  $R$  es el radio del tambor.

Los frenos de tambor tienen dos inconvenientes serios. El primero es la baja capacidad de evacuación de energía térmica que hace que las temperaturas de trabajo alcancen valores elevados. El segundo es el peligro de bloqueo de las zapatas que basculan en el sentido de la marcha. Esto último puede corregirse haciendo que las dos zapatas basculen en el mismo sentido, para esto es necesario disponer de un bombín en cada extremo.

### 7.3.5 Frenos de Disco

Los frenos de disco se utilizan cada vez más como dispositivo de fricción. Sus ventajas fundamentales son la suavidad de entrada en carga y la gran capacidad de evacuación de

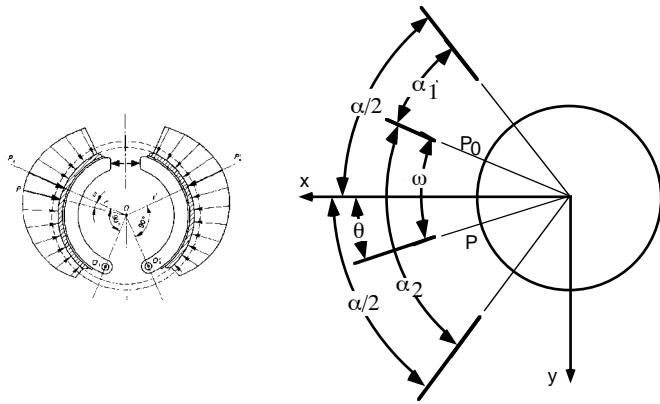


Figura 7.23: Distribución de presiones en la zapata.

energía (térmica). Un esquema básico de su construcción se muestra en la Figura 7.24. La pinza es solidaria con el chasis, el disco gira con la rueda y atraviesa la pinza fricciónando con las pastillas de freno. Cuando aumenta la presión en el circuito hidráulico, los bombines empujan a las pastillas contra el disco en movimiento generando una fuerza de rozamiento proporcional a la resultante normal sobre el disco.

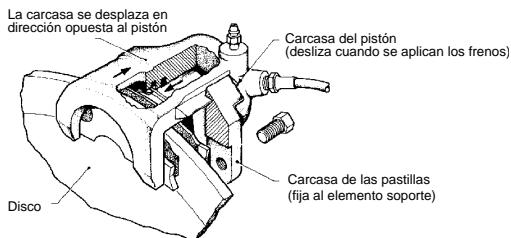


Figura 7.24: Freno de disco.

El material que entra a friccionar viene fresco de todo el viaje al aire libre que ha realizado desde su anterior paso por la pastilla. Cuando entra en la pinza comienza a ser víctima de la presión y de la fricción que genera una elevación de la temperatura. El mapa térmico del disco depende de las características de los materiales y de los parámetros geométricos del dispositivo. El diseño mecánico del disco es un interesante problema termoelástico. En frenos muy potentes, donde la energía térmica a evacuar es muy elevada, se utilizan dos discos con álabes intercalados. El inconveniente de estos discos es el efecto ventilador de los álabes, que consume bastante potencia. Esto es especialmente cierto en grandes frenos a alta velocidad (TGV).

La fuerza normal sobre las pastillas ( $F$ ) es proporcional a la presión en el circuito de

freno ( $p$ ):

$$F = \frac{1}{4}\pi d^2 p$$

donde  $d$  es el diámetro del pistón. El momento de frenado viene dado por (Fig. 7.25):

$$M_f = 2 \int_r^R \int_0^\alpha \mu \sigma \rho^2 d\rho d\theta$$

donde  $\rho$  y  $\theta$  son las coordenadas polares, y  $\sigma = F/A$ . El área  $A$  de la pastilla es:

$$A = \frac{1}{2}\alpha(R^2 - r^2)$$

El momento de frenado se escribe:

$$M_f = \frac{1}{3}\pi d^2 p \mu \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

El momento de frenado no depende, en primera aproximación, del ángulo distendido por la pastilla aunque sí de los radios de la misma. Obviamente, el ángulo distendido no es arbitrario, éste influye en otros aspectos del diseño mecánico como las presiones máximas o la distribución térmica.

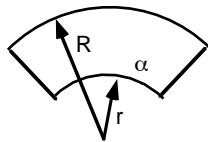


Figura 7.25: Zona de fricción en la pastilla de frenos.

En resumen, las ventajas de los frenos de disco son:

1. Imposibilidad de autobloqueo
2. Frenado suave y sensible a la presión de mando
3. Uniformidad en el desgaste de las pastillas
4. Refrigeración eficaz

## 7.4 Ralentizadores

Los ralentizadores son dispositivos de freno auxiliares que suelen utilizarse en frenadas prolongadas para evitar el excesivo calentamiento de las zapatas del freno principal. Existen muchos tipos de ralentizadores, la característica común a todos ellos es que el par de frenado es nulo con el vehículo parado y, por tanto, no pueden sustituir en ningún caso al sistema tradicional de fricción. La utilización de estos ralentizadores es casi exclusiva de los vehículos industriales.

### 7.4.1 Freno Motor

El freno motor evacúa la energía cinética del vehículo a base de comprimir y bombear los gases de escape. Se trata de cortar la inyección de gasoil a la vez que se cierra la salida en los colectores de escape. En esta situación, el ciclo termodinámico que sufre el aire es el siguiente (Fig. 7.26).

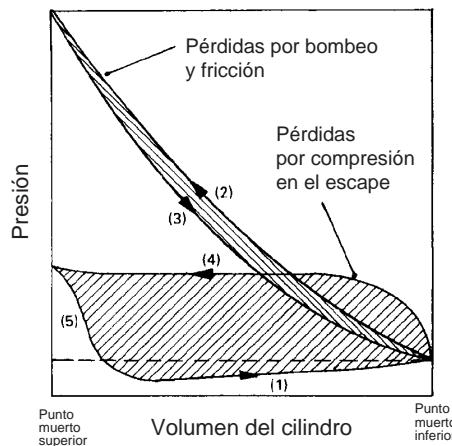


Figura 7.26: Diagrama de presiones en un cilindro cuando el escape está cerrado.

Con el cilindro lleno de aire a una presión próxima a la atmosférica, se cierran las válvulas y se procede a la compresión del fluido (línea 2). Al llegar a la máxima presión no se inyecta combustible y, por tanto, la presión no sube a partir de este punto. En la expansión el aire devuelve gran parte de su energía potencial al pistón (línea 3), las pérdidas son las correspondientes al trabajo de bombeo. En el escape, la válvula correspondiente del cilindro está abierta pero existe una válvula de mariposa en el colector de escape que está cerrada. Esto significa que la presión en el cilindro va a aumentar considerablemente (línea 4). Cuando la carrera de escape finaliza, se abre la válvula de admisión y, en un principio, el aire a presión en el cilindro sale en dirección contraria (línea 5). Eventualmente, la presión baja y el cilindro se vuelve a cargar de aire (línea 1) comenzando el ciclo otra vez. El área sombreada de la Figura 7.26 corresponde a la energía disipada en el proceso.

El dispositivo completo de un freno motor se muestra en la Figura 7.27. En la cabina del camión existe un pulsador (en ocasiones el tacón del pedal del acelerador) encargado de enviar una señal de presión a dos émbolos, uno para cortar la inyección, y otro para cerrar la salida de gases. En el primer caso lo que se hace es “romper” la conexión entre el pedal del acelerador y la cremallera de la bomba de inyección, haciendo que ésta esté en la posición de corte y el pedal en el suelo (inactivo). El segundo émbolo acciona la válvula de mariposa en el colector de escape.

Cuando se pisa el mando, se abre la comunicación entre el circuito de aire a presión de los frenos principales y los dos émbolos del freno motor, al tiempo que se cierra la salida al exterior (Fig. 7.27a). Cuando se libera el pulsador, se cierra la entrada de aire a presión y se abre la comunicación de los émbolos con el exterior (Fig. 7.27b), los muelles se encargan de mantener la válvula de mariposa abierta y la conexión “acelerador”–“bomba

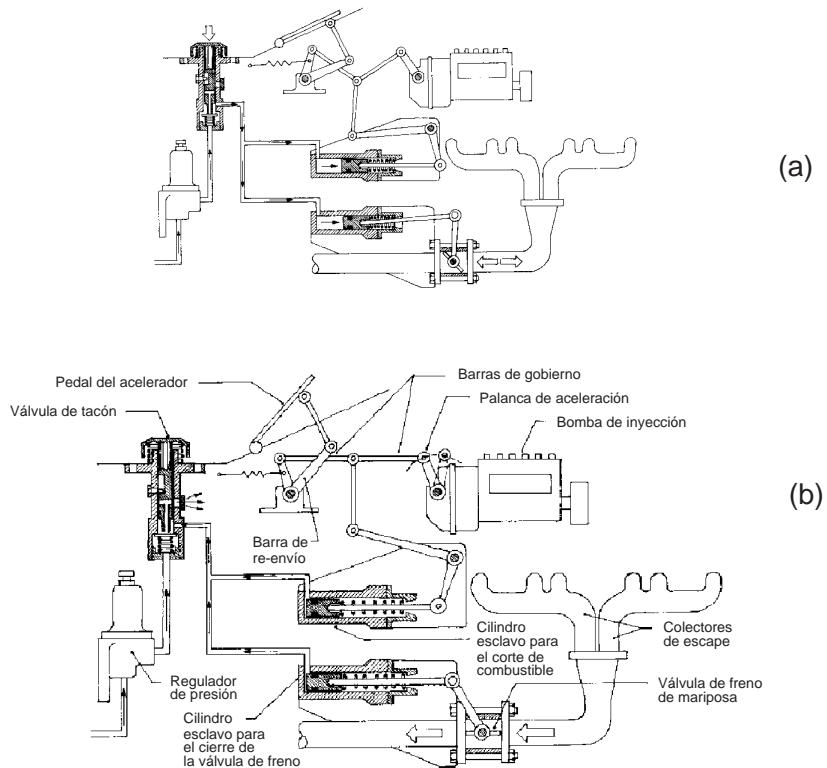


Figura 7.27: Esquema del dispositivo de freno motor en activo (a) e inactivo (b).

de inyección” operativa.

#### 7.4.2 Freno Eléctrico

El freno eléctrico disipa la energía a base de generar corrientes parásitas en los álabes de un rotor. El esquema es el de la Figura 7.28: unos potentes electroimanes están fijos a la carcasa del freno y dispuestos circunferencialmente. Los extremos del electroimán están próximos al metal de unos álabes que giran con el árbol de transmisión. En las situaciones en que no circula corriente por los electroimanes, el freno está inactivo y la única potencia disipada es la debida al efecto ventilador de los álabes. Cuando se hace pasar una corriente por los electroimanes, éstos generan un campo magnético que, aunque estacionario en el espacio, es variable para el metal del rotor (Fig. 7.29). Un campo magnético variable genera una corriente eléctrica que, en este caso, debe permanecer en el rotor, donde se disipa en forma de energía térmica. Dividiendo la energía disipada por la velocidad del rotor se obtiene el momento de frenado producido por el campo magnético variable.

#### 7.4.3 Ralentizador Hidráulico

El ralentizador hidráulico es un dispositivo parecido a los acoplamientos hidráulicos de las transmisiones automáticas (ver Sección 9.6.1). Se trata de enfrentar los álabes de un compresor (unido al árbol de transmisión) a los de una turbina (unida al chasis del

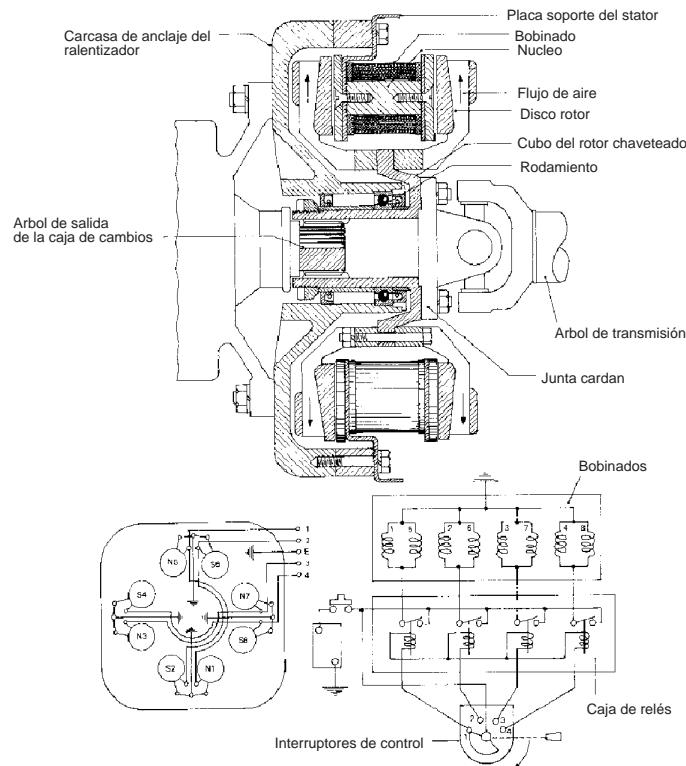


Figura 7.28: Freno eléctrico.

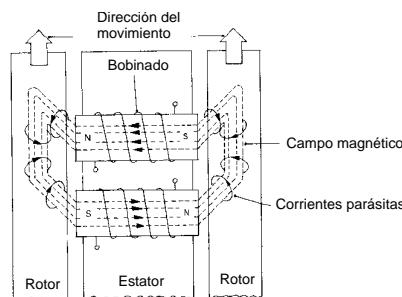


Figura 7.29: Campo magnético y corrientes parásitas.

vehículo) en una carcasa tórica (Fig. 7.30). Una bomba hace circular más o menos aceite (dependiendo de la apertura de la válvula de control) a través del acoplamiento. El movimiento relativo entre turbina y compresor hace que el fluido modifique su cantidad de movimiento en su encuentro con los álabes, generando una fuerza de frenado sobre los mismos. La energía disipada en el freno se evacúa finalmente en un intercambiador de calor propio del dispositivo.

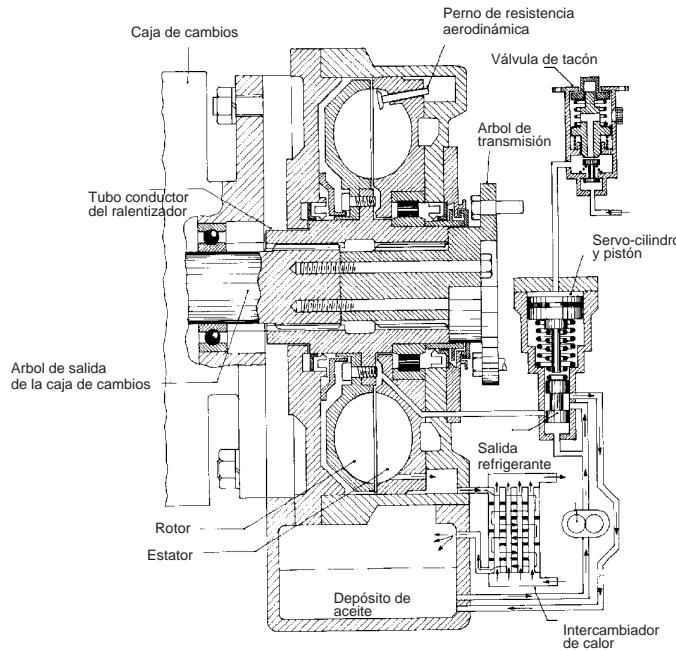


Figura 7.30: Ralentizador hidráulico.

#### 7.4.4 Ralentizador de Varios Discos de Fricción

Este tipo de ralentizadores se muestra en la Figura 7.31. La bomba de aceite, movida por el árbol de transmisión, envía aceite a presión a los empujadores a la vez que recircula el fluido por un intercambiador de calor para evacuar la energía térmica. La presión del fluido empuja a los discos fijos contra los móviles generando así un momento de frenado proporcional al número de discos. Este dispositivo es un ralentizador y no un freno debido a que la bomba está accionada por el movimiento del vehículo, esto es, el freno no funciona a vehículo parado.

La Figura 7.32 muestra las potencias disipadas por los distintos tipos de ralentizadores en función de la velocidad del árbol de transmisión. La disipación de potencia en el freno motor depende de la relación de transmisión que se esté usando, mientras que los ralentizadores unidos al árbol de transmisión no están afectados por esta relación. Esto significa que el freno motor es más eficaz a bajas velocidades que el hidráulico o eléctrico. Claro que estos últimos se pueden diseñar para ser efectivos a bajas velocidades pero esto los haría demasiado potentes a velocidades altas.

### 7.5 Vibraciones Autoexcitadas en Frenos

Las vibraciones autoexcitadas constituyen un problema de todos aquellos sistemas elásticos sometidos a fuerzas de fricción. El origen de estas vibraciones es la disminución de la fuerza de rozamiento con la velocidad relativa o, simplificadamente, la diferencia entre el coeficiente de rozamiento estático y dinámico. Un modelo sencillo, capaz de describir el problema en distintos tipos de frenos, es el mostrado en la Figura 7.33: una masa  $m$ ,

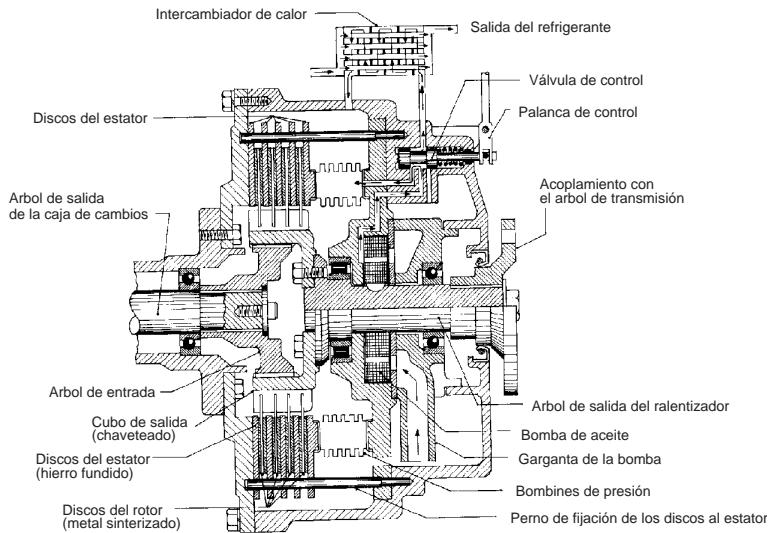


Figura 7.31: Ralentizador de fricción.

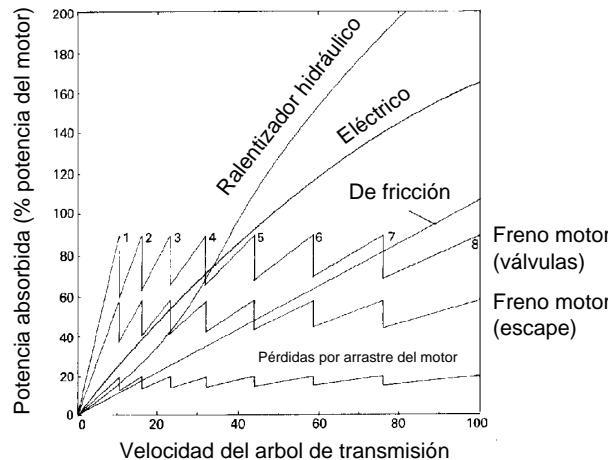


Figura 7.32: Potencias disipadas por cada tipo de ralentizador en función de la velocidad.

fijada (elásticamente) a un soporte rígido, está apoyada sobre una cinta en movimiento. La velocidad lineal de la cinta es  $v_0$ . La ecuación de equilibrio de la masa  $m$  es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + H(\dot{x} - v_0) = 0$$

donde  $x$  es el desplazamiento lateral de la masa  $m$  (Fig. 7.33),  $c$  es el amortiguamiento del soporte,  $k$  su rigidez, y  $H$  es la fuerza de rozamiento, función de la velocidad relativa entre la masa y la cinta:  $\dot{x} - v_0$ .

Cuando las velocidades de la masa y de la cinta coinciden ( $\dot{x} = v_0$ ), la aceleración se

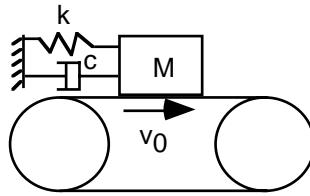


Figura 7.33: Modelo para el estudio de vibraciones autoexcitadas en frenos.

hace nula, la ecuación de equilibrio se reduce a:

$$H(0) = -kx - cv_0$$

La fuerza de rozamiento  $H(0)$  puede tomar cualquier valor en función del desplazamiento  $x$ . La cota superior es  $\mu_s mg$ , donde  $\mu_s$  es el coeficiente de rozamiento estático. Si  $v_0$  es distinto de la velocidad de la masa, entonces  $H$  toma un valor menor que  $\mu_s mg$  (el rozamiento dinámico es inferior al estático). Éste es el origen de las vibraciones. En efecto, sea el caso simplificado de una fuerza de rozamiento que disminuye linealmente con la velocidad relativa:

$$H(\dot{x} - v_0) = F_s - \alpha(\dot{x} - v_0)$$

donde  $F_s$  es la fuerza de rozamiento estática, y  $\alpha$  una constante. La ecuación de equilibrio se escribe ahora como:

$$m\ddot{x} + (c - \alpha)\dot{x} + kx = -(F_s + \alpha v_0) \quad (7.6)$$

Debido a la fuerza de rozamiento decreciente, se pueden tener “coeficientes de amortiguamiento efectivos” de valor negativo. Este no es un coeficiente de amortiguamiento físico, sino, exclusivamente, el coeficiente que afecta a la velocidad en la ecuación diferencial. Con coeficientes negativos, la ecuación admite soluciones inestables.

Las raíces de la ecuación característica correspondiente a la ecuación diferencial 7.6 son:

$$\lambda = \omega_n \left[ -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right]$$

donde  $\omega_n$  y  $\xi$  son, respectivamente, la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento, definidos como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \xi = \frac{c - \alpha}{2m\omega_n}$$

Para  $\xi < -1$ , se tienen dos autovalores  $\lambda$  reales y positivos. La solución de la ecuación homogénea no se amortigua, la respuesta es inestable. Este tipo de respuesta se denomina “autoexcitada” puesto que coincide con la que se obtendría si un amortiguador fuera capaz de proporcionar energía al sistema ( $c < 0$ ).

En este ejemplo se ha utilizado una fuerza de rozamiento de variación lineal. Las fuerzas de rozamiento reales tienen el aspecto mostrado en la Figura 7.34a. El gráfico refleja el hecho de que los contactos son flexibles y, por tanto, cualquier valor de la fuerza de rozamiento da lugar a un determinado pseudodeslizamiento relativo. Con funciones  $H$  como la de la figura, la ecuación pasa a ser no lineal, y su resolución es algo más compleja.

Se desarrolla  $H$  en serie de Taylor y se transforma en la ecuación de Van der Pool. Esta ecuación tiene una posición de equilibrio inestable cuando:

$$\frac{\partial H}{\partial(\dot{x} - v_0)} < 0$$

Si esta derivada fuera positiva para todo valor de la variable, se tendría un sistema estable. Si la variación de  $H$  tiene el aspecto dado en la Fig. 7.34b, no se produciría el fenómeno de vibraciones forzadas. Se tendría una posición de equilibrio en:

$$x = \frac{\mu_s mg}{k}$$

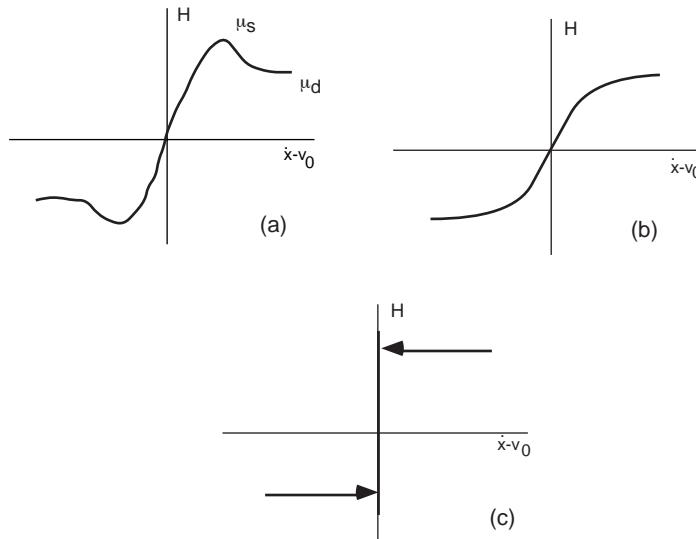


Figura 7.34: Distintos aspectos de la fuerza de rozamiento.

El caso simplificado en que sólo existen dos valores posibles del coeficiente de rozamiento (el valor estático  $\mu_s$  y el dinámico  $\mu_d$ , Fig. 7.34c) también tiene solución analítica. En efecto, mientras la masa permanece adherida a la cinta se tiene:

$$\dot{x} = v_0 \quad (x = v_0 t) \quad \Rightarrow \quad H(0) = -kv_0 t$$

donde se ha supuesto  $c = 0$  para simplificar. El valor de  $H(0)$  crece con el tiempo hasta llegar al valor máximo ( $-\mu_s mg$ ). En este instante se tiene que:

$$t = \frac{\mu_s mg}{kv_0} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\mu_s mg}{k}$$

y, de repente, el rozamiento baja al valor dinámico  $-\mu_d mg$ . La ecuación del movimiento de la masa  $m$  es ahora la siguiente:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx - \mu_d mg &= 0 \\ x(0) &= \frac{\mu_s mg}{k} \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned}x &= \frac{(\mu_s - \mu_d)g}{\omega_n^2} \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\mu_d g}{\omega_n^2} \\ \dot{x} &= v_0 \cos \omega_n t - \frac{(\mu_s - \mu_d)g}{\omega_n} \sin \omega_n t\end{aligned}$$

# Capítulo 8

## Neumáticos

Todas las fuerzas que controlan o perturban la marcha de un automóvil, con la única excepción de las aerodinámicas, se generan en la zona de contacto rueda–carretera. Estas fuerzas determinan la manera en que el vehículo es capaz de negociar curvas, frenar y acelerar. El estudio de la interacción neumático–carretera es, por tanto, crucial en la dinámica de vehículos automóviles.

El desarrollo de los materiales que componen el neumático, y también el de las tipologías constructivas, está guiado por un detallado conocimiento de la mecánica del proceso de deformación y generación de fuerzas en el contacto. El comportamiento mecánico del neumático es fuertemente no-lineal, la creación de modelos no es sencilla. En general, es necesario recurrir a gran cantidad de datos experimentales para caracterizar su comportamiento.

El mercado de neumáticos está dominado por unas cuantas compañías que guardan celosamente sus conocimientos básicos y su saber hacer. Sin embargo, este cúmulo de conocimientos también se ve alimentado por contribuciones sobresalientes desde el mundo académico.

En este capítulo se ofrece una visión general de las teorías que intervienen en la descripción mecánica tanto del neumático como del contacto neumático–carretera. También se muestran valores típicos de propiedades medidas experimentalmente. Las propiedades mostradas son aquellas que tienen relevancia desde el punto de vista de la dinámica del vehículo.

### 8.1 Función del Neumático y Alternativas

La función del neumático es generar fuerzas de contacto con la carretera. Esta fuerza de contacto puede ser dividida en componentes según las direcciones longitudinal, transversal y vertical. Cada una de estas componentes debe tener, y tiene, unas características especiales. Se puede, entonces, hacer una división según la dirección de la fuerza. De esta división resultan las siguientes funciones:

1. Soportar la carga vertical a la vez que proporcionar cierta “suspensión” frente a irregularidades
2. Generar fuerzas longitudinales para frenar y acelerar
3. Generar fuerzas transversales para negociar curvas

La primera de las funciones es la que determina buena parte de las características constructivas del neumático. En efecto, soportar la carga proporcionando cierta elasticidad obliga a tres niveles de flexibilidad en función del tamaño característico de las irregularidades (ver Fig. 8.1):

1. La banda de rodadura debe ser extraordinariamente flexible para absorber la rugosidad de la pista
2. La estructura debe ser tal que envuelva o absorba obstáculos de tamaño menor que la región de contacto. Esto es, la estructura de la rueda debe ser localmente muy flexible
3. La estructura debe tener además una cierta flexibilidad “global” para hacer de suspensión primaria de todas aquellas masas no soportadas por el sistema de suspensión propiamente dicho

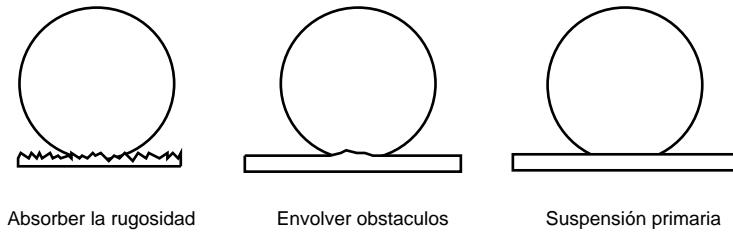


Figura 8.1: Niveles de flexibilidad que debe tener una rueda.

La gran flexibilidad requerida para la banda de rodadura obliga, casi ineludiblemente, a que el material de que está formada sea un elastómero. Por otra parte, la flexibilidad local puede conseguirse con una estructura como la de la Figura 8.2. Esto es, una matriz de muelles unidos mediante piezas articuladas. Cuando la rueda se encuentra con un pequeño obstáculo, sólo se hace trabajar a un número reducido de muelles y la flexibilidad es grande. Sobre terreno llano, el número de muelles que intervienen para soportar el peso del vehículo es mayor y, por tanto, la rigidez aumenta. Esta rigidez, aunque grande, es suficiente para hacer las veces de suspensión primaria.

Otra alternativa, que ha sido usada con éxito en el vehículo lunar, es la de una rueda formada por una jaula de alambre (Fig. 8.3). En este caso, la banda de rodadura no es necesaria porque la rugosidad del terreno “no se ve” desde la rueda. En otras palabras, la longitud de onda característica de la rugosidad del terreno es menor que la longitud entre alambres, de manera que no interfieren entre sí. Por otra parte, la flexibilidad local está garantizada porque el número de alambres que intervienen en una deformación local es reducido. El conjunto es una estructura con cierta elasticidad capaz de hacer las veces de suspensión primaria.

Como se argumentará en este capítulo, las características deseadas para las ruedas de automóviles se consiguen plenamente con carcasa de goma y fibra, sometidas a presión interior. El comportamiento mecánico de estas ruedas “neumáticas” se analiza en las secciones siguientes.

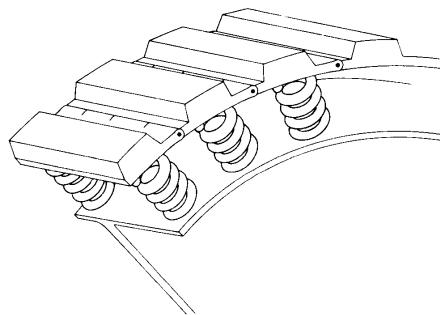


Figura 8.2: Posible alternativa al neumático.

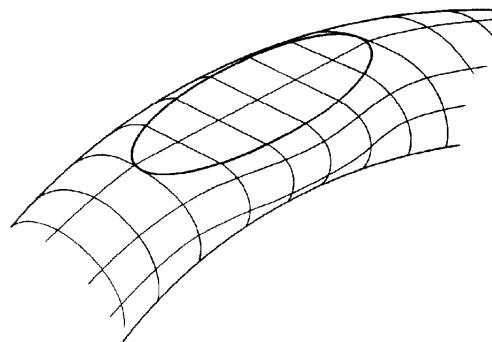


Figura 8.3: Esquema de una rueda de jaula de alambre.

## 8.2 Construcción de Neumáticos

Los neumáticos están formados por una carcasa de goma reforzada con fibras o cordones, ya sean orgánicos o metálicos. La carcasa está compuesta de varias láminas cada una de las cuales tiene el refuerzo orientado en una dirección particular. De hecho, la orientación del refuerzo define el tipo de neumático. Los neumáticos diagonales (Fig. 8.4) tienen láminas con los cordones formando un ángulo  $\theta$  con el plano diametral y, alternadas, láminas con los cordones en la dirección  $-\theta$ . Los neumáticos radiales (Fig. 8.5) tienen refuerzos a  $90^\circ$  respecto del plano diametral (orientados según los radios en la vista transversal). Esta construcción es inestable, cualquier pequeña variación en el espaciado entre cordones daría lugar a bultos inaceptables al inflar el neumático. Por esta razón los neumáticos radiales se refuerzan con un cinturón formado por varias láminas en donde los cordones se orientan con un cierto ángulo de corona (Fig. 8.5).

El número de láminas es variable según la función del neumático. Las carcassas de neumáticos para turismos suelen tener del orden de cuatro láminas, mientras que las de neumáticos para vehículos industriales o aviones tienen del orden de doce láminas. Estas láminas se enrollan sobre un “talón” (ver Fig. 8.5) que está reforzado con cordones muy rígidos, en general metálicos, para evitar que su diámetro aumente apreciablemente bajo la presión interior de la rueda. Estos talones se recubren de goma para producir el sellado

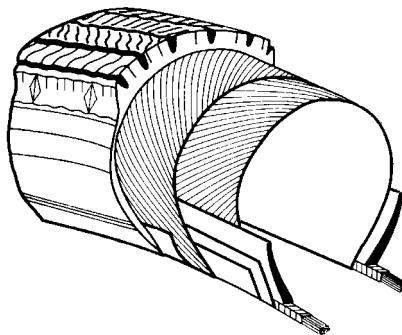


Figura 8.4: Construcción diagonal.

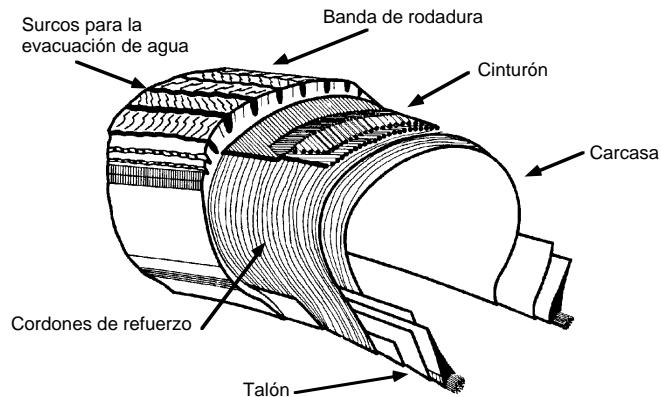


Figura 8.5: Construcción radial.

con la llanta. También se recubre de goma la parte superior del neumático para generar la banda de rodadura.

La fabricación del neumático comienza con la preparación del laminado a base de fibras embebidas en una matriz de goma muy plástica. Este laminado se introduce en un molde donde se conforma el toro. El siguiente paso consiste en dar consistencia a la goma a través de los procesos de curado y vulcanizado. Un neumático actual tiene una masa en torno a 12 Kg, de los cuales 4 kg son de goma, 2 Kg de negro de carbón (para mejora de la resistencia), 2 kg de aceites agregados (para mejora de la fricción y plasticidad en el conformado), 3 Kg de acero y 1 Kg de rayón.

### 8.3 Designación y Sistemas de Referencia

La designación de neumáticos está regulada por el Reglamento nº 54 de la comunidad Europea. En ella se recoge que toda o parte de la siguiente información puede aparecer en la carcasa de un neumático. Una letra para indicar el grupo al que pertenece:

**MC** motocicletas

**P** coches de turismo

**CV** furgonetas y camionetas

**MPV** vehículos multipropósito

**EM** vehículos de transporte

**IT** vehículos industriales

**AG** tractores

A continuación se da el ancho del neumático expresado en milímetros, seguido de un número que indica la relación altura/anchura en tanto por ciento. A continuación puede aparecer una letra que indica el tipo de diseño (“R” radial, “–” diagonal, “B” diagonal con cinturón). La siguiente cifra es el diámetro de la llanta, generalmente en pulgadas. Aunque no es común, también puede aparecer alguno de los siguientes códigos:

**PR** (Ply Rating) número de láminas en la carcasa, está relacionado con la capacidad de carga del neumático

**LI** índice de carga según la tabla 8.1

**GSY** índice de velocidad según la tabla 8.2.

La designación M+S en el neumático indica que el diseño es especial para barro y nieve.

LI	50	51	88	89	112	113	145	149	157
Kg	190	195	560	580	1120	1150	2900	3250	4125

Tabla 8.1: Índice de carga

GSY	F	G	J	K	L	M	N	P	Q
Km/h	80	90	100	110	120	130	140	150	160

GSY	R	S	T	H
Km/h	170	180	190	210

Tabla 8.2: Índice de velocidad

Un ejemplo de designación muy común es el siguiente:

175/70R13

lo que significa que la sección transversal del neumático tiene un ancho de 175mm, y una altura que es el 70% de la cantidad anterior (122.5mm). El tipo de construcción es radial, y el diámetro de la llanta es 13in (330.2mm).

Los sistemas de referencia utilizados en la descripción geométrica de la posición de la rueda, y en la descripción de las fuerzas y momentos que actúan sobre la misma, también están normalizados. En esta ocasión se utiliza la nomenclatura aceptada por la *Sociedad de Ingenieros de Automoción* (SAE, Society of Automotive Engineers) que se muestra en la Figura 8.6.

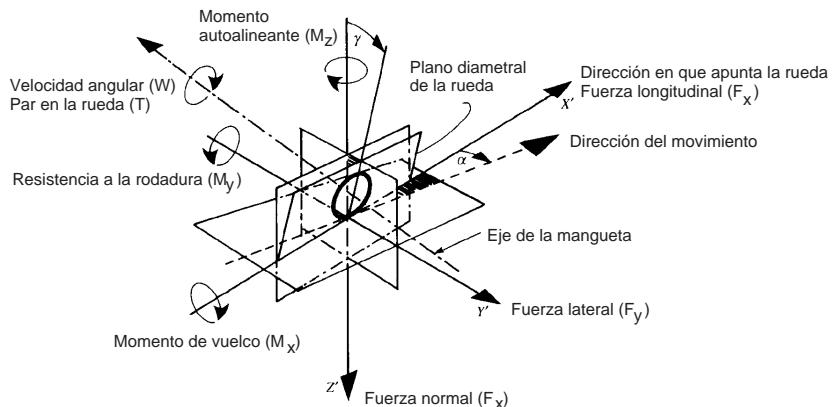


Figura 8.6: Sistemas de referencia y notación de la SAE.

Esta nomenclatura puede entenderse con ayuda de lo estudiado en el Capítulo ?? y 3. En esta sección se resumen los conceptos más importantes. El sistema de referencia  $X'Y'Z'$  (ver Fig. 8.6) se define con origen en el punto geométrico de contacto entre la rueda y la carretera, es decir, el punto de contacto que se tendría en caso de rueda totalmente rígida. El eje  $X'$  está alineado con la dirección longitudinal de la rueda, y está, por tanto, contenido en el plano diametral de la misma. El eje  $Z'$  es perpendicular al plano de contacto y apunta hacia abajo. El eje  $Y'$  se define de tal manera que complete un sistema destrógiro.

La fuerza y momento en el contacto se reducen al origen del sistema  $X'Y'Z'$  (ver Fig. 8.6), y se dividen en componentes según estos ejes. Así, para la fuerza, la componente según  $X'$  es la fuerza longitudinal de tracción o frenado, la componente según  $Y'$  es la carga transversal, y la componente según  $Z'$  es la carga vertical. En cuanto al momento, la componente según  $X'$  es el momento que tiende a volcar la rueda, la componente según  $Y'$  es el momento de resistencia a la rodadura, y la componente según  $Z'$  es el momento autoalineante que tiende a devolver la rueda a la dirección longitudinal del vehículo.

Sabemos del Capítulo ?? que la rueda se monta formando un determinado ángulo de caída ( $\gamma$  en la Figura 8.6) con el plano vertical. Además, en presencia de fuerzas laterales se desarrolla un ángulo de deriva ( $\alpha$  en la Figura 8.6) de tal manera que la dirección del movimiento de la rueda y su dirección diametral no coinciden. La velocidad angular de la rueda, así como el par aplicado (tracción o frenado) se miden, como no podría ser de otra forma, sobre el eje de la misma (perpendicular al plano diametral).

## 8.4 Ruedas

Las ruedas de la mayoría de los vehículos están formadas por dos piezas estampadas en acero y soldadas. Estas dos piezas son la llanta y el cubo. Aleaciones de aluminio o magnesio fundido se utilizan en algunas ruedas especiales. La geometría básica se muestra en la Figura 8.7.

Los requerimientos de la rueda son simples. Debe permitir un posicionamiento suficientemente exacto del neumático, mantener la estanqueidad del mismo, permitir su montaje y desmontaje, y ser capaz de transmitir las cargas verticales y horizontales (tanto transversales como longitudinales). Puesto que en ocasiones estas cargas tienen un carácter violento, es conveniente que la rueda esté dotada de una cierta flexibilidad.

El diseño de la llanta permite el posicionamiento, fijación y extracción del neumático. La pestaña exterior, la cama y la joroba permiten posicionar el talón del neumático y recoger los esfuerzos laterales y radiales que éste comunica a la llanta. El canal central es necesario para poder montar y desmontar el neumático sin una excesiva deformación de los refuerzos del talón. En efecto, cuando una parte del talón se posiciona en el interior de esta acanaladura, es posible hacer saltar la sección de talón diametralmente opuesta por encima de la pestaña.

Aunque existen cubos de ruedas planos, la mayoría se fabrican con curvatura para mejorar la flexibilidad radial y la rigidez transversal. El diseño anterior se está generalizando incluso para el caso de vehículos industriales en los que, tradicionalmente, se han usado llantas partidas y neumáticos con cámara.

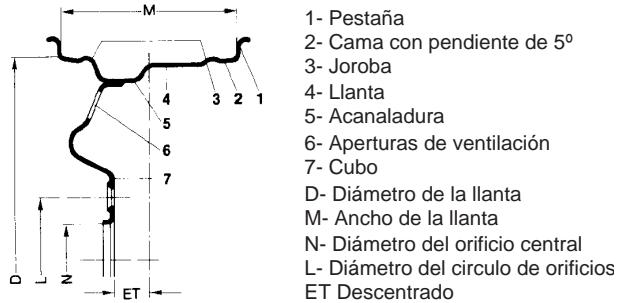


Figura 8.7: Diseño típico de llanta para automóvil.

## 8.5 Comportamiento Mecánico de la Goma

### 8.5.1 Comportamiento Elástico

Las gomas, tanto las naturales como las artificiales, son cadenas de hidrocarburos en forma de polímeros con mayor o menor número de enlaces cruzados (entre cadenas). Mientras los metales deben su elasticidad a la separación entre átomos unidos mediante enlace metálico, los elastómeros se deforman elásticamente a costa de desenrollar y alinear las cadenas de polímeros. Además, estas cadenas pueden “deslizar” entre sí, dando lugar a una deformación muy considerable. Así, el orden de magnitud de las deformaciones últimas en el caso de metales está en torno al 5%, mientras que en las gomas está en torno al 500%.

Las gomas para neumáticos se someten a un proceso de vulcanización con el fin de aumentar considerablemente su resistencia. La contrapartida está en que la goma pierde flexibilidad. El proceso consiste en combinar el elastómero con azufre en condiciones de alta presión y temperatura, de esta manera los átomos de azufre forman enlaces cruzados entre cadenas. Para mejorar la resistencia al desgaste, la goma se mezcla con polvo de carbón que reacciona químicamente con ésta formando un nuevo compuesto. También es usual la adición de aceites que mejoran la moldeabilidad, la plasticidad y la resistencia al desgaste. Las gomas de la carcasa y de la banda de rodadura no son necesariamente la misma. En la carcasa interesa resistencia al oxígeno y a la fatiga. En la banda de rodadura se necesita una gran resistencia a la fatiga y a la abrasión.

Las propiedades mecánicas de importancia pueden controlarse con la composición de la goma. Por ejemplo, el módulo y la resistencia se varían con la cantidad de polvo de carbón o de aceite de extensión, o con la forma y estructura del polvo de carbón, o con el número de enlaces cruzados introducidos durante la vulcanización. En general, el compuesto de goma presenta endurecimiento con la deformación. La curva tensión-deformación tiene el aspecto mostrado en la Figura 8.8. El módulo de elasticidad varía drásticamente con la temperatura. En la Figura 8.9 se muestran las distintas regiones en donde se tienen comportamientos distintos de estos polímeros. A bajas temperaturas el comportamiento es frágil, similar al de un material amorf o vítreo, el módulo de elasticidad es muy elevado a estas temperaturas. La zona de transición es, generalmente, muy estrecha, de manera que se puede hablar de temperatura de transición. Para temperaturas superiores a la de transición se tiene el comportamiento típico de los elastómeros con un módulo de elasticidad muy bajo. A temperaturas superiores, el material se convierte en una especie de pasta con comportamiento viscoso. Las gomas para neumáticos se deben diseñar de manera que se mantengan en el rango elastómero para todas las temperaturas posibles de funcionamiento.

### 8.5.2 Modelo de Kelvin Para Sólidos Viscoelásticos

Una descripción precisa del comportamiento mecánico de la goma debe incluir, además de su resistencia a la deformación (comportamiento elástico), su resistencia a la velocidad de deformación (comportamiento viscoso). En el modelo de Kelvin se supone que los dos procesos son lineales y superpuestos:

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon} \quad (8.1)$$

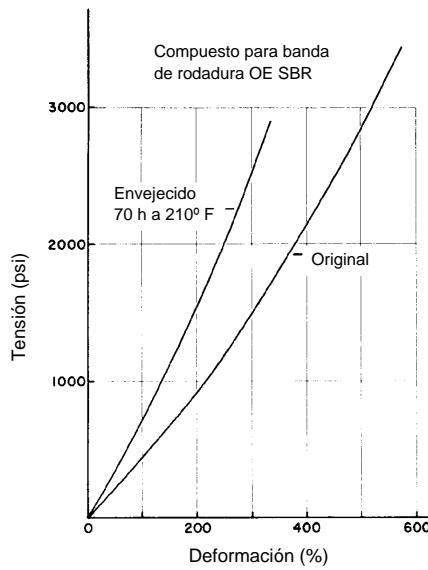


Figura 8.8: Curvas tensión–deformación de compuestos de goma.

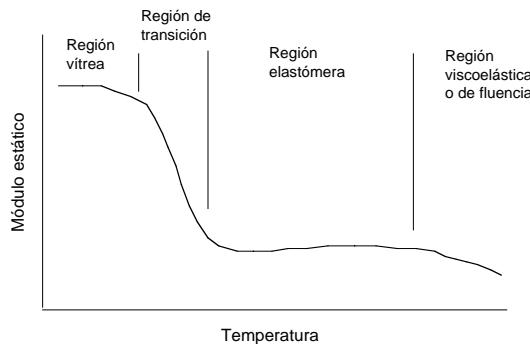


Figura 8.9: Evolución del módulo de elasticidad de las gomas con la temperatura.

donde  $\sigma$  es la tensión total,  $E$  el módulo de elasticidad,  $\epsilon$  la deformación, y  $\eta$  representa el coeficiente de viscosidad. En el caso de variación armónica de las tensiones:

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$$

la ecuación diferencial 8.1 es fácil de integrar. En efecto, sea:

$$\epsilon = K e^{i\omega t}$$

derivando y sustituyendo en la ecuación 8.1 se tiene:

$$K = \frac{\sigma_0}{E^*}$$

donde  $E^*$  es el módulo de elasticidad complejo  $E^* = E + i\eta$ . Las deformaciones se pueden escribir como:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E^*} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{E^2 + \omega^2\eta^2}} e^{(i\omega t - \phi)}$$

donde  $\phi$  viene dado por:

$$\phi = \arctan \frac{\omega\eta}{E}$$

Luego las deformaciones están desfasadas respecto de las tensiones (Fig 8.10). El material responde a la solicitud con un cierto retraso que depende de la frecuencia, del coeficiente de viscosidad, y del módulo de elasticidad.

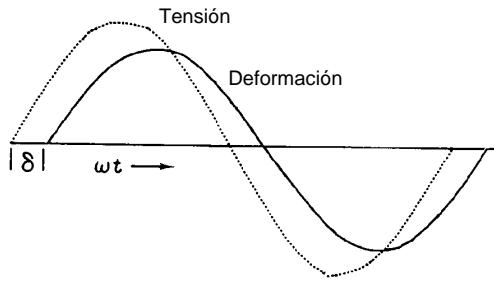


Figura 8.10: Retraso de las deformaciones respecto de las tensiones que las provocan.

Eliminando el tiempo en las expresiones de tensión y deformación se tiene una representación en el plano  $\sigma-\epsilon$  (Fig. 8.11). El área encerrada en la elipse (ciclo de histéresis) es la energía disipada en cada ciclo por unidad de volumen:

$$A = \pi\eta\omega\epsilon_0^2$$

La potencia total disipada (integral de la expresión anterior en el volumen deformado) determina el coeficiente de resistencia a la rodadura del neumático. Este coeficiente ( $\rho$ ) se define como la relación (Fig. 8.12) entre la fuerza horizontal  $F$  necesaria para hacer rodar la rueda a la velocidad  $v$ , y la carga normal  $L$ :

$$\rho = \frac{F}{L}$$

En los párrafos siguientes se hacen algunos comentarios sobre esta resistencia a la rodadura.

La distribución de presiones normales en la zona de contacto es asimétrica y desplazada hacia adelante, la resultante está, por tanto, desplazada en el sentido de la marcha (Fig. 8.12). Si la rueda no es motriz, ni se está aplicando el freno, se tiene que el momento en el eje de la misma debe ser nulo. El producido por las cargas verticales se equilibra con el que producen las cargas horizontales: el empuje sobre el eje para desplazarlo, y la resultante de tensiones tangenciales en el contacto. Esta fuerza horizontal se conoce como resistencia a la rodadura.

En algunos textos se prefiere reducir la fuerza  $L$  al centro del contacto como una fuerza  $L$  y un momento  $M = Le$ . En este caso, tanto la fuerza  $F$  como el momento  $M$  pueden recibir el nombre de resistencia a la rodadura. Cualquera que sea la manera de

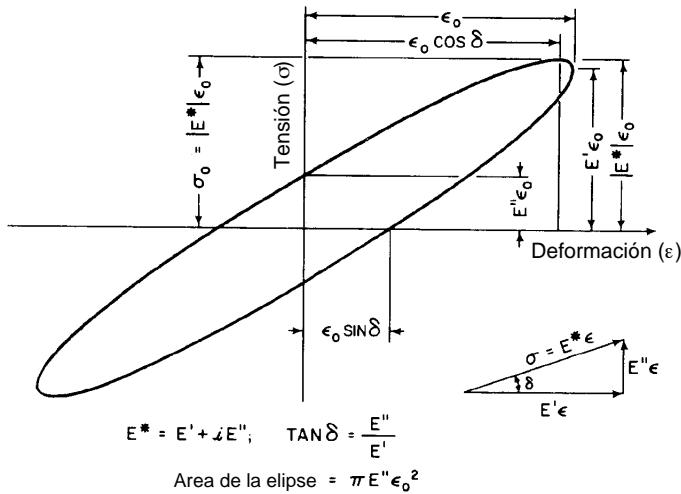


Figura 8.11: Ciclo de histéresis en elastómeros.

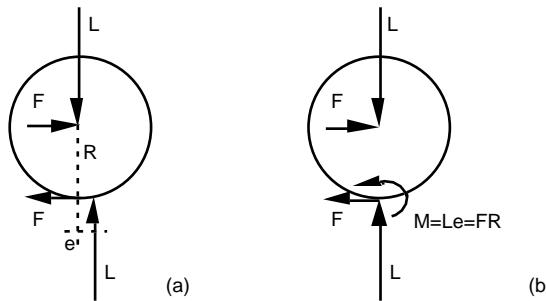


Figura 8.12: Resistencia a la rodadura.

representar las fuerzas, se necesitará empujar en el eje de la rueda para conseguir que se mueva, y se generarán tensiones tangenciales longitudinales en el contacto.

La situación es distinta si se trata de una rueda motriz. En este caso el momento en el eje de la rueda no tiene porqué ser nulo. De manera que para equilibrar el momento  $Le$  no es necesario aplicar el par de fuerzas  $F$ , basta con aplicar un momento  $M = Le$  en el eje de la rueda motriz (ver Fig. 8.12). Si el momento aplicado no llega al valor  $Le$ , se necesitará un pequeño empuje sobre el eje, y las correspondientes tensiones tangenciales en el contacto. Si el momento aplicado es superior a  $Le$ , se habrá conseguido equilibrar la resistencia a la rodadura y generar tensiones tangenciales en la dirección opuesta cuya resultante es la fuerza de tracción (Fig. 8.12).

Puesto que la potencia disipada es  $P = Fv$ , se tiene que el coeficiente de resistencia a la rodadura está relacionado con la potencia disipada en el neumático mediante la relación:

$$\rho = \frac{P}{Lv}$$

## 8.6 Compuesto Goma–Cordón

### 8.6.1 Constantes Elásticas del Compuesto

**Goma.** El módulo de elasticidad es del orden de  $1.04\text{ MPa}$ . El coeficiente de viscosidad se puede despreciar a la hora de describir el laminado que forma la carcasa. Esta simplificación no es posible en el caso del material de la banda de rodadura. El material es isótropo con módulo de Poisson de  $\nu = 0.5$  (incompresible), con lo que el módulo a cortante es aproximadamente  $G = E/3$ .

**Acero.** Es uno de los materiales usados en el refuerzo, especialmente en los talones y cinturones. El módulo de elasticidad del acero es del orden de  $210\text{ GPa}$ . El trenzado se considera transversalmente isótropo con módulo de elasticidad longitudinal dado por:

$$E_c = \frac{E_f}{1 + 4\pi^2 R^2 T^2}$$

donde  $R$  es el radio del filamento y  $T$  el número de giros,  $E_f$  es el módulo de elasticidad del filamento.

**Rayon.** Se usa fundamentalmente como refuerzo de la carcasa. Es mucho más flexible que el acero, su módulo está en torno a  $4.16\text{ GPa}$ . La resistencia a la tracción es bastante elevada,  $548\text{ MPa}$ .

**Nylon.** Su módulo es similar al del Rayon, sin embargo, su resistencia es superior, en torno a  $875\text{ MPa}$ .

Cada una de las láminas de que consta la carcasa (formada por goma reforzada con cordones en una dirección dada) puede considerarse como un material ortotropo que, en la hipótesis de tensión plana, se describe con cuatro constantes elásticas independientes:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$ . Donde  $E_1$  es el módulo de elasticidad del material en la dirección del refuerzo,  $E_2$  es el módulo en la dirección transversal,  $\nu_{12}$  ( $\neq \nu_{21}$ ) es uno de los dos coeficientes de Poisson, en este caso se trata de la deformación que experimenta el material en la dirección 2 por unidad de deformación en la dirección 1. Por último,  $G_{12}$  es el módulo a cortante.

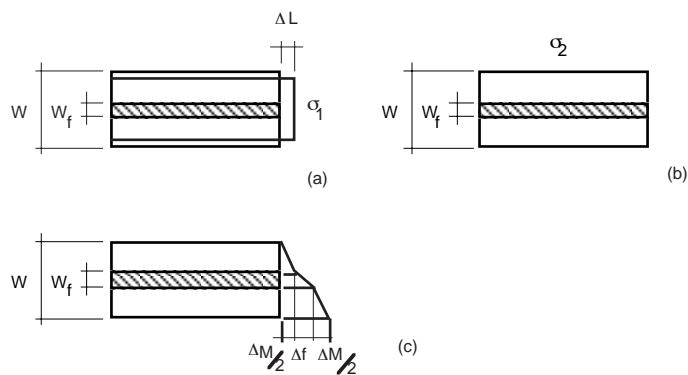


Figura 8.13: Hipótesis de deformación en un volumen de control que contiene una fibra.

Estas constantes pueden estimarse en función de las constantes correspondientes a la goma (matriz) y cordón (fibra) haciendo uso de las hipótesis clásicas de la resistencia de materiales. En efecto:

$E_1$  Suponiendo (ver Fig. 8.13) que las deformaciones en la fibra y la matriz son iguales, se tiene que:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m$$

donde  $E_f$  y  $E_m$  son los módulos de elasticidad de la fibra y la matriz, respectivamente. Los parámetros  $V_f$  y  $V_m$  representan las fracciones en volumen de fibra y matriz, respectivamente, respecto del volumen total de compuesto ( $\Rightarrow V_f + V_m = 1$ ).

$E_2$  Suponiendo (Fig. 8.13) que las tensiones en la fibra y en la matriz coinciden, se tiene que:

$$E_2 = \frac{1}{\frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}}$$

$\nu_{12}$  La misma suposición anterior conduce a:

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m$$

$G_{12}$  Aproximando la deformación cortante del volumen de control (Fig. 8.13) por la suma de los ángulos de la fibra y la matriz, se tiene:

$$G_{12} = \frac{1}{\frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m}}$$

Las expresiones anteriores, aunque aproximadas, dan una idea de las propiedades elásticas del laminado (en direcciones principales del material) en función de las propiedades de los materiales constituyentes. Estos números aproximados ayudan a “diseñar” el material, esto es, a determinar las cantidades relativas de cordón y goma que dan lugar a las rigideces  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$  deseadas. Una vez diseñada la lámina, se obtienen valores mucho más exactos de las propiedades a través de diversos ensayos. En general dos ensayos de tracción para determinar  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ , y otro particular para la determinación de  $G_{12}$ .

### 8.6.2 Matrices de Flexibilidad y Rígidez en Direcciones Principales

A partir de las constantes elásticas definidas en el apartado anterior se puede determinar la matriz de flexibilidad en direcciones principales del material:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

que en notación compacta puede expresarse como:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{12} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}^{12}$$

La inversa de la matriz de flexibilidad  $\mathbf{S}$  es la matriz de rigidez en direcciones principales  $\mathbf{Q}$ :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

que en notación compacta se escribe:

$$\boldsymbol{\sigma}^{12} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\epsilon}^{12}$$

El vector de deformaciones  $\boldsymbol{\epsilon}^{12}$  tiene como tercera componente la deformación cortante ingenieril. Para hacer las transformaciones tensoriales correspondientes es necesario usar las componentes del tensor de deformaciones. La relación entre unas y otras es:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{12} = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}\boldsymbol{\epsilon}^{12'}$$

### 8.6.3 Matrices de Rigidez en Direcciones Cualesquiera

Se trata de obtener la descripción mecánica de una lámina cuyas fibras, orientadas según el eje 1 del sistema 12, forman un ángulo  $\theta$  con los ejes  $xy$  del problema (Fig. 8.14). Los vectores  $\boldsymbol{\sigma}^{12}$  y  $\boldsymbol{\epsilon}^{12'}$  se pueden reescribir como los tensores de los que proceden y someterlos a un giro de valor  $\theta$ , mediante la operación:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

donde  $c$  y  $s$  son abreviaturas de  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$ , respectivamente.

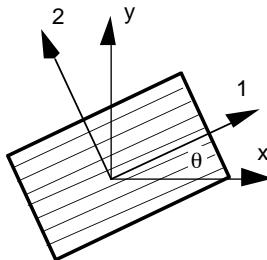


Figura 8.14: Ejes de referencia (xy) y principales del material (12).

Los productos anteriores permiten extraer las componentes del vector  $\boldsymbol{\sigma}^{12}$  en función de las del vector  $\boldsymbol{\sigma}^{xy}$ . Mediante un proceso análogo se obtienen las componentes de  $\boldsymbol{\epsilon}^{12'}$  en función de las de  $\boldsymbol{\epsilon}^{xy'}$ . En notación matricial se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma}^{12} = \mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}^{xy} \quad (8.2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{12'} = \mathbf{T}\boldsymbol{\epsilon}^{xy'} \quad (8.3)$$

donde la matriz  $\mathbf{T}$  viene dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez en coordenadas cualesquiera  $\bar{\mathbf{Q}}$  se obtiene del cálculo siguiente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{xy} &= \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{12} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \boldsymbol{\epsilon}^{12} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R} \boldsymbol{\epsilon}^{12'} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{T} \boldsymbol{\epsilon}^{xy'} \\ &= \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1}}_{\bar{\mathbf{Q}}} \boldsymbol{\epsilon}^{xy} \end{aligned}$$

es decir:

$$\boldsymbol{\sigma}^{xy} = \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\epsilon}^{xy}$$

Un aspecto importante de la relación anterior es el hecho de que la matriz  $\bar{\mathbf{Q}}$  es una matriz llena y, por tanto, existe acoplamiento entre tensiones normales y deformaciones tangenciales o, lo que es lo mismo, entre tensiones tangenciales y deformaciones normales. Este comportamiento sorprende al ingeniero acostumbrado a usar materiales isótropos.

Como se ha comentado en la sección 8.2, el neumático está formado por un conjunto de láminas reforzadas con cordones en distintas direcciones. La descripción mecánica de la lámina debe servir para componer la matriz de rigidez del grupo de láminas (laminado) que forman la carcasa. Esta integración se realiza en el apartado siguiente.

#### 8.6.4 Teoría de Laminados

La descripción del comportamiento mecánico del laminado, formado por láminas con reforzos en distintas direcciones, está basada en la hipótesis de Kirchoff–Love de no deformación de la linea entre puntos normales a la placa. Esta hipótesis implica que la deformación es plana, lo cual es incompatible con la hipótesis de partida de tensión plana. La contradicción es compartida por la teoría de placas isótropas y no presenta, por otra parte, excesivos problemas. La hipótesis de deformación plana se usa exclusivamente para obtener una aproximación de los movimientos coplanares. Los movimientos  $(u, v)$  del punto C de la Figura 8.15 son:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - \frac{\partial w_0}{\partial x} z \\ v &= v_0 - \frac{\partial w_0}{\partial y} z \end{aligned}$$

donde  $(u_0, v_0, w_0)$  es el vector que define el movimiento del punto B en la Figura 8.15, esto es, del punto del plano medio.

Las deformaciones coplanares se obtienen por derivación:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} z \end{aligned} \tag{8.4}$$

En esta sección suponemos que todos los vectores de tensión y deformación están expresados en coordenadas globales  $xy$ , por tanto, podemos prescindir de los superíndices usados en la sección anterior y escribir 8.4 de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^0 + z \boldsymbol{\kappa}^0$$

donde  $\boldsymbol{\epsilon}^0$  y  $\boldsymbol{\kappa}^0$  son los vectores de deformaciones y curvaturas en el plano medio, respectivamente.

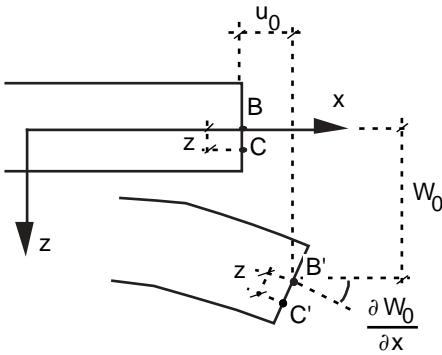


Figura 8.15: Posición original y deformada de una sección del laminado.

Las tensiones se obtienen de multiplicar el vector de deformaciones por la correspondiente matriz de rigidez. Puesto que en el caso de laminados la matriz de rigidez varía de lámina a lámina, se tiene una expresión distinta según la posición del punto en cuestión. Para un punto de la lámina  $k$ , se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \overline{\mathbf{Q}}_k \left( \boldsymbol{\epsilon}^0 + z_k \boldsymbol{\kappa}^0 \right)$$

Estas tensiones se pueden integrar a trozos para obtener los esfuerzos y los momentos por unidad de longitud en la sección del laminado. Las integrales correspondientes son:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \overline{\mathbf{Q}}_k \left( \boldsymbol{\epsilon}^0 (z_k - z_{k-1}) + \boldsymbol{\kappa}^0 \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \\ \mathbf{M} &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \overline{\mathbf{Q}}_k \left( \boldsymbol{\epsilon}^0 \frac{1}{2} (z_k^2 - z_{k-1}^2) + \boldsymbol{\kappa}^0 \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right) \end{aligned}$$

Formando un vector con los subvectores de deformación y curvatura se puede obtener una especie de matriz de rigidez del laminado, la que se conoce como matriz ABD:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa}^0 \end{Bmatrix}$$

Es interesante notar que la matriz de acoplamiento  $\mathbf{B}$  relaciona esfuerzos axiales con curvaturas, o bien momentos con deformaciones en el plano. Observando las expresiones que definen las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{D}$  se puede deducir que si el laminado está equilibrado,

es decir, si por cada lámina orientada según  $\theta$ , existe otra orientada según  $-\theta$ , entonces  $A_{13} = A_{23} = 0$ , es decir, no existe acoplamiento entre esfuerzos normales y deformaciones cortantes en el plano (este tipo de acoplamiento se muestra en la Fig. 8.16). Esta configuración es general en el caso de neumáticos.

Por otra parte, si el laminado es simétrico respecto del plano medio (existen láminas con la misma orientación en la posición  $z$  y  $-z$ ) entonces  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , es decir, no hay acoplamiento entre esfuerzos normales y curvaturas. Esta situación no es común en neumáticos en donde, por tanto, se tendrán deformaciones con acoplamientos complicados (Fig. 8.17).

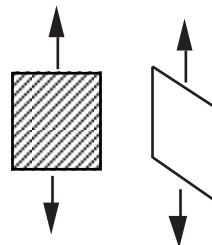


Figura 8.16: Acoplamiento entre tensiones normales y deformaciones tangenciales.

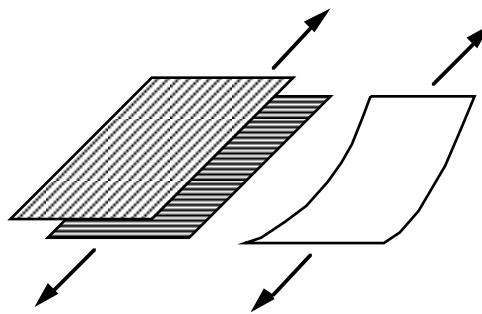


Figura 8.17: Acoplamiento entre esfuerzos normales y curvaturas.

### 8.6.5 Matriz ABD para Distintos Neumáticos

Los valores de la matriz ABD para distintos materiales y distintas construcciones de neumático se pueden encontrar tabulados en distintas fuentes. En la Tabla 8.3 se muestran algunos ejemplos. Los valores de estas matrices determinan la capacidad del neumático para absorber obstáculos (comodidad en marcha), y la facilidad para deformarse en el plano (control direccional y desgaste).

En la Tabla 8.3 puede verse como la rigidez en el plano (matriz  $\mathbf{A}$ ) del neumático radial es superior a la de neumáticos diagonales. Esto significa que los ángulos de deriva son menores para este tipo de construcción, el control direccional es superior y el desgaste en curvas menor. Sin embargo, la rigidez fuera del plano (matriz  $\mathbf{D}$ ) es muy superior,

por ello las fuerzas que se generan para absorber pequeños obstáculos son grandes y la marcha es más incómoda que en el caso de construcción diagonal. Como ocurre con otros sistemas del automóvil, aquello que contribuye a la mejora del manejo del vehículo hace su conducción más incómoda. A pesar de que la capacidad para envolver obstáculos de los neumáticos radiales es inferior a la de neumáticos de construcción diagonal, la rigidez como suspensión primaria de los segundos es superior a la de los primeros. Esto es debido a la importancia que toma en este tipo de deformación la matriz de acoplamiento **B**.

14.9	32.7	0.	0.052	0.126	-0.288
32.7	85.5	0.	0.126	0.322	-0.722
0.	0.	33.1	-0.288	-0.722	0.125
0.052	0.126	-0.288	0.015	0.034	0.
0.126	0.322	-0.722	0.034	0.088	0.
-0.288	-0.722	0.125	0.	0.	0.034

(a)

142	56.2	0.	14.5	-1.79	-0.454
56.2	721.	0.	-1.79	-23.7	-5.64
0.	0.	57.2	-0.454	-5.64	-1.79
14.5	-1.79	-0.454	1.95	0.335	0.030
-1.79	-23.7	-5.64	0.335	4.25	0.372
-0.454	-5.64	-1.79	0.030	0.372	0.342

(b)

Tabla 8.3: Matriz ABD para neumáticos diagonales (a) y radiales (b).

Para resumir en un solo número la rigidez en el plano (matriz **A**), Gough define un modelo simple de viga de la zona de la huella (Fig. 8.18). La rigidez de Gough se define entonces como la relación entre la carga lateral y la deflexión que produce en esta viga. Es posible representar la rigidez de Gough de un neumático radial en función del ángulo de corona de su cinturón. El resultado se muestra en la Figura 8.18. Puede verse que existe un máximo de rigidez en torno a los  $25^0$ , no es casualidad que la mayoría de construcciones radiales utilicen un ángulo próximo a este valor.

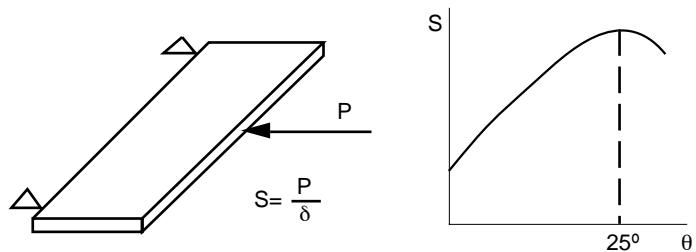


Figura 8.18: Rigidez de Gough para la zona de la huella.

## 8.7 El Problema del Contacto

El estudio del contacto entre dos cuerpos es un problema relevante de la ingeniería mecánica. Su tratamiento analítico y experimental entraña dificultades, muchas de las cuales no están resueltas aún. Este es un campo en el que se sigue investigando ampliamente debido a su repercusión en el buen funcionamiento de la mayoría de las máquinas.

En este apartado se pretende dar alguna idea sobre los elementos que conforman el problema. Un estudio más detallado puede encontrarse en textos específicos, o en libros sobre diseño de elementos de máquina.

### 8.7.1 Superficies Conformes y No Conformes

El análisis de las tensiones en el contacto entre dos sólidos con superficies conformes es radicalmente distinto al correspondiente análisis para sólidos con superficies no conformes. En el primer caso (Fig. 8.19a), los sólidos pueden acoplarse sin deformación. El contacto es, en este caso, un problema global puesto que las tensiones se extienden a todo el sólido. Por otra parte, las superficies no conformes (Fig. 8.19b) no se pueden acoplar sin deformación. El contacto inicial (previo a la existencia de cargas) se produce en un punto o en una linea. El problema tensional es local, se puede prescindir del sólido en su conjunto y hacer una descripción local del mismo a través de sus radios de curvatura en el punto o linea de contacto.

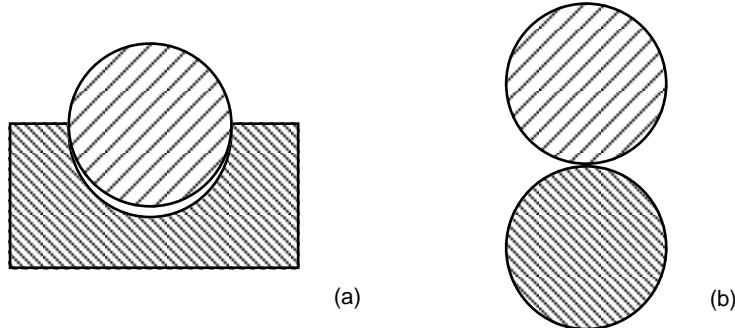


Figura 8.19: Superficies conformes (a) y no conformes (b).

Como se ha indicado en la sección 8.3, el sistema de referencia usado para la descripción del problema de contacto tiene su origen situado en el punto de contacto previo a la deformación (Fig. 8.20). Los ejes  $x$  e  $y$  están en el plano tangente común, el eje  $z$  es perpendicular a ambos. Al deformarse los cuerpos se genera un área de contacto donde se distribuyen presiones normales y tangenciales. Las resultantes de estas presiones en el área de contacto  $S$  son las fuerzas ( $Q_x, Q_y, P$ ) y momentos ( $M_x, M_y, M_z$ ) que un sólido ejerce sobre el otro (Fig. 8.20). Estas resultantes, en función de las distribuciones de presiones tangenciales y normales ( $q_x(x, y), q_y(x, y), p(x, y)$ ), son:

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_S q_x dS & M_x &= \int_S py dS \\ Q_y &= \int_S q_y dS & M_y &= \int_S px dS \end{aligned}$$

$$P = Q_z = \int_S p \, dS \quad M_z = \int_S (q_y x - q_x y) \, dS$$

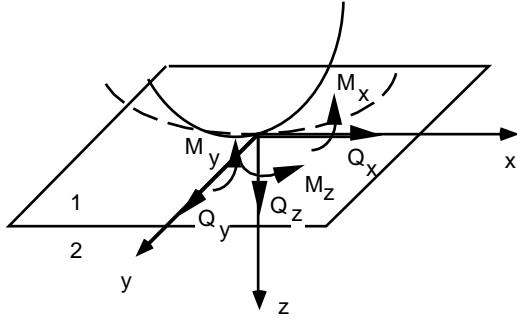


Figura 8.20: Sistema de referencia y resultantes de tensiones.

El problema del contacto consiste en determinar las distribuciones  $q_x$ ,  $q_y$  y  $p$ , conocidas las resultantes anteriores. Como se verá en la Sección 8.7.4 este no es un problema sencillo, y se hace particularmente complejo para las “presiones” tangenciales.

### 8.7.2 Deslizamiento, Rodadura y Pivoteo

Supongamos, por el momento, que los sólidos en contacto son rígidos. Cada punto del área de contacto puede ser considerado como perteneciente a uno u otro sólido. Las velocidades absolutas de los dos puntos (uno en cada sólido) que coinciden con el origen del sistema de referencia descrito anteriormente, son:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{V}_0 & \boldsymbol{\Omega}_1 &= \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_0 \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{V}_0 & \boldsymbol{\Omega}_2 &= \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_0 \end{aligned}$$

donde los subíndices 1, 2, y 0 hacen referencia al sólido 1, sólido 2, y sistema de referencia, respectivamente. Las velocidades absolutas (en mayúscula) están referidas a un sistema de referencia estacionario. El sistema de referencia de la Figura 8.20 se mueve ( $\mathbf{V}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}_0$ ) respecto del estacionario puesto que el punto de contacto varía su posición y el plano tangente varía su orientación.

Dado que los sólidos no se penetran, las velocidades relativas normales al plano tangente son nulas:

$$v_{z1} = v_{z2} = 0$$

donde, de nuevo, los subíndices 1 y 2 hacen referencia a los sólidos 1 y 2, respectivamente. La velocidad de deslizamiento (coplanaria), para el origen de la región de contacto, es:

$$\Delta \mathbf{v}_d = \begin{Bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{x1} - v_{x2} \\ v_{y1} - v_{y2} \end{Bmatrix}$$

Mientras que la velocidad angular de rodadura es:

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_r = \begin{Bmatrix} \Delta \omega_x \\ \Delta \omega_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{x1} - \omega_{x2} \\ \omega_{y1} - \omega_{y2} \end{Bmatrix}$$

La velocidad angular de pivoteo viene dada por:

$$\Delta\omega_z = \omega_{z1} - \omega_{z2}$$

Con estos “datos” es posible calcular la velocidad de deslizamiento total como sólido rígido ( $\dot{\mathbf{s}}$ ) de un punto cualquiera de la región de contacto:

$$\dot{\mathbf{s}} = \Delta\mathbf{v}_d + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{i} & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & 0 \end{vmatrix}$$

La expresión anterior proporciona el campo de velocidades de deslizamiento si se supone que los sólidos son rígidos, o que se deforman a un ritmo despreciable frente al módulo de  $\dot{\mathbf{s}}$ . En la mayoría de los problemas de contacto no se obtendrá una descripción precisa del fenómeno a menos que se incluya la correspondiente velocidad de deformación de los sólidos. Sean  $\bar{\mathbf{u}}_1$  y  $\bar{\mathbf{u}}_2$  los campos de desplazamientos debidos a la deformación en cada uno de los sólidos. La velocidad total de deslizamiento es suma de la velocidad de deslizamiento como sólido rígido y la diferencia de velocidades de deformación ( $\dot{\bar{\mathbf{u}}}$ ). Esto es:

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{s}} + \dot{\bar{\mathbf{u}}} \quad \text{donde} \quad \dot{\bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2$$

Estas expresiones indican que la velocidad de deslizamiento está relacionada con la deformación en cada sólido. Por otra parte, esta deformación es función de las presiones, tanto normales como tangenciales, que se desarrollen en el contacto. En la sección 8.7.4 se verá que para determinar la “presión” tangencial se necesita conocer la velocidad de deslizamiento pero, a su vez, para conocer la velocidad de deslizamiento necesitamos conocer la “presión” tangencial.

### 8.7.3 Teoría de Hertz para Presiones Normales

En esta sección se exponen sucintamente las bases y resultados de la teoría de Hertz. Para una explicación más exhaustiva consultar la referencia [?].

La geometría local en el punto de contacto entre dos sólidos no conformes puede describirse en función de los radios de curvatura principales de cada uno de los sólidos. Cuando los cuerpos están sometidos a una resultante normal al plano tangente común, se genera una región de contacto que, dada la descripción geométrica hecha de los sólidos, adopta la forma de una elipse. Los semiejes de esta elipse ( $a$  y  $b$ ) son función de los radios de curvatura, de los módulos de elasticidad de los dos cuerpos, y de la resultante normal al plano. La distribución de presiones normales corresponde a un elipsoide superpuesto sobre el contorno de la elipse de contacto. La distribución es la siguiente:

$$p(x, y) = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (8.5)$$

En la obtención de la expresión anterior se ha supuesto que el rozamiento entre los dos cuerpos es nulo y que, por tanto, no existen tensiones tangenciales en el contacto. Sin embargo, este campo de presiones se puede utilizar como una aproximación razonable también en el caso en que exista una resultante tangencial.

Hertz desarrolló la teoría del contacto mientras trabajaba en interferencias luminosas con lentes. En la Figura 8.21 se muestra el aspecto de esta interferencia con dos lentes cilíndricas y ejes inclinados 45°.

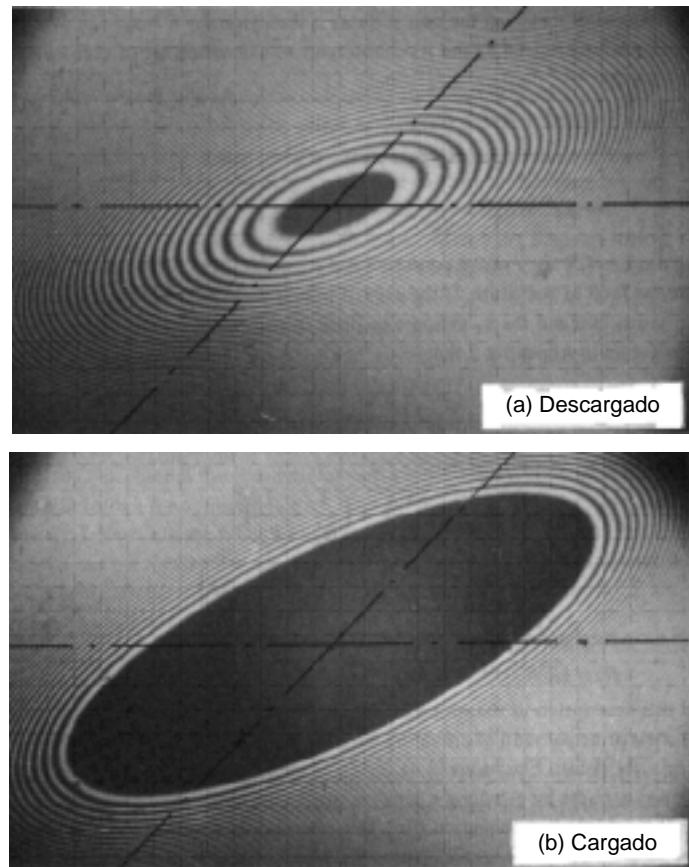


Figura 8.21: Interferencia en lentes cilndricas con ejes a  $45^\circ$ . Se observa la elipse de contacto entre los dos sólidos (lentes).

#### 8.7.4 Teoría de Kalker para “Presiones” Tangenciales

La región de contacto entre dos sólidos que ruedan uno respecto del otro está dividida en una zona de adherencia y otra de deslizamiento. Esto no podría ser de otra manera puesto que no existe ninguna otra opción de movimiento relativo entre los puntos en contacto. Sin embargo, estudios experimentales demuestran que las regiones son conexas, que la zona de adherencia es la próxima al borde de ataque, y que, por pequeña que sea la resultante tangencial, existe una región de deslizamiento en el borde de salida del contacto. Esta zona crece a medida que lo hace la carga tangencial, hasta alcanzar un valor máximo en que toda la región de contacto lo es de deslizamiento. En este caso, el contacto está saturado, la resultante tangencial ha alcanzado su cota superior, y se produce el deslizamiento global de los sólidos.

De la teoría de Coulomb de rozamiento seco se sabe que la distribución de tensiones tangenciales tiene que ser tal que, en el caso de adherencia, no se superen los valores máximos del rozamiento. Esto es, si un punto  $(x, y)$  del contacto pertenece a la región de adherencia, entonces:

$$|\mathbf{q}(x, y)| \leq \mu p(x, y) \quad (8.6)$$

donde  $\mathbf{q}(x, y)$  es el vector de “presión” tangencial en  $(x, y)$ ,  $\mu$  es el coeficiente de rozamiento, y  $p(x, y)$  es la presión normal que podemos suponer dada por 8.5.

También se sabe que cuando el módulo de la presión tangencial alcanza la cota dada por 8.6, entonces los puntos de cada sólido que coinciden con  $(x, y)$  experimentan deslizamiento relativo y, en este caso, la dirección del vector  $\mathbf{q}(x, y)$  es contraria a la del vector de deslizamiento relativo ( $\dot{\mathbf{w}}(x, y)$ ). Luego en la región de deslizamiento la presión tangencial es conocida y viene dada por:

$$\mathbf{q}(x, y) = -\mu p(x, y) \frac{\dot{\mathbf{w}}(x, y)}{|\dot{\mathbf{w}}(x, y)|} \quad (8.7)$$

El problema de la obtención de las presiones tangenciales en el contacto se puede describir de la siguiente manera. Se trata de determinar las distribuciones de  $q_x(x, y)$  y  $q_y(x, y)$  de manera que se cumpla 8.6 y/o 8.7 conociendo la distribución de  $p(x, y)$ , la resultante  $(Q_x, Q_y)$  de carga tangencial entre sólidos, y sabiendo que el deslizamiento  $(w_x, w_y)$  está relacionado con la presión tangencial  $(q_x, q_y)$  a través del comportamiento elástico de los cuerpos.

Un procedimiento numérico para atacar el problema descrito en el párrafo anterior puede ser el siguiente. Se sabe que el vector:

$$|\dot{\mathbf{w}}| \mathbf{q} + \mu p \dot{\mathbf{w}} \quad (8.8)$$

es nulo en toda la región de contacto, pues o bien el deslizamiento es nulo, o las tensiones tangenciales están fijadas en su valor máximo y dirección contraria al movimiento. La distribución de tensiones que cumpla lo anterior y tenga como resultante el valor  $\mathbf{Q}$ , es la distribución real. Una distribución de tensiones tangenciales arbitraria no cumple, en general, la relación 8.8. De manera que la integral:

$$I = \int_S ||\dot{\mathbf{w}}| \mathbf{q} + \mu p \dot{\mathbf{w}}|^2 dS$$

se puede usar como medida de la aproximación de una distribución dada a la real. Mediante un proceso de minimización con restricciones de la integral anterior se pueden obtener distribuciones cada vez más próximas a la real. El proceso es como sigue:

1. Partir de una distribución arbitraria de presiones tangenciales que verifique las siguientes restricciones:

(a)

$$\int_S \mathbf{q} dS = \mathbf{Q}$$

(b)

$$|\mathbf{q}| \leq \mu p$$

2. Usar la distribución anterior como solución factible inicial en el problema de minimización siguiente:

$$\begin{aligned} \min_{s.a.} \quad & \int_S ||\dot{\mathbf{w}}| \mathbf{q} + \mu p \dot{\mathbf{w}}|^2 dS \\ & \int_S \mathbf{q}, dS = \mathbf{Q} \\ & |\mathbf{q}| \leq \mu p \end{aligned}$$

Uno de los ejemplos más simples de contacto es el de un cilindro flexible rodando sobre un plano rígido. En este caso, el problema es unidimensional. Su tratamiento analítico y su estudio experimental se simplifican sustancialmente. Los resultados se presentan, a nivel cualitativo, en la Figura 8.22.

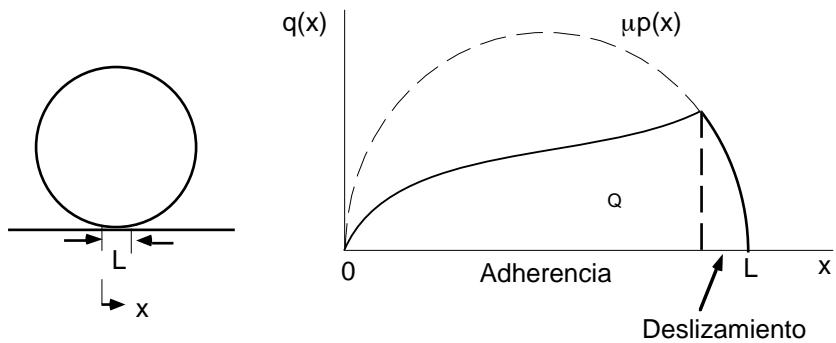


Figura 8.22: Tensión tangencial en el caso unidimensional.

## 8.8 La Fricción

### 8.8.1 Teoría Clásica

Las leyes clásicas de la fricción se desarrollaron a principios del siglo XVI. Estas leyes, aunque válidas para metales, no se cumplen en el caso de materiales elastómeros. Sin embargo se han venido utilizando, para estos materiales, hasta hace muy poco tiempo.

Las cuatro leyes afirman, básicamente, que el coeficiente de rozamiento es independiente de la carga normal, del área de contacto (aparente), de la velocidad de deslizamiento, y de la temperatura. Las dos primeras leyes se pueden combinar afirmando que el coeficiente de rozamiento es independiente de la presión de contacto, definida como la carga normal dividida entre el área de contacto aparente.

Estas leyes se cumplen con bastante exactitud para aquellos materiales que presentan un punto de fluencia. En efecto, las superficies de los dos cuerpos son, a nivel microscópico, un terreno escarpado en el que sólo los salientes más pronunciados tienen la oportunidad de entrar en contacto. Es entonces razonable suponer que la tensión normal en estos puntos es muy grande. En metales, esto significa que la tensión alcanza el máximo que representa la tensión de fluencia. Estas regiones de contacto en las que se produce fluencia son las únicas disponibles para generar tensiones tangenciales (rozamiento). Puesto que el material tiene comportamiento perfectamente plástico, la tensión tangencial es conocida en las zonas de contacto real:

$$F = \tau_u A_r$$

donde  $F$  es la fuerza de rozamiento,  $\tau_u$  la tensión cortante última, y  $A_r$  el área de contacto real. Este área está determinada por la carga normal  $P$  entre los sólidos:

$$A_r = \frac{P}{\sigma_u}$$

donde  $\sigma_u$  es la tensión normal de plastificación. Luego el coeficiente de rozamiento es la constante:

$$\mu = \frac{F}{P} = \frac{\tau_u}{\sigma_u}$$

que no depende de la presión normal aparente ni, en primera aproximación, de la velocidad o la temperatura. El alto valor del coeficiente estático frente al dinámico puede explicarse mediante teorías de soldadura bajo presión.

Esta teoría no se sostiene en el caso de gomas como demuestran los gráficos de la Figura 8.23. En efecto, se observa que el coeficiente de rozamiento disminuye con la presión normal aparente. Esta es la razón por la que se siguen usando presiones relativamente bajas en los neumáticos de automoción. La tendencia es, hasta cierto punto, intuitiva: se espera tener mayor rozamiento cuando aumenta el área de contacto aparente (para la misma carga normal). El coeficiente de rozamiento aumenta con la velocidad para valores muy pequeños de ésta, y disminuye con la velocidad para valores  $v \approx 1\text{ mph}$ . La temperatura también influye en el valor del coeficiente: a mayor temperatura menor rozamiento. Esta relación, sin embargo, depende extraordinariamente del tipo de compuesto.

El rozamiento en estos materiales se debe fundamentalmente a tres factores: adherencia por atracción molecular (80%), histéresis (16%), levantamiento de superficies (4%). Las dos primeras se comentan a continuación.

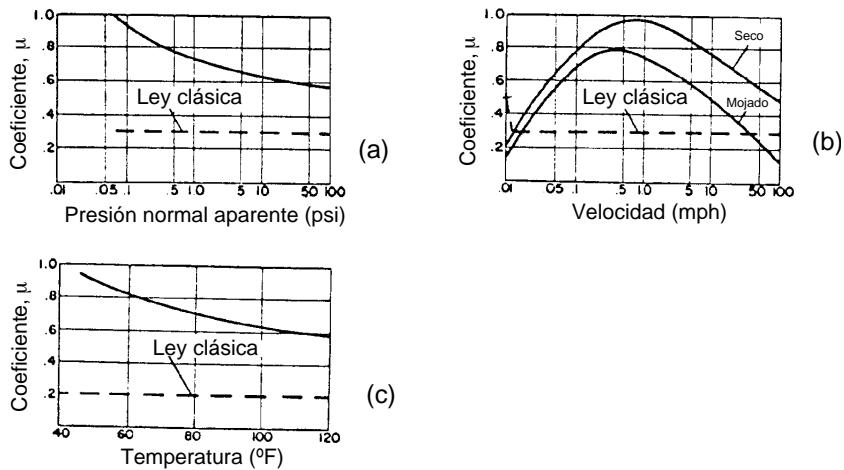


Figura 8.23: Comparación entre la teoría clásica del rozamiento y el comportamiento real de elastómeros.

### 8.8.2 Otras Teorías

#### Componente de Adherencia

La presión normal hace que las superficies de contacto entre la goma y la base sobre la que desliza entren en contacto íntimo, permitiendo así que se formen enlaces moleculares. Cuando la goma se desplaza estos enlaces deben ser rotos generando tensiones en la dirección tangencial al contacto (Fig. 8.24). Estas tensiones tienen una componente normal al plano medio de contacto y otra tangencial. La integral de la primera componente es nula, y la de la segunda es la contribución de la adherencia a la fuerza de rozamiento:

$$F_A = sA_r$$

donde  $F_A$  es la fuerza de rozamiento debida a adherencia,  $s$  es un factor que depende de la composición química de los materiales y de su grado de pureza, y  $A_r$  es, como ya se ha mencionado, el área de contacto real.

Esta componente de adherencia puede hacerse muy grande si se tienen superficies muy limpias (gran afinidad química, altos valores de  $s$ ) y poco rugosas (altos valores de  $A_r$ ). De ahí que se lleguen a medir coeficientes de rozamiento de valor 3–4 cuando un bloque de goma se desliza por una superficie de cristal limpia. Esta es una de las razones por las que se utilizan neumáticos lisos en coches de fórmula (alto  $A_r$ ). La otra razón es, como se comentó en el Capítulo 3, la mejora de la rigidez a deriva.

#### Componente de Histéresis

En la Figura 8.24 se observa que al desplazar el bloque de goma sobre la superficie de apoyo se generan unas zonas de compresión en la estela de la goma. Cuando este material rebasa el obstáculo, devuelve parte de la energía acumulada, el resto se disipa en forma de calor. Esta energía disipada se traduce (con relación de proporcionalidad) en una fuerza

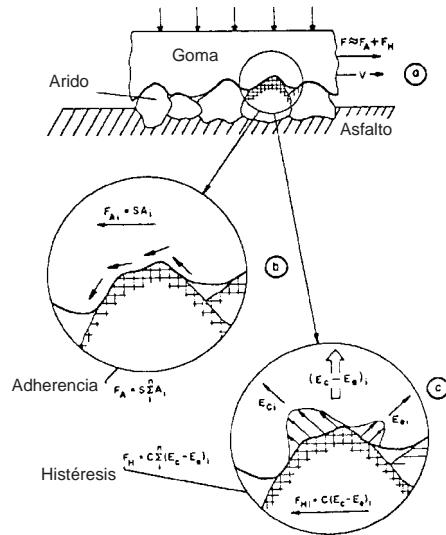


Figura 8.24: Componentes de la fuerza de rozamiento.

que es necesario aplicar a la goma para hacerla deslizar sobre la superficie. Esta es la contribución de la histéresis al coeficiente de rozamiento.

### 8.8.3 Pseudo-deslizamiento

Las tensiones tangenciales generadas en la región de contacto hacen que la goma de la rueda se deforme longitudinalmente. Esto quiere decir que la carretera “ve pasar” más goma en cada vuelta que la longitud indeformada del perímetro del neumático. La diferencia entre la distancia real recorrida en una vuelta, y la distancia que se hubiera recorrido si la banda de rodadura fuera inextensible (perímetro), se denomina pseudo-deslizamiento:

$$S = \frac{v - \omega R}{v}$$

donde  $S$  es el pseudo-deslizamiento,  $v$  la velocidad longitudinal de la rueda (igual a la del vehículo),  $\omega$  es la velocidad angular de la rueda, y  $R$  es el radio de la rueda (corregido para tener en cuenta la disminución del radio al cargar el vehículo).

Cuando  $S$  toma el valor cero se tiene el caso de una rueda sin carga tangencial (rodadura pura en el sentido tradicional). Cuando el parámetro toma el valor 100% se tiene una rueda que desliza y no rueda (no gira, está bloqueada). Entre estos dos valores se pueden tener dos tipos de situaciones. Aquellas en las que, aun cuando la región de contacto está saturada y desliza (toda) sin adherencia, la rueda sigue girando y, por tanto, el pseudo-deslizamiento, según la definición dada arriba, no toma el valor 1 (100%). Y aquellas en las que existe región de deslizamiento y región de adherencia y, por tanto, no existe deslizamiento global, el contacto no está saturado.

El pseudo-deslizamiento es función de la fuerza tangencial con que se solicita el contacto (y/o viceversa). La dependencia entre ambos se muestra de manera esquemática en la Figura 8.25. La región quasi-lineal es debida a la rigidez tangencial longitudinal de

la banda de rodadura del neumático. Cuando se alcanza el pico de fuerza, la región de contacto está en deslizamiento inminente (saturación inminente). Cuando éste comienza, la rueda empieza a disminuir su velocidad angular de giro a la vez que aumenta o se mantiene la velocidad de deslizamiento. La fuerza de rozamiento disminuye a medida que esta velocidad aumenta (ver Fig. 8.23, si se observa la escala de velocidades de esta gráfica se verá que la fuerza sólo aumenta con la velocidad para valores muy pequeños de ésta). Por otra parte, los dos valores  $\mu_p$  y  $\mu_s$  (Fig. 8.25), que se conocen como coeficientes de rozamiento “estático” y dinámico, disminuyen con la velocidad del vehículo y con la presión de contacto.

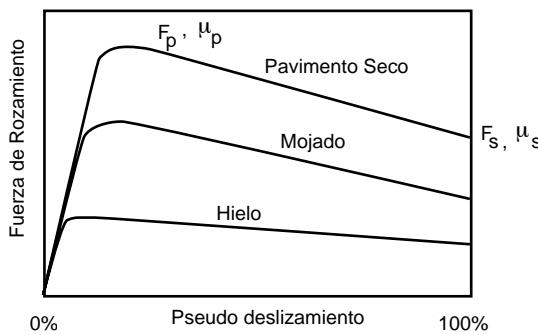


Figura 8.25: Fuerza de rozamiento para un neumático en función del pseudo-deslizamiento.

## 8.9 Propiedades de los Neumáticos

En esta sección se presentan valores experimentales típicos de aquellas propiedades del neumático que tienen influencia en la dinámica del vehículo.

### 8.9.1 Ángulo de Deriva

En la Figura 8.26 se muestra la fuerza lateral que es capaz de generar un neumático para un ángulo de deriva y una carga normal dados. El neumático en cuestión corresponde a un diseño diagonal para vehículo turismo. De esta gráfica se puede obtener la rigidez a deriva como:

$$C_\alpha = - \frac{\partial Q_y}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

donde  $C_\alpha$  es la rigidez a deriva, y  $\alpha$  el ángulo de deriva. El coeficiente de deriva resulta de dividir la rigidez anterior por la carga vertical:

$$c_\alpha = \frac{C_\alpha}{P}$$

Puede observarse en la gráfica que la rigidez a deriva aumenta con la carga vertical, pero lo hace menos que proporcionalmente, de esta manera se tiene que el coeficiente de deriva disminuye con  $P$ .

En general, los diseños radiales tienen una rigidez a deriva superior a los diagonales, sin embargo, es posible encontrar ejemplos de neumáticos concretos en los que esta relación

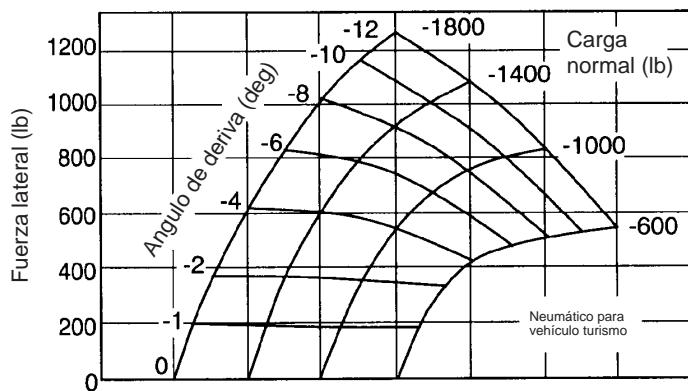


Figura 8.26: Comportamiento a deriva de una neumático diagonal.

está invertida. En la Figura 8.27 se muestran las frecuencias con las que se encuentra un determinado coeficiente de deriva en cada uno de los grupos de diseño: radiales, diagonales, diagonales con cinturón y neumáticos especiales de perfil bajo. Las variaciones se deben a la elección de materiales, ángulos de refuerzo y dimensiones.

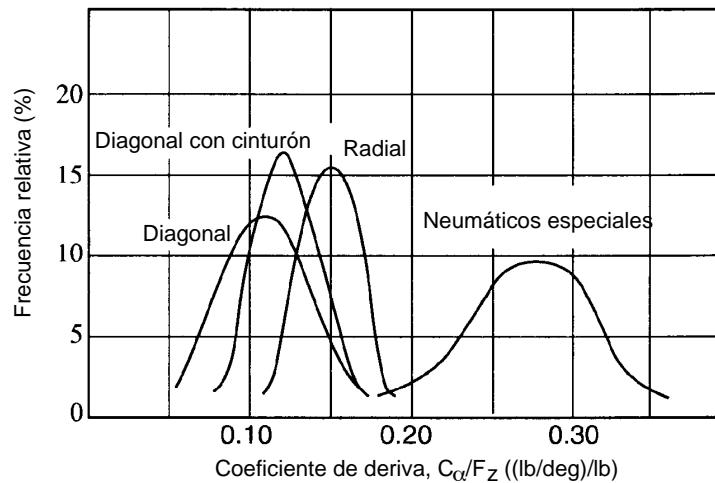


Figura 8.27: Distribución de coeficientes de deriva para neumáticos de pasajeros.

### 8.9.2 Ángulo de Caída

El mismo tipo de comportamiento se observa cuando los gráficos se obtienen en función del ángulo de caída de la rueda. En la Figura 8.28 se muestra un ejemplo para el caso de un neumático diagonal.

Se puede definir, de manera análoga a lo efectuado en el caso de comportamiento a

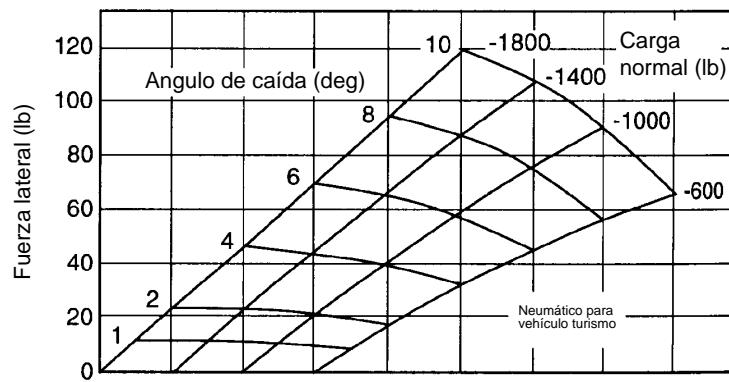


Figura 8.28: Comportamiento lateral de un neumático en función del ángulo de caída.

deriva, una rigidez de caída y un coeficiente de caída:

$$C_\gamma = -\frac{\partial Q_y}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} \quad c_\gamma = \frac{C_\gamma}{P}$$

donde  $C_\gamma$  es la “rigidez a caída”, y  $\gamma$  el ángulo de caída. En este caso, al contrario que ocurre con  $C_\alpha$  y  $c_\alpha$ , se tienen valores superiores de rigidez en neumáticos diagonales. Ésta es la razón por la que las motocicletas siguen usando diseños diagonales. La distribución de frecuencias en este caso es la dada en la Figura 8.29.

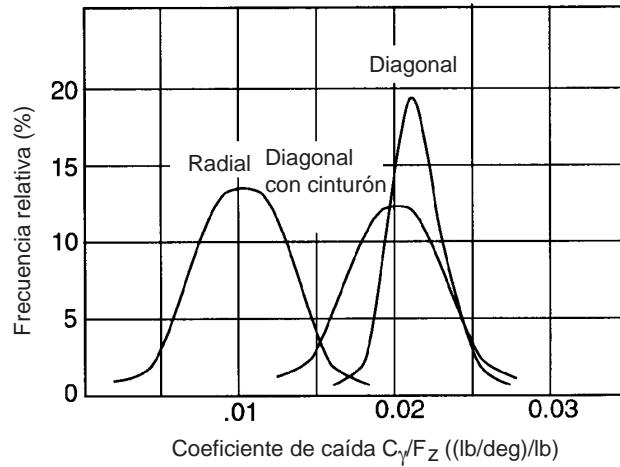


Figura 8.29: Distribución de coeficientes de caída para neumáticos de pasajeros.

### 8.9.3 Momento Rectificador

La distribución de tensiones tangenciales en el contacto produce un momento alrededor del eje vertical ( $M_z$ ) que contribuye a posicionar las ruedas en dirección longitudinal. Este momento se puede medir, al igual que se ha hecho con la resultante de tensiones, en función de la carga vertical y el ángulo de deriva (o caída). Los resultados experimentales se muestran en la Figura 8.30 para el ángulo de deriva, y en la 8.31 para el de caída. Cabe destacar el hecho de que  $M_z$  se hace negativo para valores altos del ángulo de deriva y pequeñas cargas verticales. Esta disminución del momento es una información muy útil para el conductor que puede detectar, por tanto, que la huella se está saturando y que pronto se va llegar al máximo de fuerza lateral.

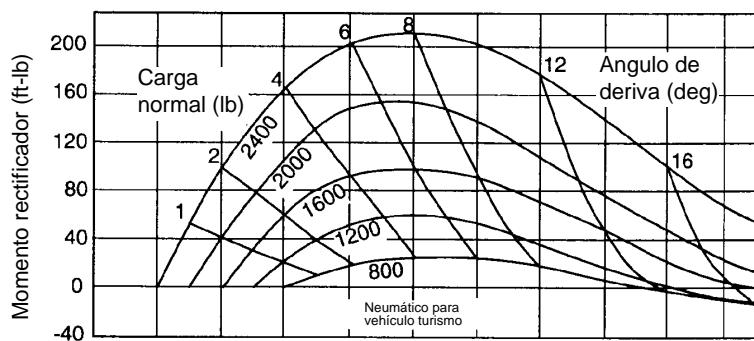


Figura 8.30: Momento rectificador  $M_z$  en función del ángulo de deriva y la carga vertical.

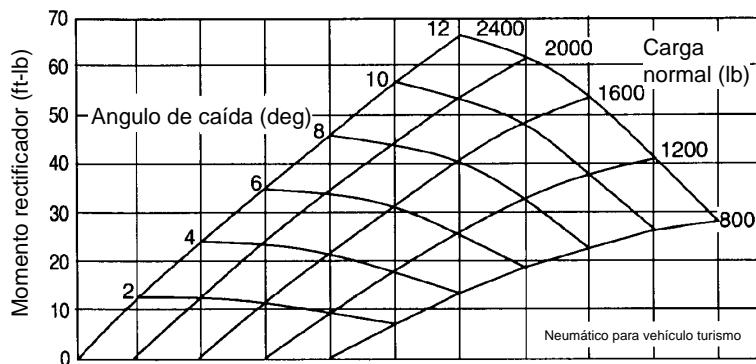


Figura 8.31: Momento rectificador  $M_z$  en función del ángulo de caída y la carga vertical.

### 8.9.4 Fuerzas Laterales y Longitudinales Combinadas

Cuando en un ensayo se fija el ángulo de deriva y la carga vertical, la fuerza transversal que se desarrolla es constante. Si en estas condiciones se aplica una fuerza longitudinal, en-

tonces se genera un pseudo-deslizamiento longitudinal, por un lado, y disminuye la fuerza transversal, por otro (ver Fig. 8.32), a menos que se adopte un ángulo de deriva superior. Si se sigue aumentando la fuerza longitudinal, la fuerza transversal sigue disminuyendo y el pseudo-deslizamiento aumentando. El proceso anterior se repite hasta que la fuerza longitudinal alcanza un máximo. A partir de este momento, las dos fuerzas disminuyen a la vez que el pseudodeslizamiento aumenta. Se ha alcanzado el nivel de saturación.

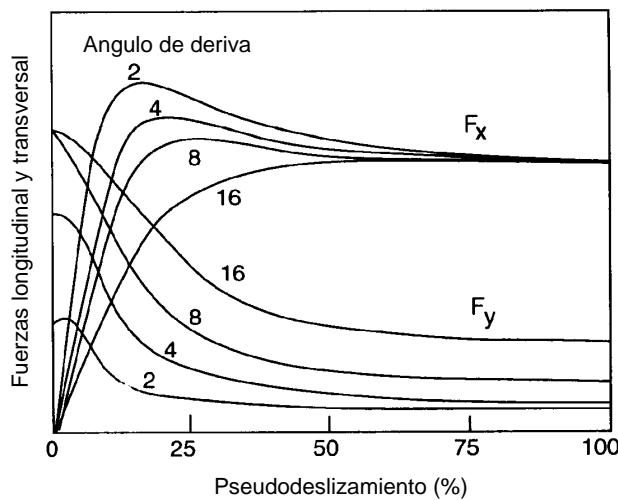


Figura 8.32: Fuerzas transversal y longitudinal en función del ángulo de deriva y el pseudodeslizamiento.

Los datos recogidos en las curvas de la Figura 8.32 se suelen representar eliminando el pseudodeslizamiento de entre cada dos curvas para un mismo ángulo de deriva. El resultado es el mostrado en la Figura 8.33. La envolvente de las curvas coincide con el círculo de rozamiento que, lógicamente, limita la resultante  $\mathbf{Q}_x + \mathbf{Q}_y$ .

## 8.10 Modelos de Comportamiento Mecánico

Buena parte de las propiedades comentadas en el apartado anterior se pueden explicar con un par de modelos sencillos. Éstos utilizan una representación elástica lineal del neumático en las dos direcciones de interés. Aunque los resultados cuantitativos que proporcionan son aproximados, ayudan a visualizar los fenómenos de deriva y pseudo-deslizamiento.

### 8.10.1 Modelo de Cimentación Elástica Para el Comportamiento Lateral

Este modelo supone que el desplazamiento lateral ( $d$ ) de un punto de la huella del neumático es proporcional a una rigidez lateral ( $c$ ) que será necesario ajustar con datos experimentales (Fig. 8.34). En el modelo se ignora el comportamiento en la zona trasera del contacto, en donde, por tanto, el neumático aparece partido (Fig. 8.34). La tensión transversal máxima está limitada por el coeficiente de rozamiento, se tienen entonces dos casos posibles: el desplazamiento lateral máximo es inferior al límite  $d_m$ , o existe una zona de deslizamiento en la parte trasera de la huella (Fig. 8.34).

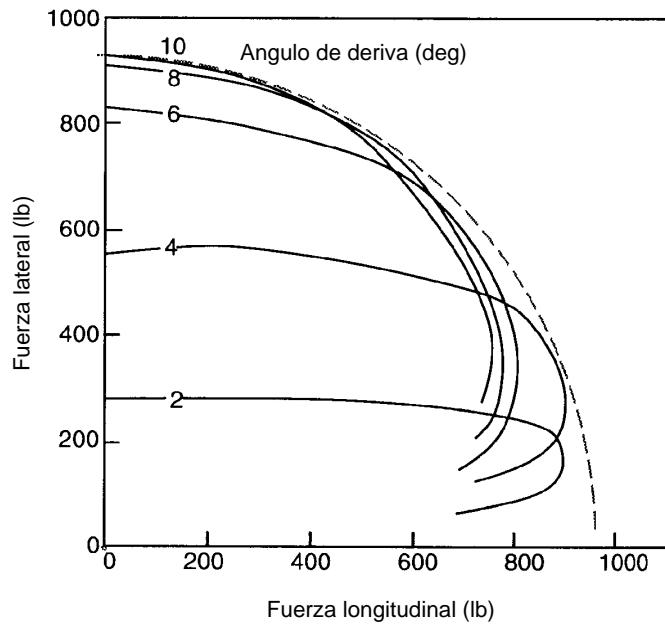


Figura 8.33: Combinaciones posibles de fuerzas longitudinal y transversal para ángulo de deriva dado.

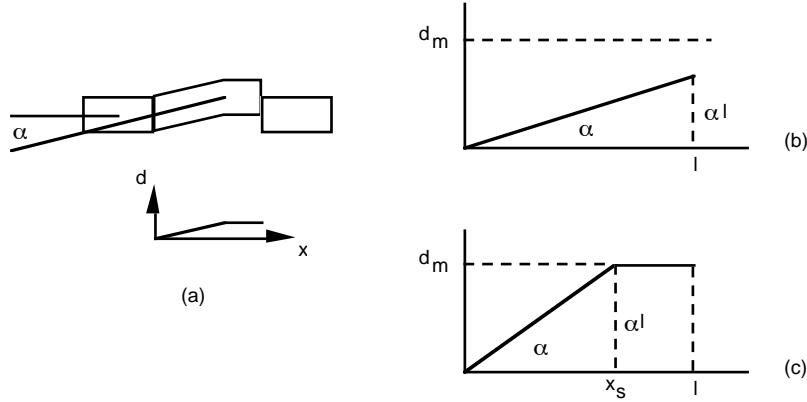


Figura 8.34: Modelo de cimentación elástica lateral.

El primer caso se produce para ángulos de deriva que cumplen la relación siguiente:

$$cal = cd \leq \frac{\mu P}{l} \quad \rightarrow \quad \alpha \leq \frac{\mu P}{cl^2} \quad (8.9)$$

donde se ha supuesto que la carga vertical ( $P$ ) se distribuye uniformemente ( $P/l$ ) en la zona de contacto de longitud  $l$ .

La fuerza lateral y el momento rectificador vienen dados por:

$$\begin{aligned} Q_y &= \int_0^l cd(x) dx = \int_0^l c\alpha x dx = \frac{1}{2}c\alpha l^2 \\ M_z &= \frac{1}{6}Q_y = \frac{1}{12}c\alpha l^3 \end{aligned}$$

Valores típicos de las variables que intervienen en este modelo son los siguientes. Longitud de la huella  $l = 180mm$ , carga vertical  $P = 5KN$ , coeficiente de rozamiento  $\mu = 1$ , rigidez lateral de la cimentación  $c = 3MPa$ . Estos valores proporcionan un ángulo de deriva máximo de  $2.95^0$  ( $d_m = 9.3mm$ ),  $C_\alpha = 49KN/rad$  y una fuerza lateral máxima  $Q_{ym} = 1500N$ .

En el caso en que el ángulo de deriva supere el valor dado por 8.9, se tiene una zona de adherencia en  $0 \leq x \leq x_s$ , y otra de deslizamiento en  $x_s \leq x \leq l$  (ver Fig. 8.34):

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\mu P}{l c \alpha} \\ Q_y &= \mu P - \frac{\mu^2 P^2}{2 l^2 c \alpha} \\ M_z &= \frac{\mu^2 P^2}{4 l c \alpha} - \frac{\mu^3 P^3}{6 l^3 c^2 \alpha^2} \end{aligned}$$

En la Figura 8.34 puede verse que a medida que la fuerza lateral (área) crece, el ángulo de deriva  $\alpha$  se hace mayor y el “brazo” de la fuerza disminuye. Se llega, entonces, a un ángulo para el que el momento rectificador comienza a disminuir, se hace cero cuando toda la zona de contacto está saturada. El modelo no admite que el momento se haga negativo como se observa experimentalmente (ver Sección 8.9.3).

### 8.10.2 Modelo de Escoba Para el Comportamiento Longitudinal

Un modelo similar al anterior permite obtener las fuerzas longitudinales (tracción o frenado) en función del pseudo-deslizamiento. En la Figura 8.35 se muestra un esquema del modelo.

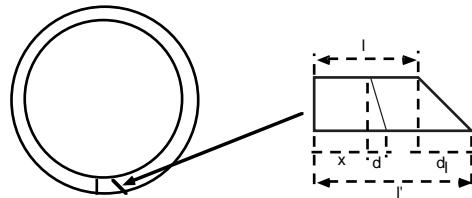


Figura 8.35: Modelo de escoba para el comportamiento longitudinal.

El pseudo-deslizamiento se ha definido (ver sección 8.8.3) como la diferencia entre la velocidad longitudinal del eje de la rueda, y la que correspondería si la rodadura se efectuara sin deformación:

$$S = \frac{v - \omega R}{v} = 1 - \frac{\omega R}{v} = 1 - \frac{R}{R_e}$$

donde donde  $R_e$  es el radio de la rueda rígida equivalente, esto es, de la rueda que, en rodadura pura, recorre la misma distancia, con la misma velocidad angular ( $R_e = v/\omega$ ).

En la Figura 8.35 se aprecia que esta diferencia de velocidades se produce porque la zona deformada de la huella recorre más distancia en el mismo tiempo que la zona indeformada superior.

Las distancias recorridas en la zona de contacto y en la sección indeformada de la carcasa son, respectivamente:

$$\begin{aligned} l' &= vt \\ l &= \omega R t \end{aligned}$$

La deformación máxima (que se produce en  $x = l$ , ver Fig. 8.35) es entonces:

$$d_l = (v - \omega R)t$$

y suponiendo una variación lineal de la deformación se tiene:

$$d(x) = \frac{x}{l}(v - \omega R)t = \frac{x}{\omega R t}(v - \omega R)t = \frac{xS}{1 - S}$$

Ahora se puede suponer que la tensión tangencial es proporcional a la deformación longitudinal:

$$q_x(x) = c_l d(x)$$

donde  $c_l$  es una constante de rigidez longitudinal que habrá que determinar experimentalmente. Análogamente al caso transversal, no existirá deslizamiento en la zona trasera del contacto siempre que el pseudo-deslizamiento cumpla:

$$S \leq \frac{1}{1 + \frac{l^2 c_l}{\mu P}} \quad (8.10)$$

en cuyo caso la fuerza longitudinal viene dada por:

$$Q_x = \frac{l^2 S c_l}{2(1 - S)}$$

Cuando se supera esta fuerza longitudinal o, lo que es lo mismo, el valor del pseudo-deslizamiento dado por 8.10, se genera en la zona de salida de la huella una región en la que existe deslizamiento relativo entre las superficies del neumático y la carretera. La fuerza longitudinal es ahora:

$$Q_x = \mu P - \frac{\mu^2 P^2}{2l^2 c_l} \frac{1 - S}{S}$$

que predice que la zona de contacto se satura con un pseudo-deslizamiento de valor  $S = 1$  (rueda bloqueada) y fuerza longitudinal  $Q_x = \mu P$ .

## 8.11 Superficies Mojadas

Un neumático rodando sobre una superficie mojada (con una lámina de agua de espesor dado) debe expulsar el fluido de la zona de contacto si se quiere mantener, al menos, una

región seca donde el coeficiente de rozamiento tenga valores elevados. En una rueda lisa el agua encuentra muchas dificultades para abandonar la zona de contacto. Sólo a bajas velocidades y altas presiones internas se consigue evacuar el líquido hacia los laterales del neumático. A velocidades mayores, el agua no escapa y forma una lámina que soporta el peso del vehículo por presión dinámica. Las tensiones tangenciales (rozamiento) en esta lámina son muy pequeñas, de manera que la capacidad para soportar cargas horizontales (longitudinales o transversales) se reduce dramáticamente. El fenómeno se conoce como aquaplaning y puede ocurrir, también, en neumáticos con dibujo.

El dibujo en la banda de rodadura del neumático ayuda a evacuar el agua de la zona de contacto. El fluido se ingiere por el borde de ataque y es desviado, gracias a la presión de contacto, hacia acanaladuras oblicuas que conducen el agua hasta los laterales o hasta colectores longitudinales. Para terminar de secar la superficie se disponen pequeños cortes en la goma que, al abrirse bajo presión, absorben el agua que pueda haber quedado atrapada. Los colectores centrales pueden ser capaces de evacuar todo el fluido sin agotar su sección útil, en cuyo caso la velocidad del agua es aproximadamente constante en su recorrido hasta el borde de salida. Por el contrario, los colectores funcionan como toberas cuando el caudal es superior al producto de la sección de los canales por la velocidad del vehículo. En este caso, el fluido se acelera al atravesar la huella y es impulsado a gran velocidad por la trasera de los canales.

El caudal es proporcional a la velocidad del vehículo. Este factor tiene, por tanto, una gran influencia en el comportamiento del neumático sobre pavimentos mojados. El agua necesita un tiempo para introducirse en los canales. El tiempo total que un elemento de goma está en la zona de contacto es inversamente proporcional a la velocidad (6ms si la velocidad es 30m/s y la huella 180mm). El tiempo disponible para la evacuación es pequeño y la viscosidad del agua juega un papel importante. En cualquier caso, el área de contacto seco es menor que la que se tendría sobre pavimentos sin agua. Además, la unión química entre goma y pavimento se deteriora como consecuencia de la presencia de fluido. Estas dos razones hacen que el coeficiente de rozamiento se vea reducido. En un experimento con una lámina de agua de 2.5mm se obtuvo un coeficiente de 1.0 a baja velocidad. Este valor se reducía a 0.77 a 20m/s (8mm de profundidad del dibujo) y a 0.48 con 4mm de profundidad. Además, la zona de adherencia se desplaza hacia atrás en la huella con lo que la disminución de capacidad para soportar fuerza lateral no va acompañada de una disminución de momento rectificador. Esto es peligroso porque el conductor no recibe información de la saturación como ocurre en el caso de pavimentos secos.

Cuando la evacuación de agua no es posible, se forma una lámina fluida que soporta la carga vertical del vehículo. En estas condiciones, el coeficiente de rozamiento efectivo es muy pequeño. El neumático en cuestión no tiene capacidad para soportar fuerzas horizontales lo que puede suponer la pérdida de control del automóvil. El fenómeno de aquaplaning puede tener dos causas distintas: a) la viscosidad del agua y la velocidad del vehículo pueden ser tales que no haya tiempo suficiente para completar la evacuación o b) la velocidad de giro del neumático es tal que la presión dinámica generada por la ingestión de fluido es capaz de soportar la carga vertical. En el caso real se tiene una combinación de estos dos aspectos. Para el primer caso se puede definir un número de aquaplaning viscoso de la siguiente manera:

$$N_v = \frac{\tau}{1/v}$$

siendo  $\tau$  la constante de tiempo de evacuación que es función de la viscosidad, y  $v$  la velocidad del vehículo. Cuando  $N_v$  alcanza la unidad se tiene hidroplaning viscoso completo. Para el segundo caso se puede definir el número de aquaplaning dinámico como:

$$N_d = \frac{\frac{1}{2}\rho_w v^2}{p_i}$$

donde  $\rho_w$  es la densidad del agua, y  $p_i$  la presión de inflado del neumático. El hidroplaning tiene lugar típicamente para valores de  $N_d$  cercanos a 1.5.



# Capítulo 9

## Transmisión

Los vehículos de todo tipo están dotados de una planta de potencia para “producir” o transformar la energía necesaria para propulsarlos. En algunos casos (ferrocarriles) el vehículo puede tomar energía del exterior y transformarla en energía mecánica de tracción, en otros (automóviles con motor de combustión interna) el propio vehículo transporta un combustible y una planta de potencia capaz de transformar energía potencial en mecánica. Algunas de estas plantas requieren un sistema sofisticado de transmisión de la potencia a las ruedas para:

1. Hacer posible la desconexión del motor respecto de las ruedas y permitir la puesta en movimiento del vehículo
2. Permitir cambiar la relación de transmisión para convertir el par y la velocidad
3. Reorientar la dirección del par de salida
4. Repartir el par entre las distintas ruedas motrices y permitir que éstas giren a distinta velocidad

La variación de la relación de transmisión es un condicionante impuesto por algunas plantas de potencia. En efecto, como se verá en la Sección 9.2.2, existen grupos propulsores, como los motores de combustión interna, que proporcionan par y potencia en un rango limitado de velocidades (vueltas, revoluciones). La variación de la relación de transmisión permite que este rango limitado de velocidades se corresponda con distintos rangos de velocidad del vehículo.

Cada uno de los requerimientos anteriores da lugar a un “componente” del sistema de la transmisión. Por ejemplo, en una transmisión mecánica típica, las funciones anteriores se traducen en: embrague, caja de cambios, grupo cónico y diferencial. Sin embargo, existen otras muchas soluciones. Una clasificación de los distintos tipos de transmisión es la siguiente:

1. Mecánica
2. Hidráulica:
  - (a) Hidrostática
  - (b) Hidrodinámica

### 3. Eléctrica y electromagnética

En este capítulo, aparte de comentar brevemente sobre las transmisiones hidrostática y eléctrica, se analizan las transmisiones mecánica e hidrodinámica.

## 9.1 Tipos de Transmisión

En esta sección se describen brevemente cada uno de los tipos de transmisión clasificados en la introducción anterior.

La transmisión Hidrostática utiliza fluido a alta presión y baja velocidad (presión quasi-estática), una bomba volumétrica impulsa el fluido hacia un motor hidráulico de desplazamiento variable. En realidad, tanto la bomba como el motor, o ambos, pueden ser de desplazamiento variable. Este tipo de transmisión cumple con los cuatro requerimientos mencionados arriba. En efecto, para desconectar la transmisión de potencia a las ruedas basta con abrir el retorno de la bomba. En estas condiciones la bomba trabaja en vacío y el motor puede estar funcionando a un número determinado de revoluciones con el vehículo parado. La puesta en movimiento del vehículo se realiza mediante el cierre progresivo de la válvula de retorno.

El segundo requerimiento de la lista anterior se realiza mediante la variación de desplazamiento en la bomba y/o en el motor hidráulico. La variación continua del desplazamiento permite seleccionar entre un número infinito de relaciones de transmisión. Se trata de una transmisión continuamente variable que permite mantener el motor de combustión interna a unas revoluciones dadas, y variar la velocidad del vehículo modificando la relación de transmisión.

Los dos últimos requerimientos se cumplen automáticamente. El par de salida puede estar orientado en una dirección arbitraria respecto del giro del motor de combustión. De hecho, la transmisión de potencia mediante fluido a baja velocidad y alta presión es casi tan flexible como la transmisión de potencia eléctrica. Es posible salvar obstáculos, dividir, y reorientar los conductos arbitrariamente. Por otra parte, no es necesario disponer de diferenciales en todas aquellas bifurcaciones en las que se esperen diferencias de velocidad. Estas diferencias de velocidad se acomodan como diferencias de caudal del fluido que viaja por cada una de las ramas de la bifurcación. La condición dinámica en un diferencial: igualdad en los pares de salida, se cumple debido a que la presión hidráulica es aproximadamente constante en todo el circuito (despreciando la pérdida de carga).

Este tipo de transmisiones se usa en vehículos muy pesados en los que se debe repartir la potencia entre un número elevado de ejes para mejorar las condiciones de tracción. La velocidad de estos vehículos suele ser muy limitada, es por esto que la transmisión hidrostática, que sólo funciona adecuadamente a velocidades bajas del fluido de la transmisión, tiene prestaciones razonables en este caso.

El principio de funcionamiento de la transmisión hidrodinámica es radicalmente distinto. Una bomba radial impulsa el fluido, a alta velocidad, hacia una turbina del mismo tipo. El dispositivo permite obviar el problema de la desconexión y puesta en marcha. En efecto, el acoplamiento bomba-turbina (acoplamiento hidráulico) transmite un par de salida muy bajo cuando el motor funciona al ralentí. Por otra parte el acoplamiento permite diferencias de velocidades entre la entrada y la salida. Quiere esto decir que se puede mantener el vehículo parado mediante la aplicación de un pequeño par de frenado a la vez que el motor funciona a bajas revoluciones. Estos acoplamientos permiten una cierta

variación de la relación de transmisión según las condiciones de funcionamiento. No obstante, en general, se necesita de una caja mecánica (normalmente de trenes epicicloides y accionamiento automático) para conseguir las variaciones importantes de relación.

La transmisión eléctrica se usa en algunas locomotoras (diesel-eléctricas) y en versiones actuales de vehículos híbridos. Consiste en conectar el motor a un generador de corriente, esta energía se envía a un motor eléctrico que mueve directamente las ruedas del vehículo. Puesto que existen motores eléctricos con una curva de potencia suficientemente plana, no es necesario, en general, utilizar dispositivos que permitan variar la relación de transmisión entre el motor eléctrico y las ruedas. En otras palabras, el rango de velocidades de funcionamiento del motor eléctrico es suficiente para cubrir el rango de velocidades del vehículo. La transformación de la energía mecánica (del motor de combustión interna) en energía eléctrica permite hacer uso de motores (motor eléctrico) con un rango de velocidades mayor.

El resto de requerimientos de una transmisión se cumplen automáticamente en el caso eléctrico. En efecto, la desconexión se produce con la apertura del circuito. La puesta en movimiento consiste en transmitir niveles crecientes de intensidad al motor eléctrico. El motor eléctrico está conectado directamente a las ruedas, de manera que no es necesario reorientar el par de salida. Por otra parte, este tipo de transmisión es típica de vehículos ferrocarriles donde el efecto diferencial está proporcionado por la propia conicidad de las ruedas.

En vehículos automóviles híbridos se está utilizando también la transmisión eléctrica. En este caso, sin embargo, se utilizan motores eléctricos con rangos de funcionamiento limitados. En la mayoría de los prototipos es necesario interponer una caja de cambios (de dos o tres relaciones) entre el motor y las ruedas.

El funcionamiento de este tipo de vehículos es el esquematizado en la Figura 9.1. El motor de combustión interna se encarga de mover un generador de corriente que alimenta las baterías de almacenamiento. Éstas suministran corriente al motor eléctrico que, a través de la caja de cambios, mueve las ruedas del automóvil. En tráfico urbano, el motor de combustión puede permanecer parado, la energía se toma directamente de las baterías. En carretera, el motor de combustión recarga las baterías a la vez que suministra corriente al motor eléctrico.

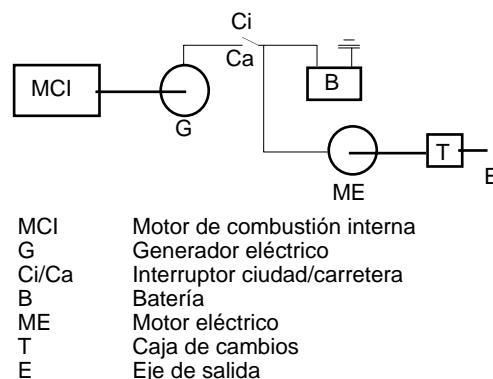


Figura 9.1: Esquema de vehículo híbrido combustión–eléctrico.

Las transmisiones mecánicas hacen uso de discos de fricción y trenes ordinarios de engranajes en la caja de cambios para conseguir los efectos comentados anteriormente. En las transmisiones automáticas se utilizan acoplamientos hidráulicos, o convertidores de par, y cajas de trenes epicicloidales. El resto del capítulo se dedica a estos dos sistemas.

## 9.2 Curvas de Potencia y Par

Las *Curvas de Potencia y Par* de un motor representan la evolución de la *potencia máxima* y el *par máximo* en función del número de revoluciones a que gira. Para generar estas curvas se conecta el motor a un freno hidráulico. El freno se ajusta de manera que obligue al motor a girar a un número de vueltas determinado. Midiendo el par ( $T$ ) y el número de vueltas en el árbol de salida ( $\omega$ ) se obtiene un punto en la curva de par y otro en la de potencia ( $P = T\omega$ ). Las curvas así obtenidas se conocen como *Curvas de Potencia y Par al Freno*. Estos valores están influenciados por el rozamiento que es necesario superar para hacer girar el motor en sí. Los valores obtenidos directamente de las características intrínsecas del motor (como diagramas de presiones en motores de combustión interna) se llaman *Curvas Indicadas de Potencia y Par*.

Las curvas corresponden a la potencia y par máximos para cada velocidad (número de vueltas). El calificativo “máximo” indica que el controlador de aceleración del motor está en la posición de mayor caudal. Esto es, la mariposa de la admisión totalmente abierta, en el caso de ciclo Otto, o los inyectores de combustible en la posición de máximo desplazamiento, en el caso de ciclo Diesel. Para cualquier otra posición del controlador de aceleración existe otro par de curvas de potencia y par. El conjunto de todas las curvas posibles constituye un mapa descriptivo del motor en cuestión.

### 9.2.1 Curvas de Potencia y Par Deseadas

Un motor para ser utilizado en un vehículo automóvil debería tener una curva de potencia constante (Fig. 9.2). Para cualquier velocidad del motor se dispondría de la misma potencia máxima. A bajas velocidades la potencia estaría disponible para acelerar el vehículo o hacerlo subir en pendiente, y a altas velocidades la potencia se podría emplear en vencer las resistencias aerodinámica y de rodadura. Una planta de potencia con estas características puede usarse a cualquier número de vueltas. La entrega de potencia a las ruedas del automóvil se hace a través de una transmisión de relación fija, la velocidad del vehículo sólo depende de las revoluciones del motor.

Existen motores con características muy próximas a las deseadas. El motor de vapor (máquina de vapor) y algunos motores eléctricos proporcionan una potencia máxima prácticamente independiente del número de vueltas. Sin embargo, tienen un inconveniente que los hace desaconsejables para su uso en automoción: el peso. Los motores de combustión interna proporcionan mayor potencia específica (por unidad de peso) que los de vapor o eléctricos y su uso está muy generalizado en la propulsión de vehículos automóviles a pesar de que sus curvas de potencia y par distan mucho de parecerse a las ideales. El problema se soluciona con transmisiones de relación variable.

En el caso de motores eléctricos, el problema del peso no está relacionado con el motor en sí (su densidad de potencia es muy alta) sino con las baterías que es necesario transportar. Por otra parte, los motores utilizados en automóviles eléctricos no siempre responden a curvas de potencia suficientemente constantes.

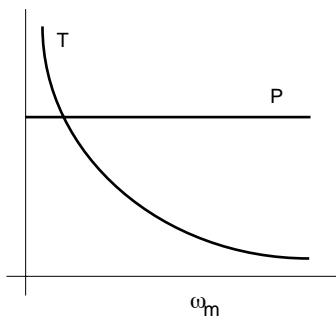


Figura 9.2: Curvas de potencia y par ideales.

### 9.2.2 Curvas de Potencia y Par en Motores de Combustión Interna

Los motores de combustión interna, tanto los Otto como los Diesel, obligan al fluido de trabajo (aire y/o gases de combustión) a sufrir un ciclo termodinámico de “compresión, aporte de energía térmica, y expansión” con el fin de producir trabajo. En el caso de motores de cuatro tiempos, un ciclo termodinámico necesita de dos ciclos del cilindro para su ejecución. En la Figura 9.3 puede verse un esquema del ciclo. Con la válvula de admisión abierta y el pistón viajando hacia la derecha (Fig. 9.3) se crea una depresión en el cilindro que hace entrar aire (con gasolina en suspensión en el caso de ciclo Otto) de la atmósfera. La depresión necesaria para conseguir el llenado depende de la pérdida de carga en todo el circuito de admisión (filtro de aire, carburador en su caso, colectores de admisión, válvula de admisión ...).

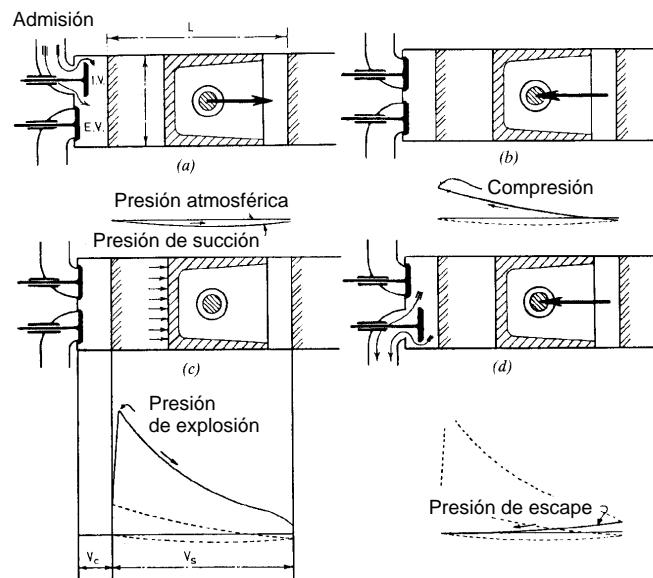


Figura 9.3: Ciclo de los motores de combustión interna.

Una vez lleno el cilindro se cierra la válvula de admisión y se procede a la compresión del aire con el movimiento del pistón hacia la izquierda (Fig. 9.3). En un punto determinado de la carrera de compresión, cercano al punto muerto superior, se inicia el aporte de energía térmica. En el caso de ciclo Otto se hace saltar una chispa que inicia la combustión de la gasolina en suspensión, en el caso de ciclo Diesel se inyecta combustible que entra automáticamente en combustión dadas las condiciones de presión y temperatura en el interior del cilindro. El fuerte incremento de la presión obliga al pistón a desplazarse hacia la derecha (Fig. 9.3) siendo ésta la carrera de producción de trabajo, esto es, la carrera en la que la fuerza del gas sobre el pistón tiene el mismo sentido que su movimiento. Los gases de la combustión son barridos en la carrera de expulsión. El pistón se desplaza hacia la izquierda (Fig. 9.3) con la válvula de escape abierta. El barrido puede completarse con la entrada de aire fresco solapando la apertura y cierre de las válvulas.

La potencia indicada de un motor de combustión interna como el descrito anteriormente puede obtenerse a partir del diagrama de presiones en un cilindro durante un ciclo termodinámico. Se denomina *Presión Media Efectiva* ( $p$ ) a la presión constante que debe actuar durante la carrera de expansión para producir el mismo trabajo que el ciclo real. Esta presión coincide con la media de las presiones en el cilindro considerándolas positivas cuando actúan en el mismo sentido que el movimiento del pistón.

La fuerza  $F$  sobre el pistón de diámetro  $D$  sometido a la presión  $p$  es:

$$F = p \frac{\pi D^2}{4}$$

Luego el trabajo  $W$  realizado en cada carrera efectiva es:

$$W = p \frac{\pi D^2}{4} L$$

donde  $L$  es la longitud de la carrera. El número de carreras efectivas por revolución del motor ( $f$ ) depende del “número de tiempos” del mismo. Así, el motor de cuatro tiempos descrito produce una carrera efectiva por cada cuatro carreras, esto es, una carrera efectiva por cada dos revoluciones ( $f = 1/2$ ). En un motor de dos tiempos  $f = 1$ . El trabajo por revolución en un cilindro ( $W'$ ) es:

$$W' = p \frac{\pi D^2}{4} L f$$

De manera que la potencia desarrollada por el cilindro en cuestión ( $P'$ ) resulta de multiplicar el trabajo por revolución por el número de revoluciones en la unidad de tiempo ( $\omega$ ):

$$P' = p \frac{\pi D^2}{4} L f \omega$$

Un motor de  $n$  cilindros desarrolla una potencia ( $P$ ) que viene dada por:

$$P = p \frac{\pi D^2}{4} L f \omega n$$

Si  $p$  se expresa en pascales,  $D$  y  $L$  en metros y  $\omega$  en vueltas por segundo, se obtiene la potencia del motor en watios.

De lo anterior se deduce que las curvas de potencia y par para motores de combustión interna vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$P = pVf\omega \quad (9.1)$$

$$T = \frac{pVf}{2\pi} \quad (9.2)$$

donde se ha tenido en cuenta que la cilindrada del motor ( $V$ ) coincide con:

$$V = \frac{\pi D^2}{4} L n$$

y que  $\omega$  está expresada en vueltas por segundo. Haciendo uso de estas fórmulas simplificadas se obtiene que un motor de  $1500\text{cm}^3$ , cuatro tiempos ( $f = 1/2$ ), una presión media efectiva de  $8\text{bar}$ , a  $6000\text{rpm}$ , genera una potencia de  $60\text{KW}$  ( $82\text{CV}$ ) y un par de  $95\text{Nm}$ .

Si se desprecian los efectos dinámicos en el llenado del cilindro y las posibles distorsiones de la carburación a bajas revoluciones, se tiene una curva de par constante. La curva de potencia es entonces lineal en  $\omega$ . Quiere esto decir que los motores de combustión interna no son adecuados para su uso en automoción a menos que se corrija esta deficiencia a través de una transmisión de relación variable.

La velocidad lineal media ( $S$ ) de los pistones es:

$$S = 2L\omega$$

Esta velocidad debe limitarse para mantener el desgaste de las camisas y segmentos en valores razonables. El uso de aleaciones con mejores propiedades frente a la fricción permite subir el techo de la velocidad  $S$ . Tradicionalmente se ha venido usando un valor de  $S = 5\text{m/s}$ , en la actualidad esta velocidad puede llegar a valores cercanos a  $12\text{m/s}$ . Si la velocidad media del pistón está dada, la potencia del motor es proporcional a  $D^2$ :

$$P = \frac{\pi D^2}{8} f n S$$

Por otra parte el peso del motor es proporcional a la dimensión característica al cubo ( $D^3$ ), luego la potencia específica es inversamente proporcional a la dimensión característica del cilindro ( $D$ ):

$$\frac{P}{M} \sim \frac{1}{D}$$

Para aumentar la potencia específica interesa hacer cilindros pequeños y aumentar el número de cilindros si se quiere mantener la potencia nominal. Además, el aumento del número de cilindros tiene otras ventajas adicionales como son la subdivisión de la energía de combustión en menores dosis, la generación de un par más uniforme que permite reducir la inercia del volante, y la posibilidad de un mejor equilibrado del motor.

Los efectos de llenado y carburación tienen una importancia sustancial en la presión media efectiva. Ésta disminuye a bajas revoluciones en el caso de motores de gasolina y a altas revoluciones para los dos tipos de motores de combustión interna (Otto y Diesel). Las curvas típicas se muestran en la Figura 9.4. Los factores que intervienen son la inercia del aire en los colectores de admisión, y la pérdida de carga en este circuito. Para el caso de ciclo Otto se puede razonar lo siguiente. A bajas velocidades, la pérdida de carga es pequeña, pero, por otra parte, se tarda un cierto tiempo en acelerar el aire de los colectores

cada vez que se abre la válvula de admisión. La inercia juega en contra del correcto llenado del cilindro. A alta velocidad, la inercia juega un papel favorable debido a que continúa entrando aire en el cilindro, incluso cuando el pistón se está “deteniendo” cerca del punto muerto inferior. Sin embargo la pérdida de carga es superior en este caso. Existe una velocidad óptima para la que los dos efectos están combinados de manera más favorable.

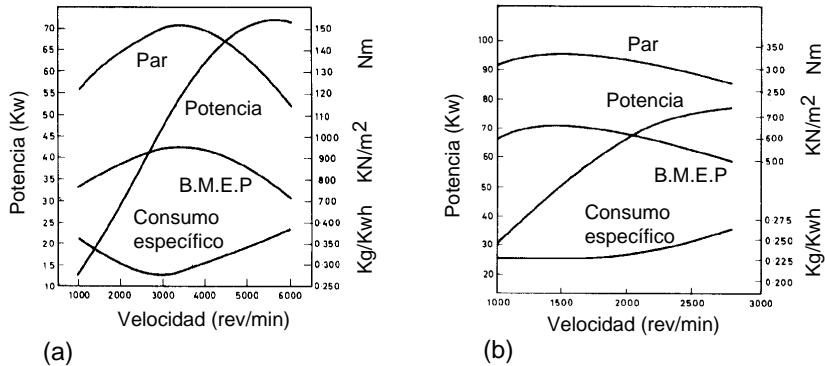


Figura 9.4: Curvas de par y potencia para motores Otto (a) y Diesel (b).

En la Figura 9.4 puede verse que el rango de velocidades en el que la potencia es suficientemente alta es muy pequeño, no válido para su uso como planta de potencia en vehículos automóviles. En efecto, sea el rango de revoluciones  $1000\text{rpm}$ – $6000\text{rpm}$ , la relación de cambio  $r = 0.1$  ( $\omega_r = r\omega_m$ , donde los subíndices  $r$  y  $m$  se refieren a rueda y motor, respectivamente), y el radio de las ruedas de  $R = 0.3\text{m}$ . El rango de velocidades del vehículo que permite este motor será:

$$v = \omega_r^i R = r\omega_m^i R = \begin{cases} i = 1, & \omega_m^1 = 1000\text{rpm} \Rightarrow v_1 = 11\text{Km/h} \\ i = 2, & \omega_m^2 = 6000\text{rpm} \Rightarrow v_2 = 67\text{Km/h} \end{cases}$$

que no es suficiente para hacer del automóvil un sistema de transporte competitivo. La manera más eficaz de solucionar este problema es seguir haciendo uso de los motores de combustión interna como planta de potencia e interponer, entre el motor y las ruedas, una transmisión de relación variable, una “caja de cambios”.

Las curvas de par, potencia y consumo específico descritas en este apartado corresponden, como se ha mencionado, a la posición totalmente abierta de la mariposa de admisión (o recorrido máximo en los pisones de inyección en motores Diesel). Para cualquier otra posición de la mariposa se obtiene otro trío de curvas correspondientes a las nuevas condiciones de funcionamiento. La información contenida en este conjunto de curvas puede representarse de muchas maneras distintas. En la Figura 9.5 se muestra el consumo específico en función de las revoluciones del motor y de la presión media efectiva.

## 9.3 Relaciones de Transmisión

### 9.3.1 Transmisión Continuamente Variable (CVT)

Para conseguir una entrega de potencia en las ruedas independiente de la velocidad del vehículo (curva ideal), es necesario hacer que el motor trabaje a un número de vueltas

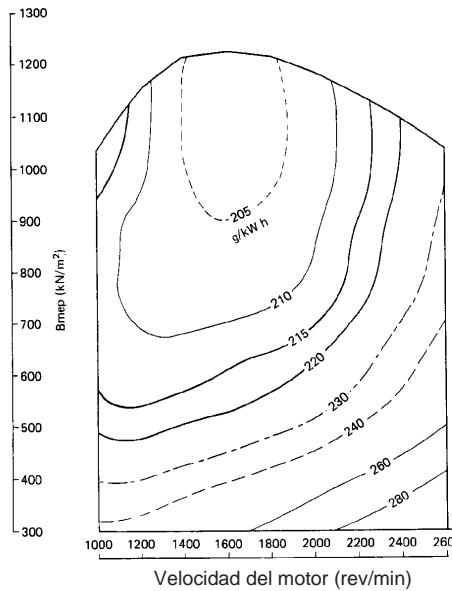


Figura 9.5: Mapas de consumo específico en función de la carga y las revoluciones.

constante, y disponer de una transmisión capaz de transformar la velocidad del motor (constante) a cualquier otra velocidad de las ruedas (arbitraria). Para ello la relación de transmisión debe variar linealmente y de forma continua con la velocidad de las ruedas. En efecto, la relación de transmisión ( $r$ , ver Fig. 9.6) es:

$$r = \frac{\omega_r}{\omega_m}$$

donde  $\omega_r$  es la velocidad angular de las ruedas,  $\omega_m$  la velocidad del motor, y  $r$  es la relación de transmisión total desde el motor a las ruedas. Puesto que  $\omega_m$  se mantiene constante,  $r$  debe variar linealmente con  $\omega_r$ .

Para conseguir lo anterior existen diversos tipos de configuraciones, siendo las más simples las construidas con correas y poleas de diámetro variable (Fig. 9.7). Otros dispositivos se muestran en la Figura 9.8. El principal inconveniente de los sistemas CVT actuales es su baja capacidad de carga.

En algunos dispositivos se emplea un acumulador cinético para mantener el motor en potencia máxima incluso en aquellas situaciones en que no se demanda potencia del motor (ver Fig. 9.9). Los dos embragues (interruptores) permiten establecer distintos circuitos para el paso de potencia. Así, en situaciones 1-0 (B desembragado) sólo se transmite potencia al acumulador, el vehículo está frenando o parado. En la situación 1-1 (los dos embragues en contacto) el motor transmite potencia a las ruedas y, dependiendo de la demanda, al acumulador cinético o de éste a las ruedas. La situación 0-1 se produce cuando el acumulador está totalmente cargado y no hay suficiente demanda de potencia en las ruedas. La transmisión de relación continua (CVT) es necesaria en este caso. La política de control será la dada arriba ( $r = C\omega_r$ ) para el caso en que el motor se mueve a velocidad constante, y otra distinta en el caso en el que el acumulador se está descargando y comienza a girar a menos vueltas.

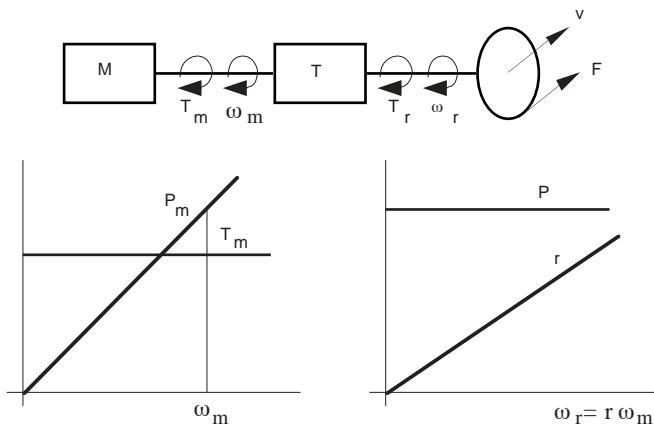


Figura 9.6: Relación de cambio teórica necesaria para cada velocidad del vehículo.

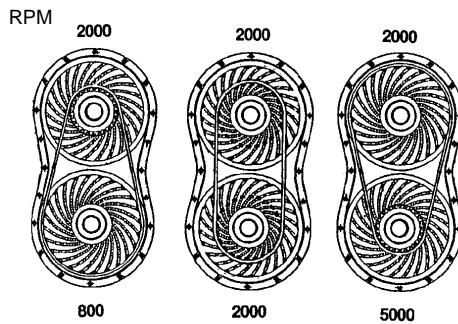


Figura 9.7: CVT de poleas de diámetro variable.

### 9.3.2 Determinación de las Relaciones en Cajas Discretas

La solución más extendida al problema de la transmisión variable es la correspondiente a una caja con varias relaciones (discretas) de cambio. La selección de una u otra “marcha” (relación de cambio) se hace interrumpiendo momentáneamente la transmisión de potencia (por medio de un embrague), permitiendo así el engrane “suave” de distintas ruedas en la caja.

Sean  $r_1, r_2, \dots, r_n$  las posibles relaciones de cambio. La curva de potencia del motor, en función de su número de vueltas, y en el rango de funcionamiento del mismo ( $\omega_1, \omega_2$ ), se muestra en la Fig 9.10. La representación de esta curva en función del número de vueltas de las ruedas se muestra en la Figura 9.11. Cada uno de los tramos corresponde a la selección de una relación de cambio determinada. El rango de velocidad del vehículo en cada “marcha” es:

$$\begin{aligned} v_1^i &= r_d r_i \omega_1 R \\ v_2^i &= r_d r_i \omega_2 R \end{aligned}$$

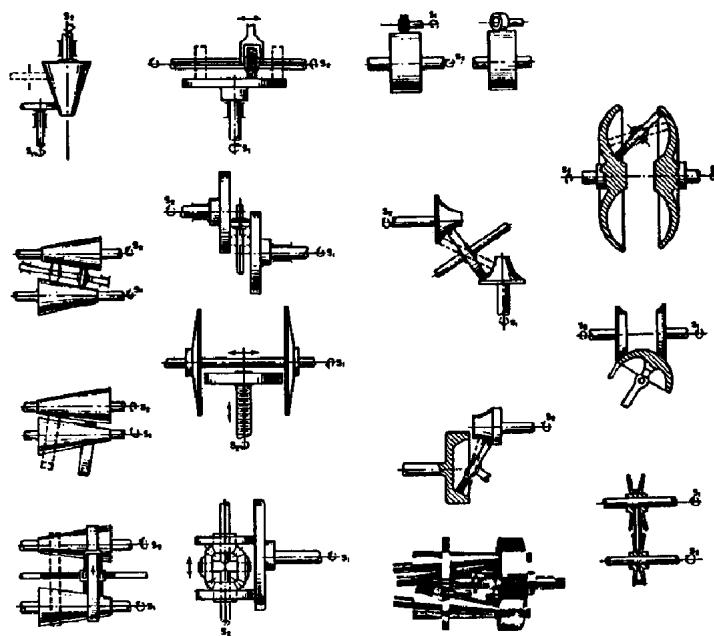


Figura 9.8: Diversos dispositivos de transmisión continuamente variable.

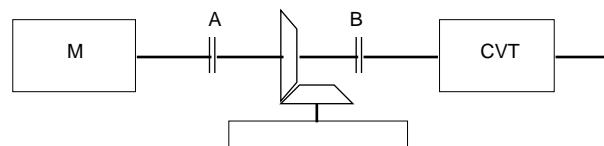


Figura 9.9: Transmisión con acumulador de energía.

donde  $v_1^i$  y  $v_2^i$  son las velocidades del vehículo en los extremos del rango de funcionamiento del motor para la relación de cambio  $r_i$ . Por otra parte  $r_d$  es la reducción fija en el diferencial, y  $R$  es el radio de las ruedas.

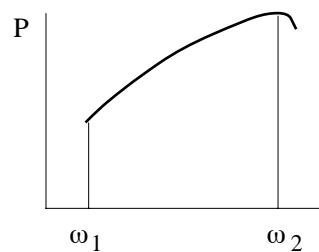


Figura 9.10: Curva de potencia en función de las revoluciones del motor.

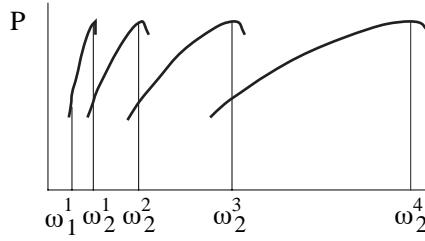


Figura 9.11: Curva de potencia en función de las revoluciones a la salida de la caja de cambios.

Si las relaciones de cambio se eligen de manera que exista solape entre los tramos, se tiene que siempre se puede encontrar una marcha que permite al motor funcionar en un rango aceptable de vueltas. La curva a trozos es una aproximación suficientemente buena a la curva ideal de potencia constante.

La determinación de las relaciones de cambio en una caja discreta se efectúa como sigue. La relación mínima ( $r_1$ ) se puede fijar por el par máximo que se requiere en la rueda para remontar una pendiente determinada con una aceleración dada. Para remontar una pendiente de ángulo  $\theta$  con aceleración  $\gamma$ , se requiere un par total en las ruedas motrices ( $T_r$ ) igual a:

$$T_r = RMg(\rho \cos \theta + \sin \theta + \gamma/g)$$

donde  $M$  es la masa del vehículo, y  $\rho$  el coeficiente de resistencia a la rodadura. Debe hacerse la comprobación previa de si el reparto de cargas y el coeficiente de fricción permiten remontar esta pendiente. La relación de transmisión total (desde el motor a las ruedas) necesaria para conseguir el par anterior es:

$$r_t = \frac{T_m}{T_r}$$

donde  $T_m$  es el máximo par motor. Por tanto, la relación correspondiente a primera es:

$$r_1 = \frac{T_m}{r_d T_r}$$

Cada relación sucesiva se puede determinar por la regla geométrica, de esta manera con cada marcha se barre el mismo rango de vueltas del motor (Fig. 9.12). El rango de velocidades de la rueda en primera es:

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= r_d r_1 \omega_1 \\ \omega_2^1 &= r_d r_1 \omega_2 \end{aligned}$$

donde  $\omega_i^j$  representa la velocidad de la rueda en el extremo  $i$  del intervalo ( $i = 1, 2$ ) para la marcha  $j$ . Si se quiere que la marcha  $r_{i+1}$  cubra el mismo rango de velocidades del motor que la anterior, se debe cumplir que:

$$r_d r_{i+1} \omega_1 = \omega_1^{i+1} = \omega_2^i = r_d r_i \omega_2$$

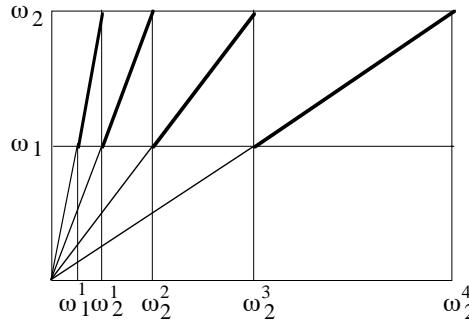


Figura 9.12: Revoluciones a la entrada y salida de la caja de cambios para cada una de las marchas.

con lo que las relaciones están ligadas por la siguiente fórmula recurrente:

$$r_{i+1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} r_i$$

El número de marchas se determina teniendo en cuenta la velocidad máxima del vehículo. En realidad, la relación máxima ( $r_n$ ) más correcta es aquella que hace que la curva de potencia resistente ( $P_{\text{res}}$ ) corte a la curva de potencia del motor en su punto máximo ( $P_{\text{max}}$ , Fig. 9.13). En este caso:

$$P_{\text{max}} = P_{\text{res}} = \rho M g v + c_D \left( \frac{1}{2} \rho_a v^2 \right) A v$$

donde  $c_D$  es el coeficiente de resistencia aerodinámica,  $\rho_a$  la densidad del aire y  $A$  el área frontal. De la resolución de la ecuación anterior se obtiene la velocidad máxima ( $v_{\text{max}}$ ) y por tanto la relación más alta:

$$r_n = \frac{v_{\text{max}}}{R \omega_m r_d}$$

donde  $\omega_m$  corresponde a la velocidad del motor en régimen de potencia máxima.

La caja Allison HT70 emplea la regla geométrica, las relaciones son: 1º–0.33, 2º–0.44, 3º–0.58, 4º–0.76, 5º–1, 6º–1.3. La quinta en esta caja coincide con la “directa”. En quinta, la salida de la caja de cambios gira a la misma velocidad que el motor, la caja de cambios transmite el par directamente sin hacer uso de engranajes. La sexta es una multiplicación de la velocidad del motor, este tipo de relaciones se conocen como “overdrives” o “superdirectas”. Las relaciones superiores a la unidad se pueden emplear para aumentar la velocidad máxima o para mejorar el rendimiento (consumo específico). En el ejemplo de la Figura 9.13 se observa que con una relación de un 20% overdrive se consigue aumentar la velocidad máxima, por otra parte, con un 40% overdrive, la velocidad máxima es menor pero el consumo disminuye. La elección de una u otra relación depende del tipo de vehículo y del uso para el que esté pensado.

Las relaciones de cambio se pueden modificar respecto de las obtenidas con el método geométrico para mejorar las prestaciones en distintos rangos. Así, la primera se puede determinar para mejorar el arranque desde parado, la segunda y tercera para permitir adelantamientos y la cuarta o quinta para mejorar el consumo.

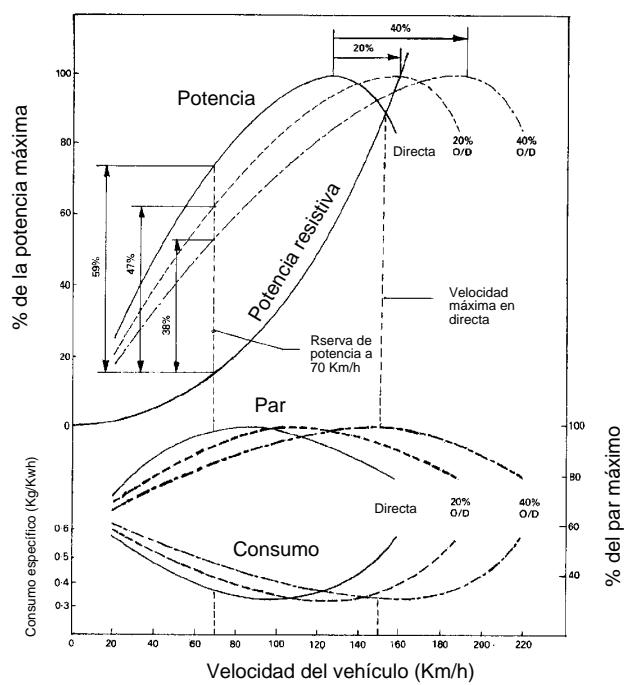


Figura 9.13: Determinación de la relación más alta.

## 9.4 Cajas de Cambio Simplificadas

### 9.4.1 Caja de Trenes Ordinarios

El principio de funcionamiento de las cajas de cambio usadas en la actualidad puede estudiarse sobre cajas simplificadas de dos velocidades. En la Figura 9.14 se muestra una caja manual con tres ejes, un selector de velocidades y cuatro ruedas dentadas que engranan dos a dos permanentemente. Los ejes de entrada y de salida están sobre la misma recta. El eje de entrada es solidario con la rueda 1. Entre este eje y el de salida existe un rodamiento de manera que sus velocidades pueden ser distintas. La rueda 4 está montada sobre el eje de salida mediante un rodamiento, de esta manera la velocidad de la rueda y el eje no tienen que coincidir necesariamente. El eje auxiliar es solidario con las ruedas 2 y 3. El embrague de perro está montado sobre el eje de salida de manera que gira con éste y, a la vez, puede deslizarse sobre el mismo.

La primera marcha se obtiene desplazando el selector (embrague de perro o perro) hacia la derecha, el eje de salida se hace solidario con la rueda 4. En esta situación, la transmisión de potencia se hace en dos pasos (a través de dos engranajes): el 1-2 y el 3-4. Puesto que el eje de entrada se mueve con la rueda 1 y el de salida con la 4, se tiene una relación de transmisión de valor:

$$r_1 = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$$

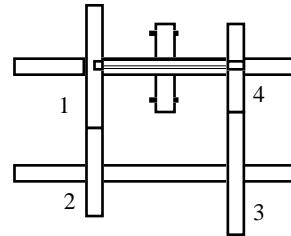


Figura 9.14: Caja de cambio de trenes ordinarios de dos velocidades.

La segunda marcha se obtiene desplazando el perro hacia la izquierda, esto es, desembragando la rueda 4 del eje de salida y embragando la 1. En esta posición la potencia se transmite directamente del eje de entrada al eje de salida. La rueda 1 sigue arrastrando en su movimiento al eje 2-3 y a la rueda 4, pero este movimiento es independiente del eje de salida, los dientes de los engranajes están prácticamente descargados y la transmisión de potencia tiene un rendimiento próximo a la unidad. Esta marcha se denomina “directa”, la relación de transmisión es:

$$r_2 = 1$$

### 9.4.2 Caja de Trenes Epicicloidales

En el caso de cajas automáticas, el principio de funcionamiento es el que se describe a continuación. La nomenclatura empleada es la dada en el Apéndice B. En la Figura 9.15 se han unido dos trenes epicicloidales a través de dos ligaduras:

$$\omega_{p1} = \omega_{p2}$$

$$\omega_{s1} = \omega_{c2}$$

Las ecuaciones de Willis de cada tren se escriben:

$$\begin{aligned} \mu_1 \omega_{p2} + (1 - \mu_1) \omega_{c2} &= \omega_{c1} \\ \mu_2 \omega_{p2} + (1 - \mu_2) \omega_{s2} &= \omega_{c2} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Con dos frenos independientes se puede detener la carcasa 1 dejando la 2 libre, o frenar la 2 y dejar la 1 libre. En cualquiera de los dos casos la relación de transmisión está determinada (el segundo grado de libertad del sistema es la velocidad de la entrada  $\omega_{p2}$ ). La primera relación ( $\omega_{c1} = 0$ ) es:

$$r_1 = \frac{\mu + \mu_2 - \mu_1 \mu_2}{\mu + \mu_2 - \mu_1 \mu_2 - 1}$$

mientras que frenando la segunda carcasa ( $\omega_{c2} = 0$ ) se deja inactivo el primer tren epicycloidal. La relación de transmisión es ahora:

$$r_2 = \frac{\mu_2}{\mu_2 - 1}$$

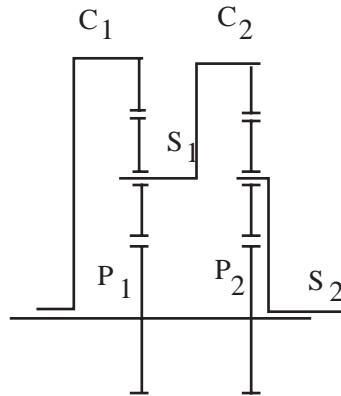


Figura 9.15: Caja de cambio de trenes epicicloidales de dos velocidades.

La sencillez de selección de marcha hace que este sistema sea apropiado para cajas automáticas. En efecto, una caja como la descrita anteriormente puede accionarse mediante la variación de presión en circuitos hidráulicos apropiados. No es necesario disponer sistemas que permitan el desplazamiento de partes móviles. En el caso simplificado que se ha comentado, basta con dos frenos de discos múltiples. Para accionarlos se incrementa la presión hidráulica que comprime los discos móviles contra los fijos. En una caja comercial se pueden seleccionar todas las marchas mediante frenos y embragues de discos.

## 9.5 Cajas de Cambio Manuales

### 9.5.1 Embragues de Fricción

La mayoría de las cajas de cambio manuales están conectadas al motor a través de un embrague de fricción que cumple una doble misión: permitir que el vehículo se ponga en movimiento partiendo del reposo y suavizar el cambio entre dos relaciones consecutivas.

Los motores de combustión interna no pueden funcionar por debajo de un determinado número de vueltas porque, a esa velocidad, la energía aportada por los cilindros que están en carrera efectiva (unida a la energía cinética del motor y su volante de inercia) no es suficiente para vencer las resistencias mecánicas, y compensar los trabajos de bombeo y compresión del resto de cilindros. Puesto que, por el contrario, el vehículo debe funcionar en un rango de velocidades que incluya el reposo, se necesita un dispositivo capaz de transmitir el giro de manera progresiva. El embrague de fricción soluciona este problema. En realidad el embrague cubre el salto de relaciones de transmisión desde el valor cero (punto muerto) hasta el valor  $r_1$  (primera marcha con el embrague totalmente cerrado, sin patinaje), al igual que lo hace entre cualquiera otras dos relaciones consecutivas.

Cuando se efectúa un cambio entre marchas consecutivas, todo el motor (y la transmisión hasta el piñón de salida de la caja de cambios) debe frenarse o acelerarse para girar al número de vueltas determinado por la velocidad del vehículo y la nueva relación de transmisión. Los conos sincronizadores pueden, a veces, frenar o acelerar toda esta masa (cambio sin embrague), pero, sometidos a este trabajo, sufren un desgaste importante. Es mucho más razonable desconectar el motor (y el volante) de la caja de cambios para que, de esta manera, los conos frenen o aceleren sólo los correspondientes engranajes y ejes de la caja. Una vez seleccionada la nueva relación se procede a conectar el embrague que, por fricción, frena o acelera el motor para que se reestablezca el paso de potencia en alguno de los dos sentidos (aceleración o reducción).

La entrada al embrague suele ser el volante de inercia. Éste es el encargado de suavizar las oscilaciones del par que proviene del cigüeñal (Fig. 9.16). A este volante va unido una pinza anular que, a través de un muelle (en general de diafragma), ejerce una fuerza normal sobre el disco conducido (recubierto de material de fricción).

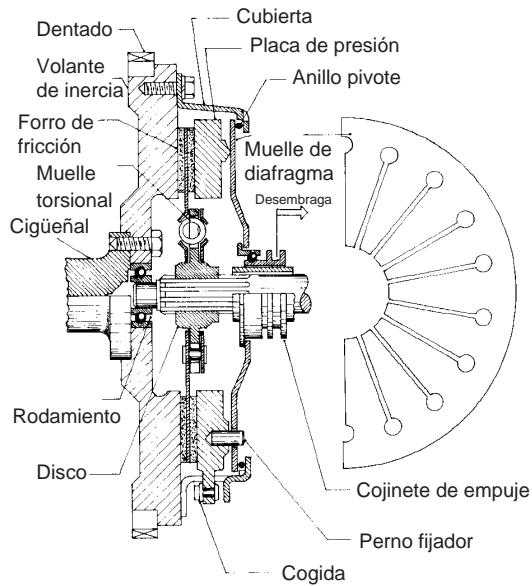


Figura 9.16: Embrague de fricción.

El Disco Conducido debe tener un momento de inercia bajo para no sobrecargar los

conos de sincronización, sin embargo, el par máximo que el embrague puede transmitir aumenta considerablemente al aumentar el diámetro de los discos para un mismo coeficiente de fricción. Un método eficaz para aumentar la capacidad de carga es aumentar el número de discos de embrague (superficies de fricción), el par máximo es proporcional al número de estas superficies. El (los) disco(s) conducidos transmiten el par al eje de entrada a la caja de cambios pero, antes, se encargan de amortiguar las vibraciones torsionales. Esto se consigue con un sistema basado en muelles circunferenciales y arandelas de fricción (Fig. 9.17). Las fuerzas circunferenciales se transmiten de los discos tapadera a los muelles y, de aquí, al disco central que acoge al eje chaveteado. La fricción entre el disco central y los de tapadera se efectúa a través de la arandelas de fricción comprimidas por el muelle de disco Belleville.

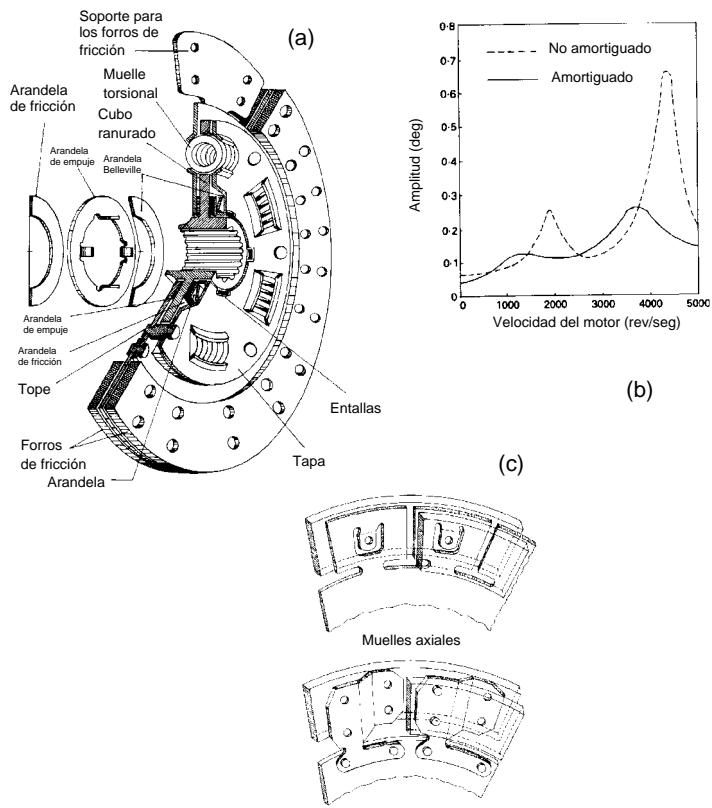


Figura 9.17: Amortiguador torsional.

El conjunto de muelles y amortiguadores de fricción constituye un sistema que suaviza las vibraciones torsionales antes de pasar a la caja de cambios, donde afectarían considerablemente al funcionamiento de los engranajes (sobrecargas y transmisión de vibraciones molestas). La amplitud de la vibración torsional, en función de la velocidad del motor, se muestra en la Figura 9.17b para los casos amortiguado y directo, la mejora es sustancial.

La entrada en carga se suaviza si se dota a los discos de embrague de una cierta flexibilidad axial. La Figura 9.17c muestra dos dispositivos distintos para unir las pastillas de fricción al disco con elementos flexibles.

Los materiales de fricción más usados, hasta el momento, son los basados en fibra de amianto embebida en una matriz de resinas. La temperatura máxima de trabajo de estos materiales está en torno a 260. Hasta esta temperatura se tienen coeficientes de fricción entre 0.32 y 0.38, así como una duración (vida) razonables. El material sufrirá daños de consideración si se usa frecuentemente a temperaturas superiores a unos 360. Las aramidas (fibras orgánicas patentadas por DuPont bajo el nombre de Kevlar) presentan mejores propiedades que el amianto. En concreto, las temperaturas de funcionamiento suelen ser mayores (en torno a los 425), la resistencia por unidad de peso es muy superior, de manera que el momento de inercia del disco disminuye. Los materiales cerámicos soportan mayores temperaturas pero tienen el problema, aún no resuelto, de la fragilidad.

El muelle que proporciona la fuerza axial para hacer solidario el volante de inercia con el eje de entrada a la caja de cambios suele ser un muelle de diafragma (Fig. 9.16). Con este dispositivo se puede amplificar la fuerza del muelle acercando las circunferencias sobre las que pivota, esto es, “haciendo más palanca” sobre las superficies de fricción. El círculo interior del diafragma se apoya sobre un cojinete de empuje que hace compatible el giro del diafragma con la inmovilidad del sistema de accionamiento.

Existen diversos sistemas de accionamiento del embrague. Uno de los más simples es un pedal y un cable (a tracción) envuelto en una camisa (a compresión) (Fig. 9.18a). El dispositivo puede incluir un pequeño muelle y una rueda con dientes de sierra para mantener el recorrido del pedal constante, independiente del desgaste de las pastillas y/o de elongaciones permanentes del cable. Se elimina así la carrera no activa del pedal. El accionamiento puede ser hidráulico (Fig. 9.18b), en cuyo caso un cilindro maestro envía aceite a presión a un cilíndrico esclavo que mueve el diafragma. Es posible colocar un muelle precomprimido en el pedal de manera que, una vez superado el punto muerto, ejerza una fuerza que descargue al conductor.

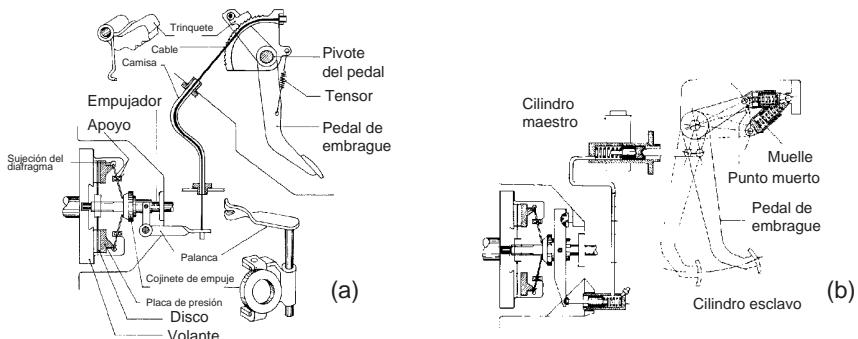


Figura 9.18: Sistemas de accionamiento de embragues.

En cajas automáticas se usan embragues con actuadores hidráulicos para fijar las coronas y/o portasatélites correspondientes a cada marcha. En la Figura 9.19 se muestran dos de estos embragues, uno con muelle de diafragma, y el otro con muelle helicoidal. Uno de los problemas de este tipo de accionamiento es la transmisión de fluido a presión a través de ejes que giran. Es necesario disponer retenes de Nylon asentados sobre acanaladuras apropiadas.

En los embragues centrífugos, la fuerza que mantiene los discos en contacto está

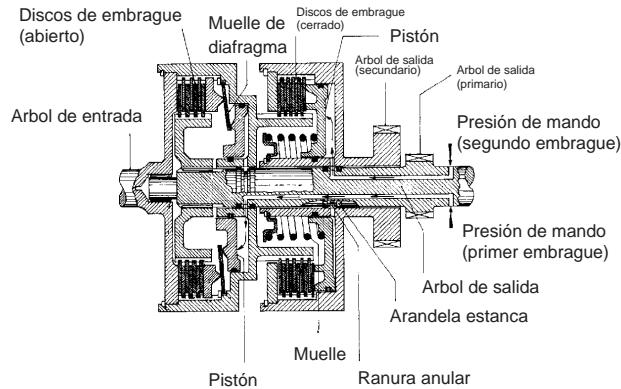


Figura 9.19: Embragues utilizados en cajas automáticas.

proporcionada (o sólo aumentada en el caso de los embragues semi-centrífugos) por unas masas que giran con el volante de inercia y que tienen su centro de gravedad desplazado respecto del eje de pivotamiento (Fig. 9.20). A medida que aumenta la velocidad de giro del motor, aumenta la fuerza de cierre del embrague. Este tipo de accionamiento se ha usado en algunos automóviles del pasado (Citroen 2CV). Se permite con esto hacer una puesta en marcha del vehículo algo más cómoda. Con la primera marcha seleccionada se puede soltar el embrague con el coche parado. Al acelerar el motor se termina de cerrar el embrague y el vehículo se pone en movimiento. En la actualidad, el accionamiento centrífugo es muy utilizado en motocicletas de poca potencia. Se elimina así la necesidad de un mando para el embrague controlado por el conductor.

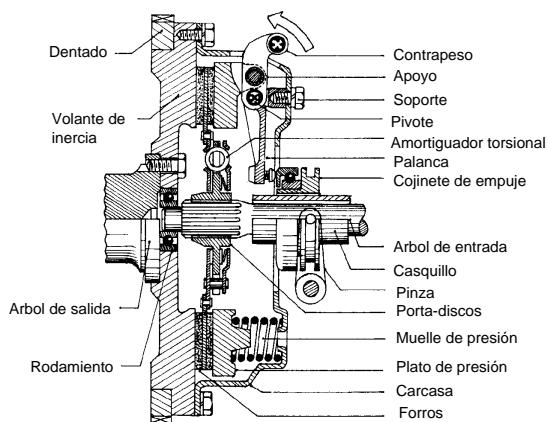


Figura 9.20: Embrague semi-centrífugo.

### 9.5.2 Cajas Manuales

La Fig. 9.21 muestra una caja de cinco velocidades y dos pasos. Las distintas marchas se seleccionan desplazando el embrague de perro correspondiente en la dirección indicada en la figura. La caja es de dos pasos porque la potencia se transmite a través de dos engranajes “en serie”, esto es, toda la potencia pasa por uno de los engranajes y después por el otro. En el caso de una caja de cinco velocidades y un paso (Fig. 9.22) el número de engranajes activos se reduce de dos a uno y, por tanto, las pérdidas por fricción se reducen considerablemente.

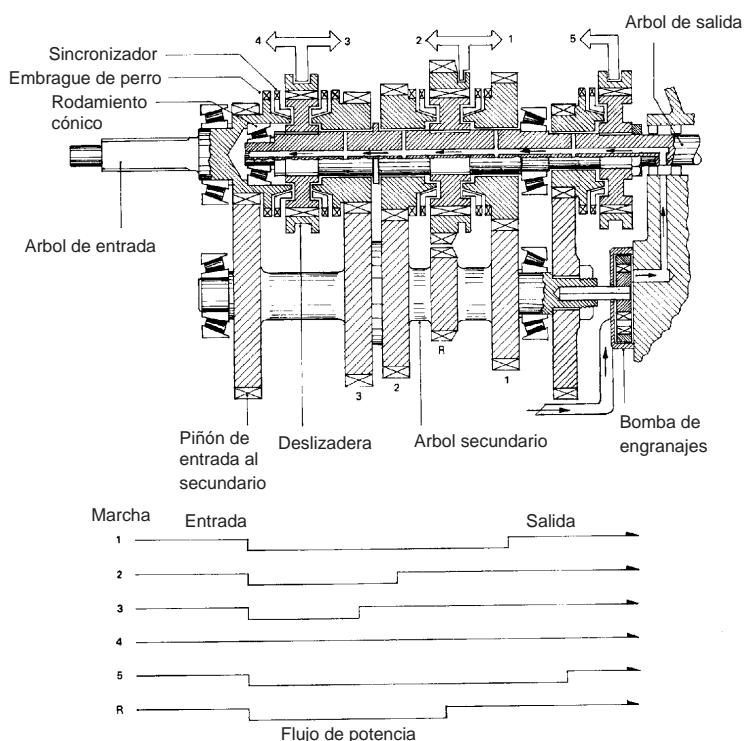


Figura 9.21: Caja manual de cinco velocidades (dos pasos).

La lubricación de los distintos engranajes de las cajas de cambio se hace llenando la caja de aceite hasta un determinado nivel. Este nivel no suele ser muy alto, de manera que son las propias ruedas dentadas las que remueven el aceite y generan una nube de gotas en suspensión que lubrican los distintos contactos. No es conveniente llenar la caja con más aceite del recomendado, lo único que se consigue con ello es aumentar las pérdidas por bombeo. Esto puede impedirse con una localización apropiada del tapón de llenado. Los asientos de los rodamientos o cojinetes de las ruedas pueden lubricarse mediante pequeños conductos que transportan aceite desde la base de la caja hasta el eje en cuestión. La bomba utilizada para impulsar el aceite en este caso es una típica bomba de engranaje helicoidal.

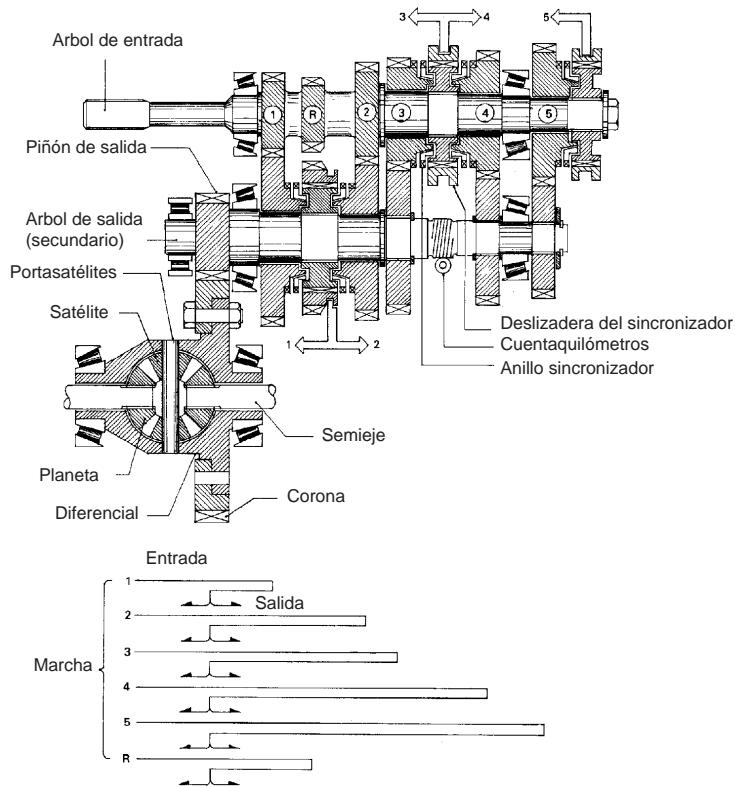


Figura 9.22: Caja manual de cinco velocidades (un paso).

### 9.5.3 Sincronizadores

En la Figura 9.23 se muestra uno de los posibles dispositivos sincronizadores para, como se ha dicho, igualar las velocidades de la rueda correspondiente a la marcha en cuestión y el eje sobre la que embraga. Al empujar el perro en una dirección, los conos enfrentados entran en contacto y, por fricción, comienzan a igualar sus velocidades. Cuando estas son iguales entran en contacto los “dientes” de las ruedas a embragar, estos están achaflanados en los extremos para permitir la corrección del desfase.

En la Figura 9.24 se muestra un dispositivo sincronizador con una rueda auxiliar que dificulta el acoplamiento del embrague cuando las velocidades son desiguales. Al desplazar la rueda móvil con chaveteado interior, se hace una ligera presión sobre los conos gracias a los muelles de anillo y a las lengetas con joroba central. Esta fricción hace que la rueda de seguridad se desfase de la móvil, las chavetas correspondientes se desfasan y entran en contacto a través de las secciones biseladas de los extremos. La fuerza axial que comprime los conos macho y hembra es ahora sustancialmente mayor, sus velocidades se sincronizan. Cuando esto ocurre, el par de frenado sobre la rueda de seguridad es nulo, ahora las tres ruedas pueden ponerse en fase y acoplar.

En definitiva, el anillo auxiliar impide el acoplamiento del embrague de perro mientras exista fuerza de fricción (diferencia de velocidades) entre los conos macho y hembra. Sólo cuando la fuerza de fricción es baja (igual velocidad), puede el muelle (Fig. 9.24) corregir

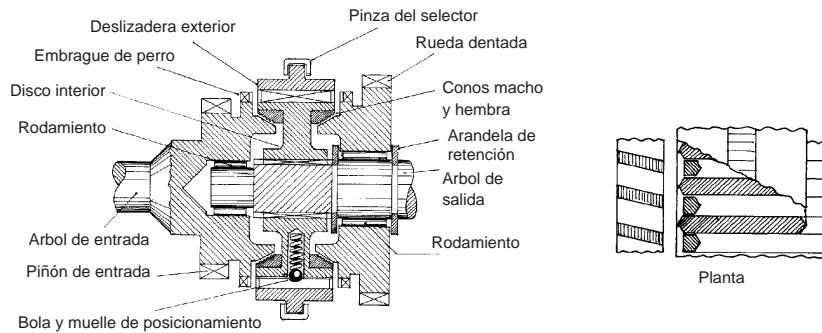


Figura 9.23: Conos de sincronización.

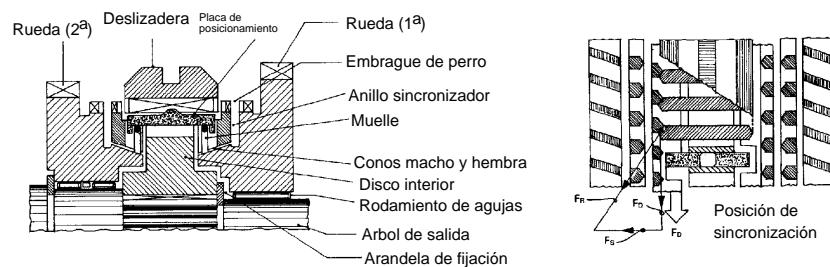


Figura 9.24: Sincronizador con rueda de “seguridad”.

el desfase entre la deslizadera y el anillo auxiliar, permitiendo así el paso de los dientes del embrague de perro para embragar la rueda en cuestión.

#### 9.5.4 Accionamiento manual

El accionamiento de los distintos embragues de perro puede hacerse manualmente por “control remoto” desde una palanca accionada por el conductor. El movimiento de la palanca consta de dos pasos: uno para seleccionar la pinza que se va a desplazar y otro para desplazarla en uno u otro sentido. En la Figura 9.25a se muestra un dispositivo con una sola barra de control. El movimiento de la palanca a derecha o izquierda hace que el selector de pinza cambie de posición. Tirando hacia la izquierda de la palanca se accede a la pinza de las marchas 1<sup>a</sup> y 2<sup>a</sup>, forzando aún más este movimiento se accede a la pinza de la marcha atrás. En posición central se está en disposición de conectar las marchas 3<sup>a</sup> y 4<sup>a</sup>. Con la palanca desplazada hacia la derecha se puede conectar la quinta marcha. En cualquiera de las posiciones se puede conectar la marcha en cuestión desplazando la palanca hacia adelante o hacia atrás. En la Fig. 9.25b se muestra un mecanismo análogo al anterior con dos barras de control en lugar de una.

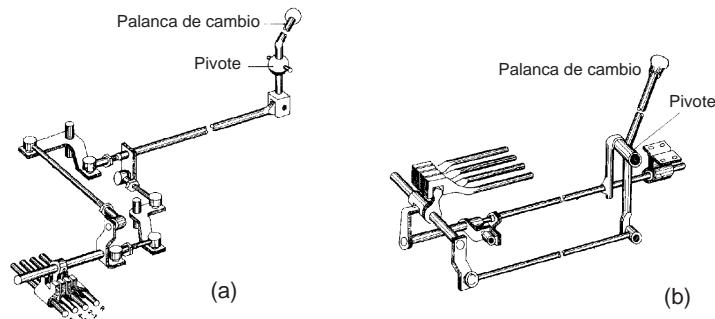


Figura 9.25: Mecanismo para seleccionar y cambiar la marcha.

### 9.5.5 Reductoras

Para aumentar el número de relaciones de transmisión en vehículos pesados se conectan dos cajas en serie. Una de ellas suele tener dos relaciones para doblar el número de marchas en la caja principal. El mecanismo suele ir dispuesto en la misma carcasa. Existen dos tipos de diseño. En el primero, el espaciado de las marchas de la caja principal es amplio y cubre todo el rango de relaciones. La reducción de la caja secundaria es tal que las nuevas relaciones están situadas entre cada dos de las originales. En el segundo, el espaciado de relaciones en la caja principal es corto y sólo barre un rango limitado de relaciones. La reducción en la caja secundaria es tal que desplaza todas las relaciones a un rango distinto. En la Figura 9.26 se muestra un ejemplo de caja del primer tipo y en la Fig. 9.27 del segundo. El resultado en ambos casos es el mismo y la única diferencia es la secuencia de acciones que debe tomar el conductor para elegir una marcha u otra. El tipo de “rango” es más cómodo puesto que el conductor va cambiando como en una caja normal, al llegar a la marcha más larga, cambia de rango y sigue subiendo. En el tipo divisor (“medias marchas”), el conductor tiene que ir variando las marchas a la vez que el divisor en todos los cambios. Es frecuente encontrar los dos tipos de multiplicadores en cajas de vehículos industriales.

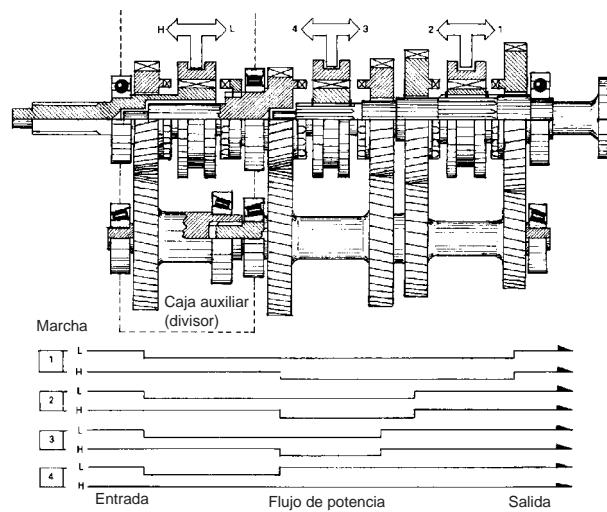


Figura 9.26: Divisor de “medias marchas”.

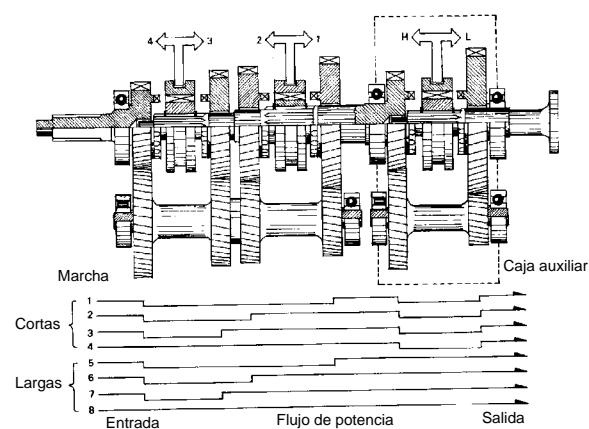


Figura 9.27: Divisor de “rango”.

## 9.6 Cajas de Cambio Automáticas

La mayoría de las cajas automáticas están conectadas al motor a través de un acoplamiento hidráulico que ejerce las mismas funciones que el embrague de fricción en las cajas manuales, esto es, puentejar la relación de transmisión cero (vehículo parado, motor en marcha) con la relación correspondiente a 1<sup>a</sup> y, por otra parte, permitir los cambios entre marchas consecutivas. En este último caso, el acoplamiento hidráulico puentea la relación de transmisión entre los dos valores discretos consecutivos de la caja de cambios. En el caso de los acoplamientos hidráulicos la transición es suave y no necesita ser controlada por el conductor a través de un pedal de embrague. Por otra parte, la masa del acoplamiento suele ser suficiente como para no necesitar volante de inercia.

En Estados Unidos el 80% de las transmisiones son automáticas mientras que en Europa esta cifra es muy inferior (15% en Alemania, 23% en Inglaterra, 2.5% en Francia, y sólo el 1% en Italia). Una de las razones es la imagen negativa de estas transmisiones: respuesta lenta y alto consumo.

### 9.6.1 Acoplamientos Hidráulicos y Convertidores de Par

El motor mueve una bomba hidráulica que comunica energía cinética a un fluido, esta energía se transfiere a una turbina conectada a la caja de cambios. El conjunto bomba-turbina se denomina acoplamiento hidráulico. El dispositivo más empleado consiste en enfrentar directamente los álabes de la bomba y la turbina en una carcasa tórica. El recorrido de circulación del fluido está determinado por la diferencia de fuerza centrífuga entre distintos puntos del toro. En la Fig. 9.28a se muestra un esquema de un acoplamiento sencillo. La bomba es solidaria al volante de inercia, el eje de la turbina está conectado a la caja de cambios donde hace entrega de la potencia. En este modelo, la bomba tiene un núcleo en forma de carcasa tórica que facilita el guiado del fluido.

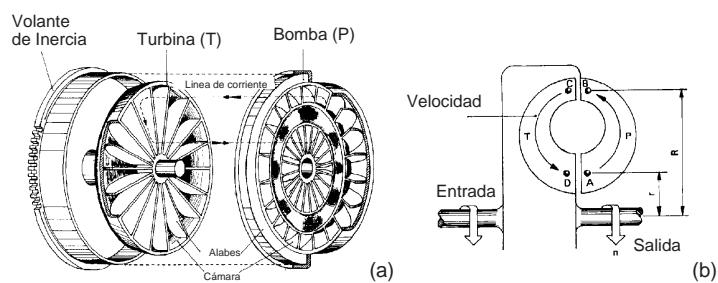


Figura 9.28: Acoplamiento hidráulico.

En la Figura 9.28b se muestra una sección del acoplamiento. Una partícula fluida situada en el punto A se encuentra sometida a una fuerza centrífuga que la impulsa en la dirección del punto B, aquí el radio de giro es mayor, de manera que la energía cinética de la partícula ha aumentado: la bomba le ha comunicado energía cinética. En B la partícula es impelida por la bomba en la dirección de C, donde los álabes de la turbina la obligan a cambiar su dirección. Su cantidad de movimiento se modifica y ejerce una fuerza sobre los álabes de la turbina. La diferencia de energías a la entrada (C) y salida (D) corresponde

a la energía entregada a la turbina. El par transmitido se puede aproximar por:

$$T_p = \lambda \rho D^5 \omega^2$$

donde  $\lambda$  es un factor de potencia que depende del diseño fluidodinámico del acoplamiento,  $\rho$  es la densidad del aceite,  $D$  la dimensión característica del dispositivo, y  $\omega$  la velocidad angular.

La expresión anterior indica que se deben usar aceites con elevada densidad ( $\rho$ ) para aumentar la capacidad de transmisión de par. Por otra parte, la viscosidad del aceite debe ser reducida para intentar disminuir las pérdidas por “fricción”.

El ángulo de ataque (entre el fluido y los álabes de la turbina) es función de la velocidad relativa y de la inclinación de dichos álabes. En el caso de la Figura 9.28 (álabes radiales planos), el ángulo de ataque óptimo es próximo a los  $90^\circ$ , esto es, la velocidad relativa es próxima a la unidad.

El rendimiento ( $\eta$ ) del acoplamiento se define como:

$$\eta = -\frac{T_t \omega_t}{T_p \omega_p}$$

donde  $T$  representa par y  $\omega$  velocidad, los subíndices  $t$  y  $p$  hacen referencia a turbina y bomba, respectivamente. La expresión anterior adopta las siguientes formas:

$$\eta = \mu \nu = \mu (1 - s)$$

donde  $\mu$  es el factor de conversión de par ( $\mu = -T_t/T_p$ ),  $\nu$  es la relación de velocidades ( $\nu = \omega_t/\omega_p$ ), y  $s$  es el “deslizamiento” relativo entre bomba y turbina ( $s = (\omega_p - \omega_t)/\omega_p = 1 - \nu$ ).

En un acoplamiento como el descrito en el párrafo anterior se tiene que, por equilibrio,  $T_t = -T_p$ , con lo que el rendimiento es igual a la relación de velocidades:  $\eta = \nu$ . Esto es, el rendimiento es nulo cuando la turbina está parada y crece linealmente con la relación de velocidades, llegando a valores muy altos (0.95 y superiores) cuando el deslizamiento  $s$  es muy pequeño. Afortunadamente, la relación de velocidades va a ser próxima a la unidad en las condiciones normales de funcionamiento. Sólo en el arranque, y en pequeños intervalos de tiempo después de cada cambio de marcha, se tendrán valores altos del deslizamiento. No obstante, este es uno de los inconvenientes de la transmisión automática frente a la manual, se penaliza el consumo debido a las pérdidas en el acoplamiento hidráulico.

La bomba y turbina tienen distinto número de álabes para evitar el enfrentamiento simultáneo de todos ellos. De ocurrir esto, se producirían vibraciones indeseables en el acoplamiento. Por otra parte, la sección tórica de guiado se suprimió primero en la turbina y, en acoplamientos actuales, esta sección se ha suprimido también en la bomba por las razones que se explican a continuación. Las secciones de guiado hacen que el fluido esté bien dirigido incluso a baja velocidad. Esto implica que se transmite mucho par con el vehículo parado, el conductor debe accionar el freno con bastante fuerza. A alta velocidad el fluido está bien dirigido en cualquier caso por la fuerza centrífuga, de manera que la supresión de la sección tórica no afecta a la transmisión de par en este rango de velocidades.

El equilibrio de pares en los acoplamientos descritos anteriormente obliga a que el par transmitido por el motor a la bomba sea igual al que la turbina transmite a la caja de cambios. Para aumentar el par de salida se interpone un estator en el retorno de la turbina a la bomba (Fig. 9.29), el dispositivo resultante se conoce como convertidor de

par. Una partícula fluida es impelida por la bomba hacia la turbina donde es reorientada hacia los álabes del estator, aquí vuelve a cambiar su dirección para reiniciar el ciclo a la entrada de la bomba. En la Figura 9.29 se muestra el recorrido de una tal partícula. A velocidades normales de funcionamiento, el cambio de dirección de la partícula en la bomba y el estator es tal que los pares sobre sus ejes se suman para incrementar el par de salida en la turbina:

$$T_p + T_s = T_t$$

donde  $T_s$  es el par de reacción en el estator.

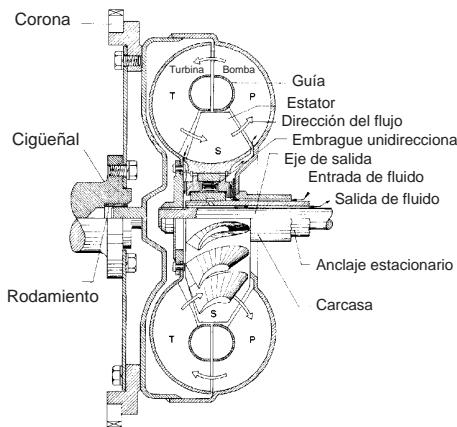


Figura 9.29: Convertidor de par.

Cuando la velocidad relativa crece, el par en el estator disminuye llegando a anularse en el punto que se conoce como de acoplamiento (Fig. 9.31). A partir de esta velocidad relativa se tendría un par de salida inferior al de entrada, los álabes del estator estarían cargados en sentido contrario, el estator estaría estorbando. Es por esta razón que éste, el estator, se monta sobre un embrague unidireccional, de manera que cuando está cargado en sentido contrario se deja girar libremente. En el punto de acoplamiento se igualan los pares en bomba y turbina y el rendimiento pasa a crecer con la velocidad relativa como ocurre en acoplamientos hidráulicos estándar.

La Figura 9.30a muestra el deslizamiento en función de la velocidad de la bomba para un acoplamiento dado. Puede verse que un pequeño incremento de la velocidad de la bomba pone rápidamente a la turbina a girar a la misma velocidad. La Figura 9.30b se refiere a un convertidor de par. Muestra la relación de pares y el rendimiento en función de la velocidad de salida para una velocidad de la bomba dada (2000rpm) .

Para evitar la caída de rendimiento que se produce tras el punto de rendimiento máximo, se puede colocar un embrague de bloqueo que hace solidarias la entrada y salida del acoplamiento a partir de una determinada velocidad (Fig. 9.31). En cajas automáticas es muy común disponer de un embrague que acopla después de la marcha más larga dando la sensación de que se dispone de una relación extra. En estas condiciones el rendimiento del acoplamiento sube a uno y el deslizamiento baja a cero (Fig. 9.31b).

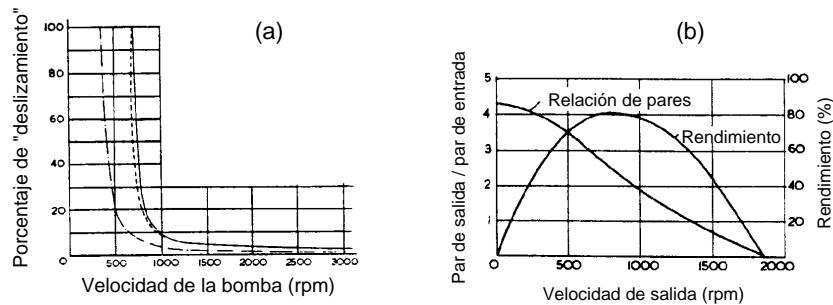


Figura 9.30: (a) Relación de velocidades en un acoplamiento hidráulico. (b) Relación de par y rendimiento en un convertidor de par.

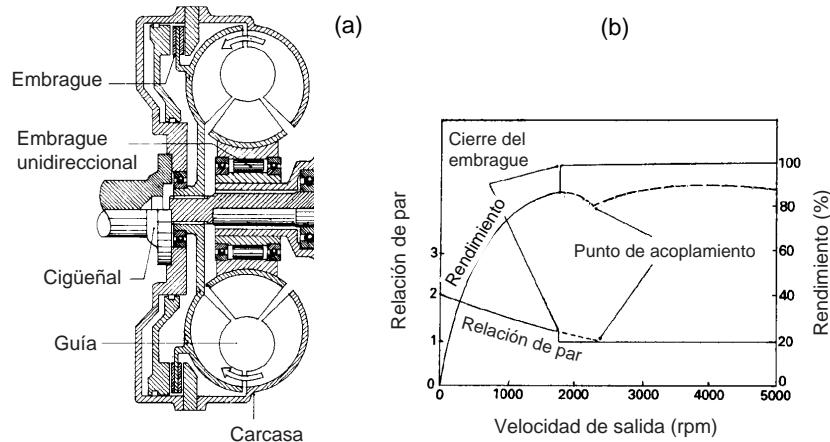


Figura 9.31: Embrague de bloqueo.

### 9.6.2 Embragues Unidireccionales

Los convertidores de par necesitan embragues unidireccionales para conectar el estator al eje fijo. Estos embragues permiten la transmisión de par en una dirección pero no en la contraria, el ejemplo más clásico es el piñón de bicicleta. Las configuraciones usadas para transmisión de potencia se muestran en las Figuras 9.32– 9.34.

Los sistemas de la Figura 9.32 se basan en una serie de rodillos que se mueven en una cavidad de sección convergente. Cuando la velocidad relativa obliga a los rodillos a moverse hacia la garganta de la leva, se genera una fuerza de compresión radial que permite la transmisión de par a través de las tensiones tangenciales de rozamiento entre los rodillos y las paredes de guiado. La leva no es necesaria en la configuración de la Figura 9.33 en la que se interponen calzos montados con un cierto ángulo entre dos ruedas cilíndricas. En una dirección, el movimiento relativo tiende a acuñar los calzos, mientras que en la otra tiende a inclinarlos más y disminuir la fuerza de rozamiento. El inconveniente común a estos sistemas es la necesidad de generación de una carga radial muy importante para la transmisión de un par moderado. Esto obliga a la utilización de mucho material para

absorber estas cargas parásitas con el consiguiente aumento del momento de inercia.

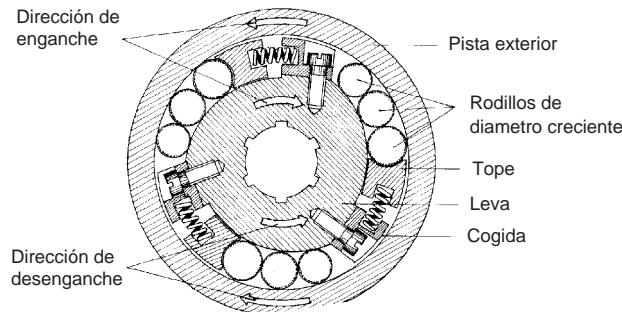


Figura 9.32: Embrague unidireccional de rodillos.

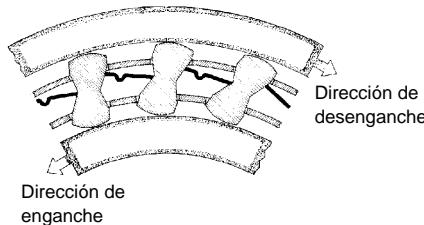


Figura 9.33: Embrague unidireccional de cuñas.

Recientemente se ha patentado un nuevo sistema con el nombre comercial de “Diodo Mecánico (MD)” (compañía Epilogs) capaz de transmitir un par elevado con poca penalización radial y axial, esto es, pocas cargas parásitas en esas direcciones. La configuración es la mostrada en la Figura 9.34. En una dirección, el movimiento relativo de las dos ruedas enfrentadas hace que las lengüetas se escondan en el correspondiente asiento de la rueda conducida. En la dirección contraria, basta una pequeña fuerza elástica para sacar a las lengüetas de sus asientos y acuñarlas contra el rebaje de la rueda conductora. Puesto que el momento de inercia de cada lengüeta respecto de su eje longitudinal es pequeño, se tiene una respuesta rápida del sistema. En la Figura 9.34 se muestra la proporción de fuerza útil a fuerza de compresión sobre el elemento acoplador, así como la capacidad de carga específica (respecto de su peso propio). Puede verse que el MD supera a los sistemas de rodillos y cuñas. Un inconveniente grave de este sistema es, sin embargo, la brusquedad de entrada en carga.

### 9.6.3 Caja Automática y Dispositivos de Control

Un motor de combustión interna que ceda su potencia a las ruedas a través de una caja de cambios automática es una buena aproximación a la planta de potencia ideal (potencia constante para todas las velocidades de funcionamiento del vehículo). El cambio automático consigue mejores resultados en cuanto a suavidad y conveniencia del cambio

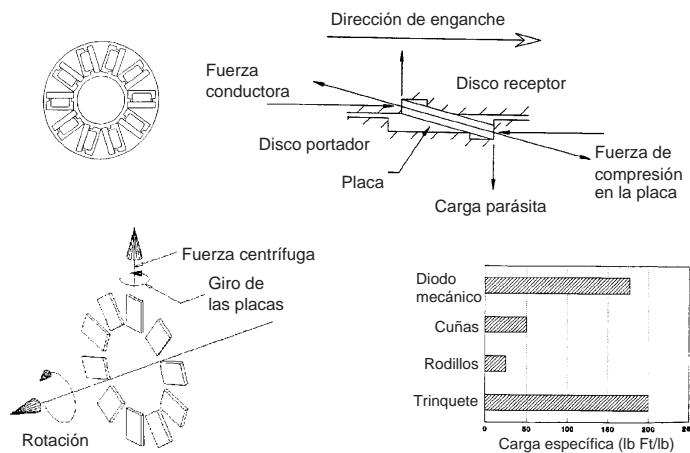


Figura 9.34: Diodo mecánico.

que los que consigue el conductor medio. Sin embargo, es también cierto que es posible encontrar conductores que superen a la máquina en este caso. Esto, unido a la penalización por consumo, hace que las transmisiones automáticas no estén muy extendidas en Europa donde el coste del combustible es muy elevado. En Estados Unidos el coste de combustible no es un problema grave, además la red viaria hace que los cambios sólo sean necesarios para llevar al vehículo desde parado a la velocidad de crucero. Estos dos factores hacen que las transmisiones automáticas sean más populares que las manuales en aquél país.

Es difícil conseguir un sistema totalmente automático que responda correctamente a todas las condiciones de funcionamiento. Las cajas actuales son capaces de tener en cuenta la “carga” sobre el motor para “adelantar” o “atrasar” el cambio. Sin embargo, en situaciones en las que se desea una marcha corta aún con el motor “descargado”, es necesaria la intervención del conductor para impedir que la transmisión pase a una relación más larga.

En la Figura 9.35 se muestra una caja automática de cuatro velocidades y marcha atrás. La potencia se transmite a través de un convertidor de par a una caja con tres trenes epicicloidales conectados mediante enlaces rígidos, embragues y frenos. La caja de control automática se encarga de cerrar o abrir los distintos embragues y frenos de la siguiente lista:

**ODB** freno de la superdirecta ( $4^a$ )

**DC** embrague de las marchas naturales ( $r \leq 1, 1^a, 2^a, 3^a$ )

**2GB** freno de la segunda marcha

**(H+R)C** embrague de las marchas altas ( $3^a$  y  $4^a$ ) y de la marcha atrás

**FC** embrague de las marchas hacia adelante

**(L+R)B** freno de la marcha atrás

Los embragues DC y FC están cerrados en primera (Fig. 9.35). El primer tren epicicloidal está inactivo (no existe movimiento relativo entre sus ruedas) puesto que el embrague DC

está cerrado. La potencia se transmite a la corona del segundo tren que está ligado a un tercero mediante dos ligaduras:  $\omega_{p2} = \omega_{p3}$  y  $\omega_{s2} = \omega_{c3}$  (de nuevo se utiliza la nomenclatura dada en el Apéndice B). En 1<sup>a</sup>, el embrague unidireccional sobre el que está montado  $S_3$  está bloqueado, se obtiene una relación de transmisión en la caja de 0.42. La relación total es variable y depende de la velocidad relativa entre bomba y turbina en las condiciones de funcionamiento específicas.

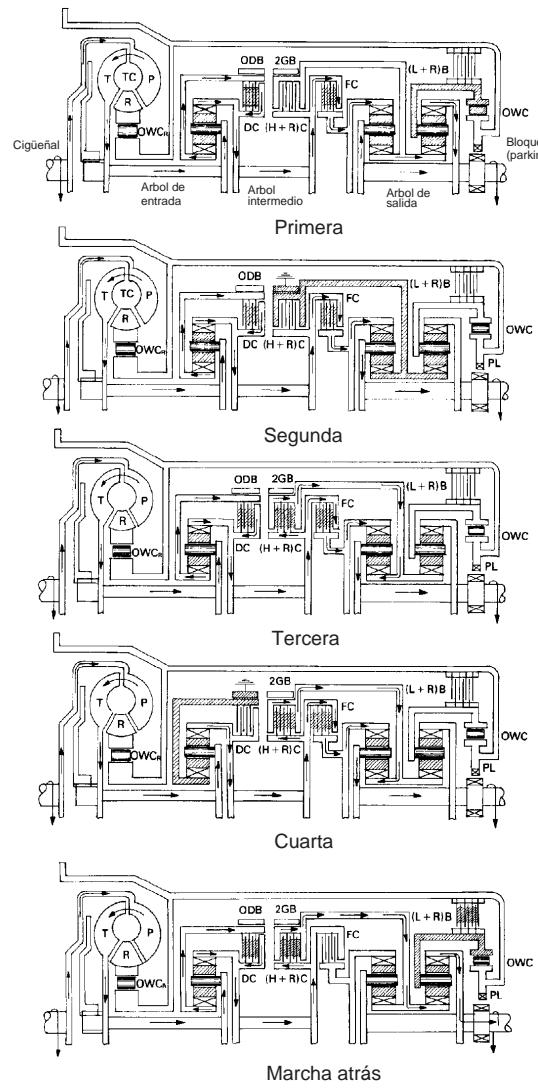


Figura 9.35: Caja automática de tres velocidades.

Para pasar a segunda, sólo es necesario aplicar el freno 2GB, esto fija los planetas del segundo y tercer tren y varía la relación de transmisión que pasa a valer 0.73. El paso a tercera requiere soltar el freno 2GB y cerrar el embrague (H+R)C. En este caso, los trenes están todos bloqueados y la transmisión es directa. Para pasar a cuarta se abre el embrague DC y se aplica el freno ODB. Ahora la potencia debe pasar por el primer tren

epicicloidal antes de entrar en el segundo y tercero. La relación de transmisión es mayor que 1 ( $r = 1.43$ , superdirecta). En marcha atrás se tienen cerrados los embragues DC, (H+R)C y (L+R)B de manera que la salida gira en sentido contrario a la entrada.

El circuito de control se muestra, simplificado, en la Figura 9.36. El sistema debe tener una respuesta rápida, de hecho, sólo una pequeña fracción del tiempo de conducción se emplea en efectuar los cambios de marcha, el cambio se efectúa en menos de 1seg. El circuito de la figura funciona con tres presiones reguladas por otras tantas válvulas: la válvula reguladora de presión que controla la que se denomina presión de trabajo, la válvula neumática que controla la presión de carga, y la válvula centrífuga que controla la presión de gobierno dependiente de la velocidad del vehículo.

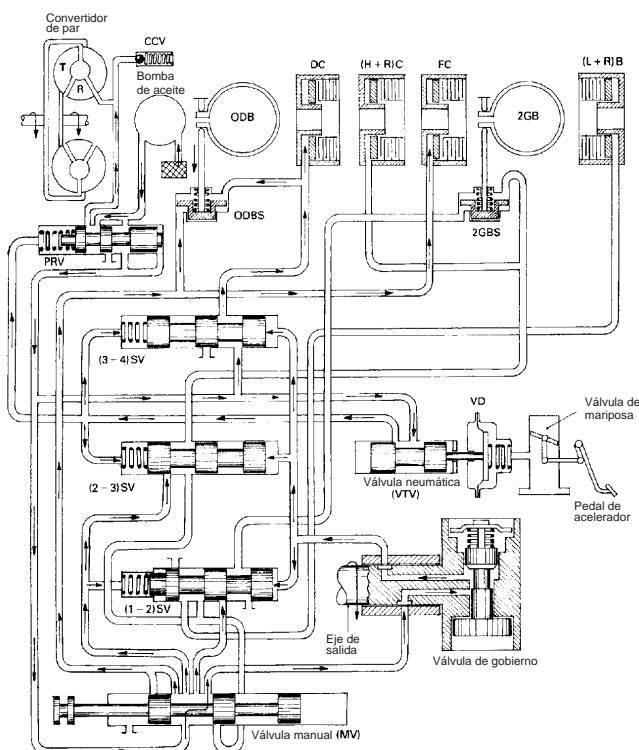


Figura 9.36: Circuito hidráulico de control de una caja automática.

El sistema se alimenta de fluido procedente de una bomba conectada directamente al motor. A pesar de que el rango de velocidades del motor es bastante más reducido que el del eje de salida de la transmisión, la variación de velocidades va a dar lugar a distintas presiones de salida en la bomba que pueden entorpecer el funcionamiento. Para evitar esto se coloca a la salida de la bomba una válvula reguladora de presión (PRV, Fig. 9.36). La válvula está accionada a un lado (lado derecho en la figura) por la presión de salida de la bomba (presión de trabajo). Cuando la presión de salida aumenta (el motor se revoluciona) se desplaza el pistón de la válvula hacia la izquierda, el retorno se abre y aumenta el caudal que atraviesa la bomba disminuyendo su presión. Así, la presión de trabajo se hace prácticamente independiente de la velocidad del motor.

Es interesante que la presión de trabajo aumente con la carga a que está sometido el

motor. En efecto, la presión de trabajo es la encargada de cerrar embragues y frenos en la caja. Para evitar que estos patinen cuando el motor está siendo fuertemente solicitado, se hace crecer la presión de trabajo con la presión de carga. Por otra parte, la presión debe reducirse para permitir cambios suaves cuando la carga es baja. Para ello se conecta el lado izquierdo de la válvula reguladora de presión (PRV, Fig. 9.36) con la presión de carga (salida de la válvula neumática VTV), de manera que la presión de trabajo tendrá que ser mayor para conseguir desplazar el pistón de la PRV hacia la izquierda cuando la carga es importante.

La válvula neumática (VTV, Fig. 9.36) es una resistencia (pérdida de carga) colocada entre el circuito a presión de trabajo y el circuito a presión de carga. Está conectada a través de un diafragma con la presión en los colectores de admisión. Esta presión es una buena medida de la carga a la que está sometido el motor. Cuando esta presión es alta (motor cargado) la VTV se desplaza hacia la izquierda, abre el conducto de salida, disminuye la pérdida de carga, y aumenta la presión de carga.

Análogamente, la válvula de gobierno (Fig. 9.36) es una resistencia colocada entre el circuito a presión de trabajo y el circuito a presión de gobierno. Se trata de una válvula centrífuga que gira con el árbol de salida de la caja de cambios. Cuando la velocidad del vehículo aumenta, la fuerza centrífuga sobre el pistón comprime el muelle, abre el conducto de salida, disminuye la pérdida de carga, y aumenta la presión de gobierno.

Cada cambio de marcha ( $1^a-2^a$ ,  $2^a-3^a$ ,  $3^a-4^a$ ) tiene asignada una válvula de control para cerrar o abrir los embragues y frenos correspondientes. Cada una de estas válvulas recibe, por un lado, la presión de gobierno y, por el otro, la presión de carga. De esta manera, cuando la presión de gobierno aumenta (aumenta la velocidad del vehículo), se vence la fuerza que ejerce el muelle, se abre la válvula en cuestión, y se deja pasar la presión de trabajo a los frenos y embragues correspondientes. Las válvulas del cambio están taradas con muelles de rigidez creciente para permitir que los cambios se produzcan escalonadamente ( $1^a-2^a-3^a-4^a$ ) a las velocidades apropiadas. Estas velocidades dependen, como se ha comentado, de la carga del motor. A mayor carga, mayor velocidad de cambio. Esto simula el comportamiento de un conductor con caja manual.

El sistema se completa con una válvula manual (MV, Fig. 9.36) para elegir el rango de funcionamiento. Por ejemplo, el circuito de marcha atrás se acciona desplazando la MV un punto hacia la derecha. En general, una caja como la descrita tiene una palanca manual con seis posiciones:  $P$ ,  $R$ ,  $N$ ,  $D_4$ ,  $D_3$ ,  $D_2$ . La posición  $P$  es la de estacionamiento, caja bloqueada, la  $R$  es la de marcha atrás, la  $N$  es la posición neutra, caja desbloqueada. La posición  $D_4$  permite que la caja efectúe cambios automáticos de  $1^a$  a  $4^a$ , mientras que la posición  $D_3$  sólo permite cambios automáticos hasta  $3^a$ , y la  $D_2$  hasta  $2^a$ .

## 9.7 Juntas Homocinéticas

En la práctica totalidad de las transmisiones utilizadas en vehículos automóviles se necesita transmitir el par entre ejes que se cortan en un punto y forman un ángulo variable entre sí. Esto se debe a que el motor y caja de cambios están cogidos (elásticamente) al bastidor (suspensionado) del vehículo, mientras que las ruedas deben permanecer en contacto con la carretera (elementos no suspendidos). Existe una serie de dispositivos de unión que permiten efectuar la transferencia de par entre ejes que forman un ángulo variable. Algunos de estos dispositivos cumplen, además, una condición de especial importancia: la velocidad angular en el eje de salida es, en todo instante, igual a la del eje de entrada. Las uniones que cumplen esta condición reciben el nombre de “juntas homocinéticas”.

### 9.7.1 Junta Cardan y Doble Cardan

Una de las uniones más conocidas es la junta cardan o unión de Hooke. Esta unión no cumple la condición homocinética pero es la base para una serie de diseños más sofisticados. En la Figura 9.37 se muestra un esquema de la junta (Fig. 9.37a) y una radiografía de un modelo comercial (Fig. 9.37b). La relación entre la velocidad de salida (sea  $\omega_2$ ) y la de entrada ( $\omega_1$ ), en función del ángulo entre ejes ( $\beta$ ) y del ángulo girado por el eje conductor ( $\theta_1$ ), se obtiene de la siguiente manera. Los vectores de posición de los puntos A y B (extremos de la cruceta intermedia) son (Fig. 9.38):

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} d \sin \theta_1 \\ 0 \\ d \cos \theta_1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} -d \cos \theta_2 \cos \beta \\ d \cos \theta_2 \sin \beta \\ d \sin \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Estos vectores son perpendiculares en todo instante ( $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ ) y, por tanto:

$$\tan \theta_2 = \tan \theta_1 \cos \beta \quad (9.4)$$

Derivando esta expresión respecto del tiempo se obtiene la relación de velocidades buscada:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \theta_1 \sin^2 \beta}$$

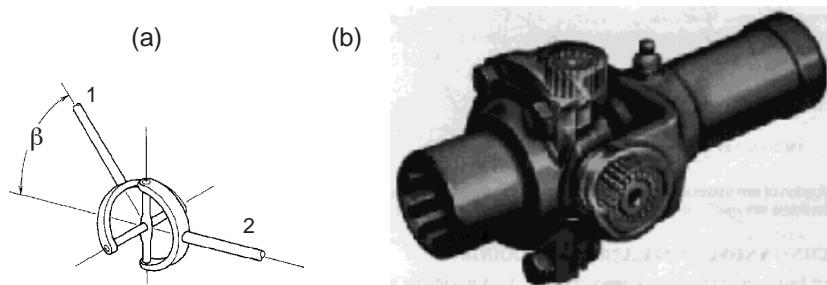


Figura 9.37: Junta cardan.

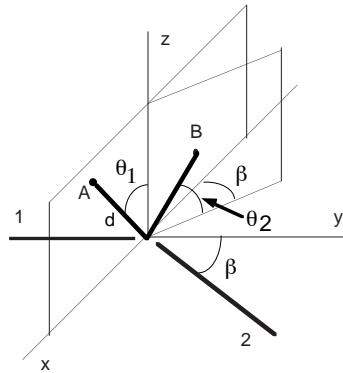


Figura 9.38: Representación axonométrica de la cruceta de una junta Cardan.

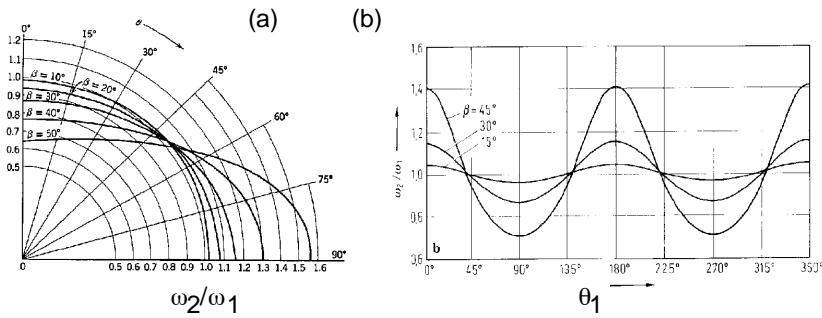


Figura 9.39: Relación de velocidades entre la entrada y la salida.

La representación de la expresión anterior para distintos valores del parámetro  $\beta$  se da en la Figura 9.39. Puede verse que la relación  $\omega_2/\omega_1$  varía con  $\theta$ , y que esta variación es muy acentuada cuando  $\beta$  es grande.

Es posible disponer dos juntas cardan en serie de manera que la variación de velocidad introducida en la primera se corrija en la segunda (Fig. 9.40). Para ello, el ángulo formado por el eje de entrada y el intermedio debe tener el mismo valor absoluto que el formado por el eje de salida y el eje intermedio. En efecto, para la junta de la Figura 9.40, se puede imponer la relación 9.4 en cada uno de los cardan:

$$\begin{aligned}\tan \theta_2 &= \tan \theta_1 \cos \beta_1 \\ \tan \theta_2 &= \tan \theta_3 \cos \beta_2\end{aligned}$$

de donde:

$$\tan \theta_3 = \tan \theta_1 \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2}$$

Por tanto la junta es homocinética siempre que  $\beta_1 = \pm \beta_2$ . Esto da lugar a dos posibles configuraciones que se muestran en la Figura 9.41.

La igualdad de ángulos referida anteriormente implica una cierta complejidad constructiva. En la Figura 9.42 se muestra un ejemplo de junta doble en la que el miembro

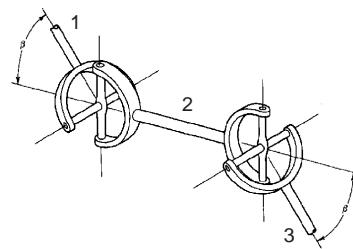


Figura 9.40: Junta formada por dos cardan en serie.

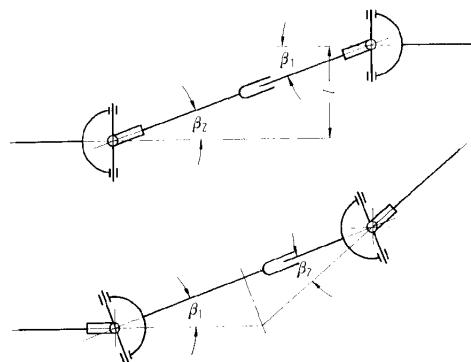


Figura 9.41: Condiciones para la igualdad de velocidad en la doble cardan.

intermedio está guiado por dos tetonillos, uno de ellos solidario con el eje de entrada, y otro con el de salida. De esta manera, el plano bisectriz a los ejes de entrada y salida es siempre perpendicular al eje intermedio.

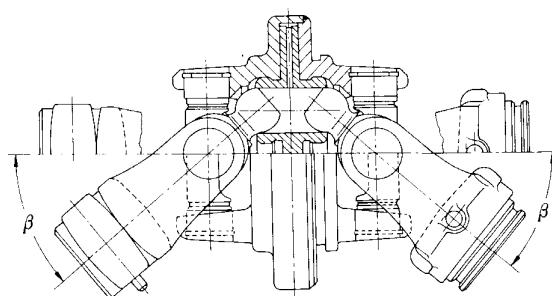


Figura 9.42: Junta doble cardan con mecanismo de direccionamiento del eje intermedio.

### 9.7.2 Junta Tracta

La junta "tracta" (Fig. 9.43) tiene un funcionamiento parecido al de dos uniones cardan en serie. El movimiento relativo entre las piezas del acoplamiento se realiza mediante uniones deslizantes, esto hace que las pérdidas por fricción sean grandes a altas velocidades. En la Figura 9.43 se muestra el esquema de una junta tracta en un eje delantero direccional. Puede verse que la junta necesita de una carcasa rígida para mantener el posicionamiento longitudinal de las piezas móviles. Esta unión se ha usado durante mucho tiempo en transmisiones de vehículos, pero el incremento de las velocidades de operación la ha hecho desaparecer en favor de juntas de bolas.

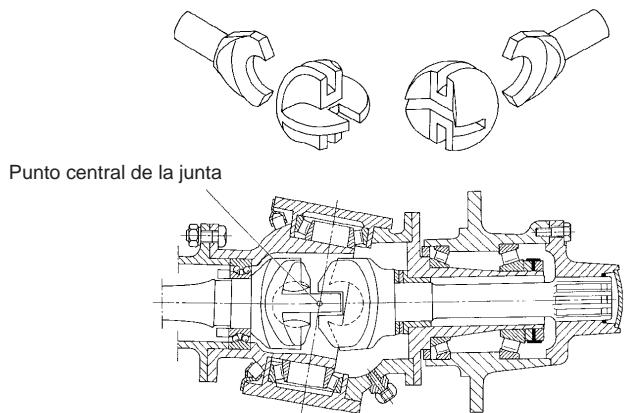


Figura 9.43: Junta "tracta".

### 9.7.3 Junta Weiss

En los vehículos de tracción delantera se deben permitir ángulos muy elevados entre el eje de salida (eje de la rueda) y el de entrada (semieje o palier). Para este tipo de unión es preferible usar diseños como los Weiss o Rzeppa que mantienen la relación homocinética para un rango muy amplio de ángulos. En ambos casos se intenta cumplir la siguiente condición: el par se transmite de un eje al otro de manera que los puntos de contacto permanecen en el plano bisectriz de los dos ejes. En este caso las velocidades del eje de entrada y de salida coinciden en todo instante.

En efecto, los ejes 1 y 2 de la Figura 9.44 forman un ángulo  $\beta$ . El punto de contacto P está separado una distancia  $r_i$  del eje  $i$  ( $i = 1, 2$ ). Puesto que las piezas en contacto no se penetran, se tiene que:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las velocidades angulares del eje 1 y 2 respectivamente. La condición homocinética se cumple cuando  $r_1 = r_2$ , esto es, cuando el punto P está en la bisectriz de los ejes. La condición se puede extender a otras "vistas" del acoplamiento y concluir que el lugar geométrico de los puntos de contacto debe estar en el plano bisectriz, con independencia de la forma que este lugar geométrico adopte en el plano.

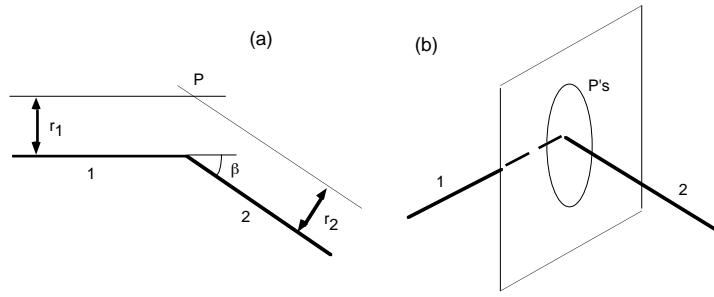


Figura 9.44: Relación homocinética en juntas con contacto puntual.

El diseño Weiss (o Bendix–Weiss) se muestra en la Figura 9.45. Los ejes están provistos en sus extremos de unos bulbos con canales para albergar las bolas que, finalmente, transmiten el par como fuerza de contacto. Los bulbos están cortados de manera que “engranan” entre sí y mantienen las bolas en posiciones circunferenciales fijas. Por otra parte, la geometría de los canales (Fig. 9.45a) es tal que las bolas están siempre contenidas en el plano bisectriz de los dos ejes (no caben en ninguna otra posición). La proyección de la velocidad angular sobre la normal a este plano es constante y, por tanto, la relación de velocidades entre ejes también lo es. Las velocidades de entrada y salida son iguales en todo instante y para cualquier ángulo  $\beta$ .

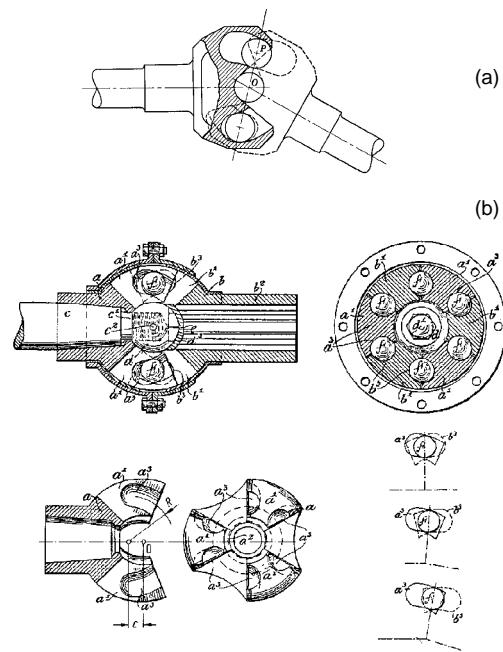


Figura 9.45: Junta “Weiss”.

En la Figura 9.45b se muestra un dibujo original de la patente de Carl Weiss de

1923. Puede verse en la figura que los esfuerzos longitudinales que puedan aparecer son absorbidos por la carcasa que mantiene las distintas piezas de la junta en posición.

#### 9.7.4 Junta Rzeppa

El diseño Rzeppa (ingeniero de Ford en 1926) es probablemente uno de los más usados en tracciones delanteras. De nuevo se trata de mantener unas bolas en el plano bisectriz de los dos ejes pero, en este caso, la manera de mantenerlas en la posición deseada es distinta y el resultado más eficaz.

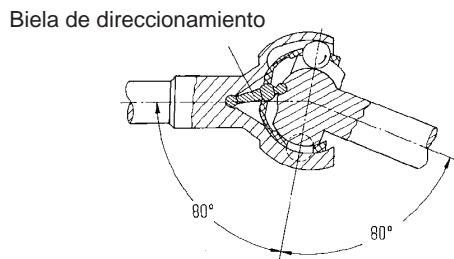


Figura 9.46: Posicionamiento con anillo director.

En la primera patente de 1933 se posicionan las bolas mediante un anillo conductor dirigido por una biela (Fig. 9.46). Poco después, Bernard Stuber modificó este diseño de manera que el posicionamiento de las bolas viene dado por la propia geometría de los canales portabolas. Se trata de tallar las ranuras del eje conductor y conducido con centros de curvatura desplazados. Con este sistema las bolas se mantienen, aproximadamente, en el plano bisectriz (Fig. 9.47). El anillo portabolas se prolonga hasta la cavidad esférica en donde asienta a presión para absorber pequeños esfuerzos axiales.

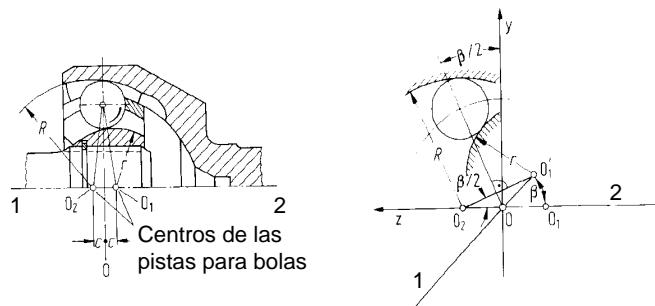


Figura 9.47: Principio de funcionamiento de la unión Rzeppa.

En la Figura 9.48 se muestra un esquema de una junta de este tipo. Puede verse que el resultado es una junta muy compacta que no necesita de una carcasa para mantenerla en posición. El contacto entre las bolas y sus respectivas pistas se produce en una linea, mientras que en el caso de la junta Weiss el contacto se producía en un punto.

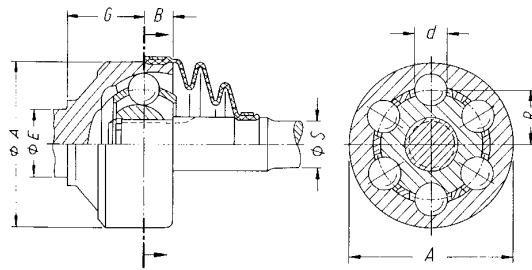


Figura 9.48: Junta “Rzeppa”.

### 9.7.5 Otras Juntas

Una solución muy económica al problema de la transmisión de par entre ejes oblicuos es el de juntas flexibles de goma reforzada. Tienen la ventaja de una extraordinaria sencillez de fabricación y montaje. Los inconvenientes más claros son la limitación de ángulo entre ejes y el gran volumen necesario cuando el par es elevado. Estas juntas se utilizan en vehículos turismos para conectar el eje de salida de la caja de cambios con el que va hasta el cubo de las ruedas.

En la Figura 9.49 se muestran fotografías de las juntas descritas, así como un transmisiones completa que usa una junta Tripot a la salida de la caja de cambios y una Rzeppa para conectar con la rueda. La junta Tripot consiste en un cubo con ranuras cilíndricas en donde asientan unos rodillos en forma de huso. La junta permite desplazamientos longitudinales de los ejes (algo que es necesario acomodar en cualquier transmisión y que suele resolverse mediante acoplamientos brochados) pero no guarda una relación totalmente homocinética.

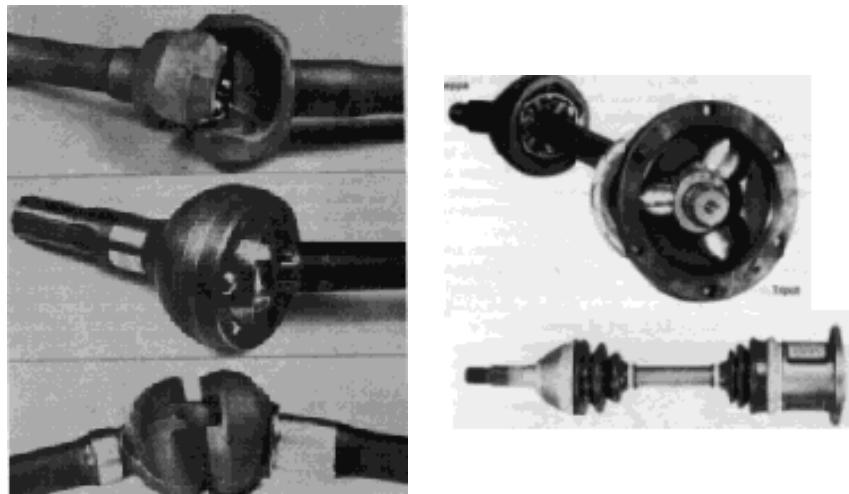


Figura 9.49: Ejemplos de juntas homocinéticas.

## 9.8 Diferenciales

### 9.8.1 Diferenciales Ordinarios

Las ruedas interiores y exteriores de un automóvil giran a distinta velocidad cuando el vehículo describe una curva. En los primeros vehículos, la tracción se hacía exclusivamente a una rueda para permitir que las demás girasen locas a la velocidad adecuada. Pronto se detectó que la transmisión a una sola rueda influye muy negativamente en la capacidad de tracción y en el comportamiento direccional del automóvil. Se introdujo la tracción a dos ruedas de un mismo eje gracias a un mecanismo diferencial que obliga a que los pares en las dos ruedas del eje tengan el mismo valor, con independencia de la velocidad de giro de cada una.

El esquema de un dispositivo diferencial se muestra en la Figura 9.50. El piñón de ataque (rueda cónica) mueve la corona que está unida al portasatélites. Éstos, los satélites, pueden girar libremente alrededor de su eje. Si se desprecia el momento de inercia del satélite se tiene que, por equilibrio, las fuerzas circunferenciales que éste ejerce sobre cada uno de los piñones de salida son iguales y, por tanto, los momentos transmitidos a cada eje también lo son. Si las velocidades de las dos ruedas coinciden, los satélites no giran respecto de su eje. Si, por el contrario, las velocidades son distintas, se tiene un movimiento de rotación de los satélites. Este movimiento (sin inercia al giro apreciable) no afecta al equilibrio de momentos en los piñones de salida que siguen teniendo el mismo valor.

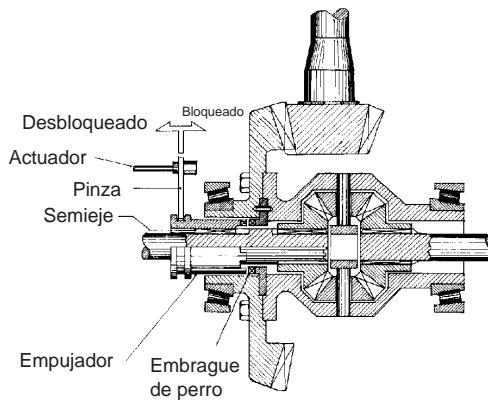


Figura 9.50: Diferencial ordinario.

La ventaja de mantener los pares equilibrados para cualquier velocidad de giro puede convertirse en inconveniente en algunas circunstancias. En efecto, si por alguna razón una de las ruedas del eje pierde adherencia, se tiene que el momento en esta rueda cae a valores cercanos a cero y, por tanto, el de la otra rueda del eje también se hace nulo con independencia del nivel de adherencia en esta rueda. La rueda sin adherencia comienza a girar loca y la otra se queda sin par de tracción. Este problema es de especial importancia en vehículos todo terreno que circulan por superficies en las que es fácil encontrar valores muy dispares del coeficiente de rozamiento aprovechado en cada rueda. Para solucionar este problema existen mecanismos que bloquean el diferencial. De esta manera, las veloci-

dades de giro de las ruedas se hacen iguales con independencia del momento que absorba cada una.

En la Figura 9.50 se muestra un dispositivo de bloqueo de accionamiento manual. En este caso se hace solidario uno de los piñones de salida con el portasatélites. Ahora, los satélites no pueden girar respecto de su eje y, por tanto, la velocidad del segundo piñón de salida es la misma, todo el diferencial gira como un único cuerpo a la misma velocidad. En la Figura 9.51 se muestra un diferencial con mecanismo de bloqueo accionado mediante aire a presión.

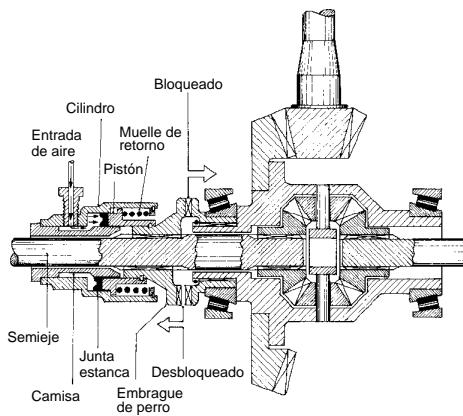


Figura 9.51: Bloqueo con mando neumático.

### 9.8.2 Diferencial Torsen

El diferencial Torsen (Torque Sensing, Fig. 9.52) es un mecanismo diferencial con un principio de funcionamiento distinto. Se impone una condición cinemática y otra dinámica. La primera consiste en que las velocidades relativas de cada una de las ruedas respecto de la corona del diferencial son iguales y de signo contrario (esta condición es igual a la que se tiene en diferenciales ordinarios). La segunda consiste en que el ángulo de hélice de los engranajes helicoidales (ver Fig. 9.52), es tal que que los piñones de salida pueden hacer girar a los satélites, pero éstos no pueden hacer girar a los piñones (rendimiento mecánico nulo o muy bajo en esta dirección).

El funcionamiento en linea recta es igual al de un diferencial ordinario. La corona arrastra a los satélites, estos no giran respecto de su eje pero transmiten una fuerza circunferencial a los dientes de los piñones de salida que los hace girar con la misma velocidad. Todo el diferencial se mueve solidario. Cuando el vehículo describe una curva existe una diferencia de velocidades entre la rueda exterior y la interior. El diferencial es capaz de acomodar esta diferencia de tal manera que la media de velocidades  $(\omega_i + \omega_e)/2$  coincide con la velocidad de giro de la corona y, por tanto, se cumple la condición cinemática anterior ( $\omega_e - \omega_c = \omega_c - \omega_i$ ). La rueda exterior gira más rápido que la corona con lo que el piñón exterior arrastra a su satélite haciéndolo girar sobre su propio eje. Análogamente la rueda interior gira más despacio que la corona, el piñón interior arrastra a su satélite haciéndolo girar sobre su eje en sentido contrario al de la rueda exterior. El

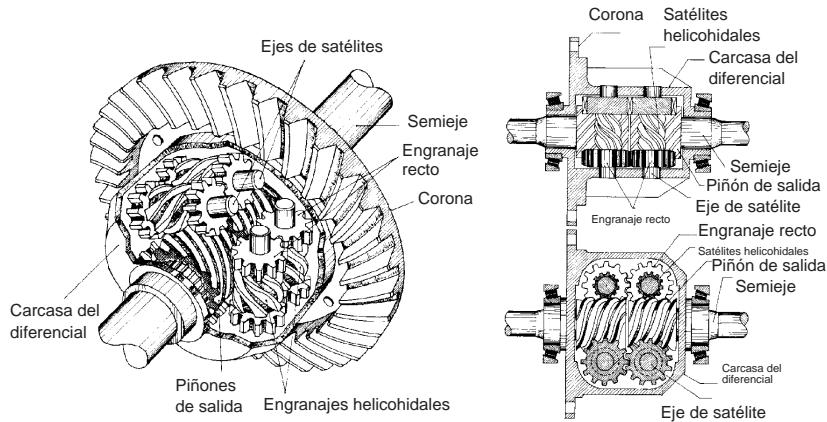


Figura 9.52: Diferencial Torsen.

engranaje entre estos satélites (ver Fig. 9.52) obliga a que la relación de velocidades sea la indicada. El par en ambas ruedas es muy parecido.

Si una rueda pierde adherencia, todo el par se transmite a la rueda que permanece con tracción, y la velocidad de ambas ruedas es la misma. Esto es debido a que el giro del satélite respecto de su eje no puede hacer girar al piñón de salida, con lo cual, la diferencia de par no puede provocar el giro incontrolado de una de las ruedas.

### 9.8.3 Acoplamientos Viscosos

Se puede transmitir un par entre dos discos a poca distancia si se interpone un fluido viscoso y existe una diferencia de velocidades de giro entre los discos. En efecto, un fluido viscoso puede transmitir tensiones tangenciales si existe un gradiente de velocidades. Este gradiente es el proporcionado por la diferencia de velocidades de los discos. El momento transmitido aumenta monótonamente con la diferencia de velocidades.

Estos acoplamientos se están usando para distintas aplicaciones en automoción. Una de ellas es la de servir de pseudo-bloqueo en diferenciales ordinarios (Fig. 9.53). Cuando el diferencial trabaja en recta o en curva se tienen sólo pequeñas diferencias de velocidad entre la corona y los piñones de salida. Sólo cuando una rueda pierde adherencia, se tienen diferencias sustanciales de velocidad. Si se interpone un acoplamiento viscoso entre la corona y uno de los piñones de salida, se consigue mantener el efecto diferencial para diferencias de velocidades bajas y, por el contrario, transmitir un par a la rueda que permanece con tracción en el caso de que la diferencia de velocidades sea mayor.

Los acoplamientos viscosos se usan también como diferenciales centrales en vehículos con tracción a las cuatro ruedas. En este caso, se puede mantener una relación de velocidades quasi-constante entre la entrada y la salida del acoplamiento que determina la fracción de par transmitido a las ruedas traseras. Las pequeñas diferencias de velocidades entre ruedas delanteras y traseras son absorbidas con variaciones despreciables del par en el acoplamiento viscoso. La relación de velocidades en el acoplamiento se determina en función de las reducciones correspondientes en la caja transfer y en los diferenciales delantero y trasero.

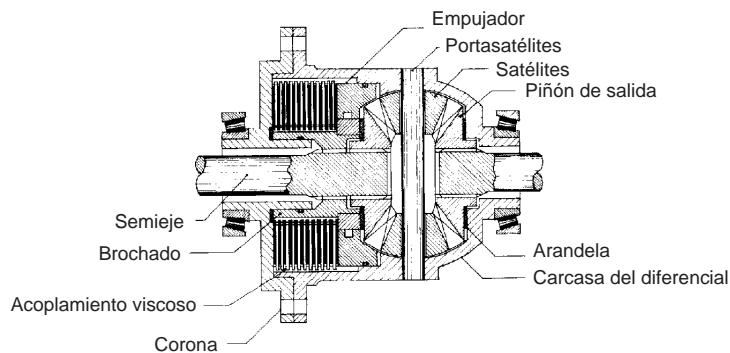


Figura 9.53: Diferencial con pseudobloqueo mediante acoplamiento viscoso.

#### 9.8.4 Diferencial Epicicloidal

Con un tren de engranajes epicicloidal, se puede conseguir dividir el par a la vez que permitir diferencias de velocidad en cada una de las dos salidas. El mecanismo es, por tanto, un sistema diferencial. El reparto de momento no es 50/50 en este caso, de ahí que no se use como diferencial entre ruedas de un eje, sino como diferencial central en transmisión a más de un eje.

En la Figura 9.54 se muestra un ejemplo de diferencial epicicloidal. La entrada de potencia se hace a través del plato portasatélites. Este movimiento arrastra a la corona y a la rueda central. Los dos pares de salida se toman directamente de estas ruedas. Al igual que ocurre en diferenciales ordinarios, sólo se tiene giro de los satélites sobre su propio eje cuando las velocidades de estas dos ruedas son distintas. Las fuerzas circunferenciales que los dientes de los satélites ejercen sobre corona y planeta son la misma si se desprecia el momento de inercia de éstos. La relación de momentos es, entonces, el cociente entre los diámetros de la corona y el planeta.

Es interesante notar que la conexión entre el planeta y el eje de salida (paralelos) se hace a través de una cadena (Fig. 9.54) para que la dirección de rotación sea la misma. Otra solución es, obviamente, disponer de una rueda loca auxiliar. En el ejemplo de la Figura se tiene un acoplamiento viscoso que hace las veces de pseudo-bloqueo cuando la diferencia de velocidades es grande.

## 9.9 Transmisión a Más de Dos Ruedas

Cuando en un vehículo se transmite el par a una fracción de las ruedas encargadas de soportar la carga vertical, se está limitando, innecesariamente, el esfuerzo máximo de tracción que se puede ejercer. Este problema es de especial interés en el caso de vehículos industriales con ejes múltiples. En estos vehículos es necesario disponer de un sistema de transmisión que reparta los esfuerzos de tracción entre los dos ejes del tandem.

En el caso de vehículos turismo también se incurre en una limitación de la tracción máxima al transferir la potencia a un único eje. En estos casos, además, se modifica el comportamiento dinámico lateral del vehículo. Se ha comentado que en los primeros vehículos la transmisión se hacía exclusivamente a una de las cuatro ruedas. Pronto se

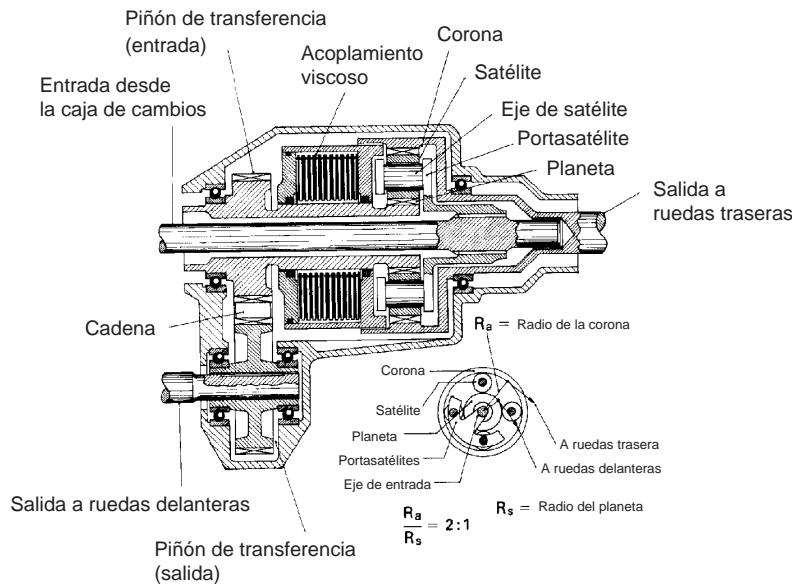


Figura 9.54: Diferencial epicicloidal (divisor de par).

introdujo la tracción a las dos ruedas de un eje que mejoraba sustancialmente la respuesta lateral. El comportamiento direccional de un vehículo con tracción al eje delantero es distinto del que tiene un vehículo con tracción trasera o a las cuatro ruedas. La elección de uno u otro sistema introduce variedad en el mercado de automóviles.

Los sistemas de transmisión a dos ejes necesitan de un diferencial central que reparta el par entre ejes con independencia de la velocidad instantánea y media de cada uno de ellos. La posible diferencia de velocidad entre ejes es consecuencia de los siguientes factores:

1. La irregularidad vertical de la carretera hace que los ejes estén, en cada instante, recorriendo un perfil distinto y que, por tanto, sus velocidades de rotación instantáneas sean diferentes.
2. Los ejes describen trayectorias distintas cuando el vehículo está trazando una curva. Sólo en el caso en que el centro instantáneo de rotación del vehículo esté en la linea “bisectriz” entre ejes se tendrían trayectorias iguales. En el caso general, la trayectoria del eje posterior está desviada respecto de la del eje anterior y, por tanto, las velocidades medias de ambos ejes no coinciden.
3. Los radios efectivos de rodadura de los neumáticos no coinciden. Esto puede ser debido a una serie de factores como:
  - (a) Distribución desigual de la carga
  - (b) Transferencia de carga en aceleración y frenado
  - (c) Tipo de construcción del neumático
  - (d) Nivel de desgaste de la banda de rodadura

## (e) Presión de inflado

La no existencia de un diferencial central obliga a absorber estas variaciones de velocidad como deformación de torsión en el eje de la transmisión. Cuando la energía de deformación almacenada alcanza un determinado valor se libera mediante el deslizamiento instantáneo de uno de los ejes. Esto, además de cargar innecesariamente el sistema, aceleraría el proceso de desgaste de los neumáticos. Sin embargo, la mayoría de diferenciales centrales cuentan con un sistema de bloqueo para impedir la pérdida total de tracción a causa de la desaparición de ésta en un solo eje.

### 9.9.1 Ejes Múltiples en Vehículos Industriales

En la Figura 9.55 se muestra un ejemplo de transmisión a un eje tándem. Un par de engranajes permite la conexión del eje de la transmisión con los piñones de ataque de cada uno de los diferenciales de eje. Entre los dos ejes se intercala un diferencial  $D_3$  por las razones dadas en la sección anterior.

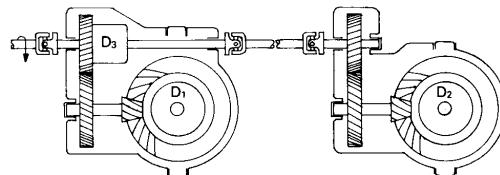


Figura 9.55: Transmisión a un eje tándem.

En la Figura 9.56 se muestra una transmisión a un eje tándem que sustituye la combinación piñón-corona por la de tornillo sinfín y corona-cremallera. La posición del diferencial central es similar a la del ejemplo anterior. Un esquema de detalle del diferencial se da en la Figura 9.56b.

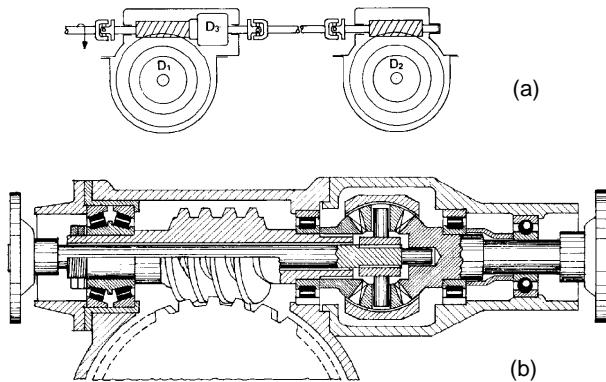


Figura 9.56: Transmisión a un eje tándem (a) y diferencial central (b).

### 9.9.2 Tracción a las Cuatro Ruedas

También en los vehículos automóviles se tiene un aumento de la capacidad de tracción cuando ésta se divide entre los cuatro neumáticos. El comportamiento lateral también se modifica. En efecto, como se comentó en el capítulo ??, la existencia de una fuerza longitudinal en los neumáticos delanteros produce, por un lado, una componente centrípeta que tiende a aumentar el carácter sobrevirador del vehículo pero, por otro lado, hace crecer el ángulo de deriva en este eje, lo cual tiende a aumentar el carácter subvirador del vehículo. El segundo factor es bastante más acusado que el primero de manera que se puede afirmar que la tracción delantera contribuye a aumentar el carácter subvirador del vehículo. Análogamente, la tracción trasera contribuye a aumentar el carácter sobrevirador del automóvil.

Un vehículo con tracción a las cuatro ruedas tiene una contribución subviradora debida a la tracción delantera y, a la vez, una contribución sobreviradora consecuencia de la tracción de tracción trasera. Esto quiere decir que la contribución de la tracción al comportamiento final puede ser más cercana a la neutra que en otro tipo de transmisiones. El comportamiento final está influenciado por numerosos factores.

Existen transmisiones a las cuatro ruedas con diferenciales centrales de todos los tipos descritos en el apartado 9.8. En la Figura 9.57 se muestra el correspondiente al Range Rover. Se trata de un una caja reductora con dos relaciones posibles, un diferencial ordinario con posibilidad de bloqueo, y un freno de tambor que hace las veces de freno de mano.

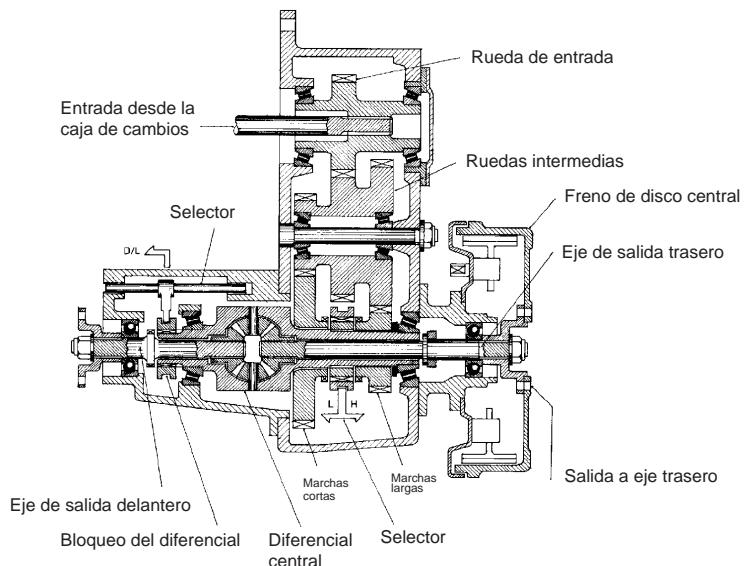


Figura 9.57: Transmisión a las cuatro ruedas de un vehículo todoterreno.

# Capítulo 10

## Aerodinámica

Los vehículos de todo tipo (salvo algunos espaciales) se mueven en el seno de fluidos. El movimiento del fluido alrededor del vehículo provoca una serie de fuerzas sobre el mismo que pueden llegar a tomar valores muy considerables. En algunos casos se trata de maximizar estas fuerzas para conseguir efectos deseados como sustentación o agarre, y en otros se trata de minimizarlas para reducir el consumo de combustible o aumentar la estabilidad en marcha.

En el caso de vehículos automóviles, el interés fundamental se ha centrado tradicionalmente en la reducción de la fuerza aerodinámica que se opone al movimiento. Sin embargo, en la actualidad, se reconoce también la importancia de otras componentes de la fuerza y momento aerodinámicos. Con el aumento o disminución de estas componentes se puede conseguir la fijación del vehículo a la carretera o minimizar la tendencia de éste a efectuar cambios involuntarios de trayectoria.

Las ecuaciones que describen el movimiento del fluido alrededor del automóvil tienen un grado de complejidad muy alto. De hecho, sólo existen soluciones analíticas para problemas con geometrías simplificadas. Incluso cuando se recurre a técnicas numéricas de análisis, es necesario introducir algunas simplificaciones para no disparar los tiempos de cálculo. Estos estudios, aunque aproximados, permiten identificar los aspectos fundamentales del problema y, sobre todo, permiten abaratar costes de experimentación. En efecto, el análisis permite diseñar ensayos que enfoquen directamente en los aspectos más oscuros del problema, ayuda a interpretar los resultados, y a identificar las variables más significativas.

En este capítulo, aparte de una somera revisión de algunos conceptos fundamentales de la mecánica de fluidos, se muestran resultados experimentales que ayudan a entender la influencia de los distintos elementos del automóvil en su comportamiento aerodinámico.

### 10.1 Resistencia Aerodinámica

Una vez que el par motriz se ha entregado a las ruedas, existen dos fuerzas que se oponen al movimiento: la resistencia a la rodadura de los neumáticos y la resistencia aerodinámica del vehículo. La potencia consumida por estos dos fenómenos crece con la velocidad, linealmente en un caso, y con la potencia tercera en el otro:

$$P_r = \rho M g v$$

$$P_a = \frac{1}{2} \rho_a c_x A v^3$$

donde  $P_r$  y  $P_a$  son las potencias consumidas por resistencia a la rodadura y resistencia aerodinámica, respectivamente. El coeficiente  $\rho$  es el de resistencia a la rodadura de los neumáticos (que puede suponerse constante para velocidades moderadas),  $M$  es la masa del vehículo,  $v$  su velocidad,  $\rho_a$  la densidad del aire,  $c_x$  el coeficiente de resistencia aerodinámica, y  $A$  el área frontal del vehículo.

Ambas potencias pueden llegar a tomar valores muy importantes. En concreto, la resistencia aerodinámica crece espectacularmente para velocidades superiores a los  $100 \text{ Km/h}$ . La resistencia a la rodadura puede reducirse modificando la construcción y los materiales de los neumáticos. En general, una baja resistencia a la rodadura implica elevada rigidez vertical, lo cual influye negativamente en el confort. Los vehículos ferrocarriles deben su economía de funcionamiento a la alta rigidez del contacto rueda carril (el problema del confort no es tan serio en este caso puesto que los carriles tienen una rugosidad muy controlada). En neumáticos, el coeficiente de resistencia a la rodadura oscila entre 0.01 de algunos neumáticos radiales y 0.03 de algunos diagonales (la mayoría de los valores comerciales están en una banda más estrecha). El abanico de potencias consumidas por un vehículo de peso medio se muestra en la Figura 10.1. Para velocidades bajas, la potencia disipada en las ruedas es la dominante. Para velocidades altas, la potencia consumida en resistencia aerodinámica toma valores muy importantes.

El coeficiente de resistencia aerodinámica se define como:

$$c_x = \frac{F_x}{\left(\frac{1}{2} \rho_a v_\infty^2\right) A}$$

donde  $F_x$  es la fuerza aerodinámica que se opone al movimiento, y  $v_\infty$  es la velocidad longitudinal relativa entre el vehículo y el aire. El coeficiente está influenciado por características geométricas de detalle y, por tanto, no es posible hacer afirmaciones generales respecto de la forma que debe tomar un vehículo para disminuir su  $c_x$ . En automóviles actuales, el coeficiente varía entre 0.29 (Mercedes 200D) y 0.51 (Citroen 2CV), todavía hay margen para reducir la resistencia aerodinámica hasta la de un cuerpo ideal con ruedas que se fija en torno a 0.15. Las curvas de la Figura 10.1 ponen de manifiesto la importancia de la reducción del  $c_x$ .

## 10.2 Conceptos Básicos

### 10.2.1 Fluido Ideal

El aire puede considerarse como un fluido ideal en algunas situaciones. En fluidos ideales, las fuerzas de viscosidad son despreciables frente al resto de acciones sobre la partícula fluida. La ecuación que describe el movimiento de un fluido ideal es la famosa ecuación de Bernuilli :

$$P + \frac{1}{2} \rho_a v^2 = \text{cte}$$

Siendo  $P$  la presión del fluido,  $\rho_a$  su densidad y  $v$  la velocidad. De esta ecuación se deduce que cuando la velocidad del fluido aumenta, su presión disminuye. La velocidad del aire aumenta en los estrechamientos para números de Mach inferiores a la unidad. Puesto que el caudal entre dos líneas de corriente es constante, cuando las líneas de corriente se

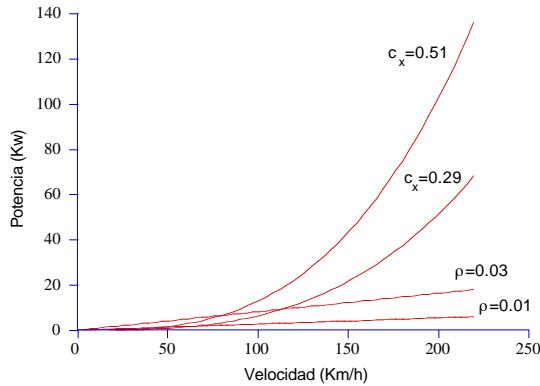


Figura 10.1: Potencia disipada en rodadura y en resistencia aerodinámica.

aproximan la velocidad sube, mientras que la velocidad baja en las regiones en donde las líneas de corriente se alejan.

En un perfil de ala las líneas de corriente se aproximan en la parte superior del perfil, la presión es baja en esta zona y se genera, por tanto, una resultante de sustentación. No es necesario abandonar la hipótesis de fluido ideal para obtener un valor muy exacto de la sustentación. La distribución de presiones es también muy próxima a la medida experimentalmente (salvo quizás en una zona muy cercana al borde de salida). En cambio, la resistencia aerodinámica calculada resulta ser nula, mientras que la medida experimentalmente es sustancialmente distinta de cero (paradoja de D'Alembert). En cuerpos romos (como es el caso de los automóviles) el fallo de la teoría es aún más flagrante. La distribución de presiones sólo se parece a la real en la parte anterior y hasta el punto de presión mínima. La resistencia calculada es nula mientras que la real es enorme.

### 10.2.2 Capa Límite

Fue Prandlt quien sugirió que es necesario abandonar la hipótesis de fluido ideal aunque sólo sea en una pequeña capa alrededor del cuerpo (varios milímetros en el caso de automóviles). En esta capa límite los efectos de viscosidad son los encargados de llevar la velocidad desde su valor exterior al valor nulo en la superficie del sólido (condición de no deslizamiento). Los esfuerzos cortantes están dados por:

$$\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

(con  $\mu$  la viscosidad dinámica y  $\partial u / \partial y$  el gradiente transversal de velocidades), y son los que provocan el rozamiento en los cuerpos fuselados. En cuerpos romos la capa límite se desprende por efecto del gradiente adverso de presiones. La capa desprendida forma una estela en donde las presiones son bajas, lo que da lugar a un importante incremento de la resistencia aerodinámica del cuerpo. De hecho, en alas de avión existe un ángulo de ataque máximo por encima del cual la capa límite no es capaz de permanecer adherida al

perfil. En este momento, la sustentación disminuye estrepitosamente y el avión entra en pérdida. En vehículos de tierra la situación es distinta, aquí se intenta que la capa límite se desprenda fácilmente en vientos laterales (disminución del momento de pivoteo) y que, sin embargo, permanezca adherida cuando el viento es de cara (menor  $c_x$ ).

La viscosidad en la capa límite se va encargando de frenar al fluido colindante. Esto quiere decir que el espesor de la capa va aumentando aguas abajo. Si el sólido es suficientemente largo, o si las velocidades son suficientemente altas, se llega a una situación en que la capa límite pasa a turbulenta. Las capas límite turbulentas son más difíciles de desprender que las laminares, de ahí que en cuerpos romos, a veces, se busque la generación de turbulencia mediante la rugosidad superficial como método para disminuir la resistencia aerodinámica.

### 10.2.3 Aeroelasticidad y Ruido Aerodinámico

Se ha visto que el movimiento de un fluido alrededor de un sólido genera una serie de fuerzas y momentos aerodinámicos. Es muy posible que estas fuerzas sean capaces de deformar el sólido en cuestión, esta deformación puede modificar las características del flujo y dar lugar a una variación de las presiones sobre el sólido. Quiere esto decir que, cuando la solicitud aerodinámica es importante, y la flexibilidad del sólido es suficiente, se produce un acoplamiento entre la carga aerodinámica y la respuesta elástica del sólido (aeroelasticidad).

Este fenómeno se observa fácilmente en cuerpos hiperelásicos como banderas y velas (*ondeando*). Pero también, en elementos estructurales, puede dar lugar a vibraciones importantes cuando las frecuencias están próximas a las naturales de vibración. En automóviles, la influencia de este problema se limita a elementos secundarios de su estructura: antenas, capotas, spoilers ..., sin embargo es un tema a tener en cuenta en las últimas fases del diseño.

Otro problema de importancia en vehículos (relacionado con el desprendimiento de la capa límite) es el ruido aerodinámico. Éste se produce por el desprendimiento periódico de vórtices en la estela del cuerpo. En el caso de flujo alrededor de un cilindro, se tiene que el desprendimiento periódico se produce en el intervalo de números de Reinolds ( $Re_D$ ) entre 60 y 5000. Para números inferiores se desprende una estela simétrica no periódica. Para números mayores se tiene una estela turbulenta sin separación periódica. La frecuencia del movimiento está, desafortunadamente, en el rango audible.

## 10.3 Aerodinámica Básica de un Automóvil

La geometría básica de muchos automóviles actuales es la dada en la Fig 10.2. Esto es, un morro para albergar al motor, un cuerpo para los pasajeros, y un portamaletas que puede estar integrado en el mismo cuerpo que la cabina. Si suponemos, para simplificar, que la trasera del vehículo es tal que no se produce desprendimiento de la capa límite, se tiene una distribución de presiones como la dada en la Figura 10.2. Ésta se da en función del coeficiente de presiones  $c_P$ , definido como:

$$c_P = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_a v_\infty^2}$$

$P_\infty$  y  $v_\infty$  son, respectivamente, la presión y velocidad del fluido no perturbado por el vehículo. La expresión anterior coincide con:

$$c_P = 1 - \left( \frac{v}{v_\infty} \right)^2$$

para el caso en que las hipótesis de fluido ideal sean aceptables.

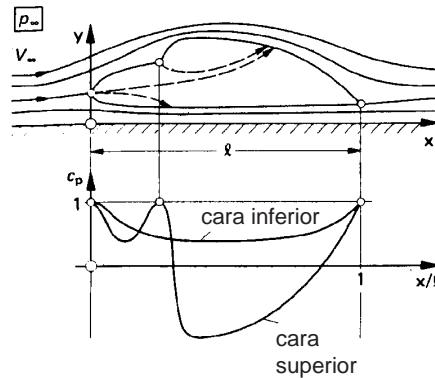


Figura 10.2: Distribución de presiones en un vehículo básico sin estela.

Puede verse en la Figura 10.2 que el coeficiente de presiones es unidad en los puntos de remanso ( $v = 0$ ), y nulo en los puntos de flujo imperturbado ( $v = v_\infty$ ). En puntos del capó la presión es inferior a la de remanso pero superior, en este caso, a la presión ambiente  $P_\infty$ . El coeficiente  $c_P$  vuelve a subir hasta el valor de remanso en el punto de confluencia con el parabrisas. A partir de este punto la presión disminuye en el techo del vehículo llegando, en muchos casos, a ser inferior a la presión ambiente ( $c_P < 0$ , sustentación). En los bajos del vehículo se tiene que la presión es inferior a la de remanso y que, dependiendo de la distancia al suelo, puede ser superior o inferior a la presión ambiente. Cuando esta distancia es pequeña se tiene  $c_P < 0$ , dando lugar a una sustentación negativa (efecto suelo empleado en algunos vehículos de competición). Puesto que el sistema de referencia se mueve con el vehículo, el suelo es una linea de corriente de velocidad  $v_\infty$ .

Con la distribución de  $c_P$ , y despreciando la influencia de los esfuerzos cortantes, se pueden obtener todas las componentes de la fuerza y momento aerodinámicos. Será necesario efectuar las integrales:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left( \frac{1}{2} \rho_a v_\infty^2 \right) \int_{\mathbf{S}} c_P \mathbf{n} \, d\mathbf{S} \\ \mathbf{M} &= \left( \frac{1}{2} \rho_a v_\infty^2 \right) \int_{\mathbf{S}} c_P (\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}) \, d\mathbf{S} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{S}$  es la superficie exterior del vehículo,  $\mathbf{n}$  la normal en cada punto, y  $\mathbf{r}$  el vector de posición de dicho punto respecto de un sistema de referencia dado. Claro que la medida de  $c_P$  ha de hacerse experimentalmente puesto que el desprendimiento de la capa límite va a hacer muy difícil su evaluación analítica.

### 10.3.1 Otros Factores: Torbellinos y Flujo Interno

El desprendimiento de la capa límite se ve perturbado por los torbellinos que se generan en la trasera del automóvil, análogos a los que se forman en las puntas de ala de aeronaves. En este último caso, la presión en el extradós del ala es muy inferior a la existente en el intradós. En las puntas de ala el fluido tiende a pasar de la zona inferior a la superior de baja presión. Se genera entonces un movimiento de rotación en forma de vórtices contrarrotantes que no deben olvidarse en el caso de tráfico aéreo denso. En el caso de automóviles la situación es similar (Fig. 10.3). El aire, a mayor presión en los costados del vehículo, tiende a pasar a la zona del techo de menor presión. Se generan así vórtices análogos a los descritos anteriormente y que, en algunos casos, afectan significativamente a la resistencia aerodinámica.

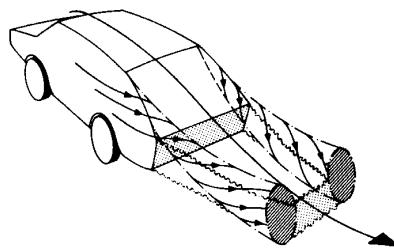


Figura 10.3: Torbellinos contrarrotantes en la trasera de un vehículo.

La aerodinámica básica de automóviles está influenciada por la interacción existente entre el flujo interno y el externo. El flujo por el interior del vehículo es necesario para refrigerar la planta de potencia y para ventilar la cabina de pasajeros. Este flujo se beneficia de la diferencia de presiones existente entre la toma de aire y la salida. Por otra parte, el flujo exterior puede aprovechar el sumidero y el manantial provocado por el circuito interno para corregir alguna deficiencia en sus líneas de corriente.

### 10.3.2 Diseño Aerodinámico

En la Figura 10.4 se muestran los valores del coeficiente de resistencia aerodinámica para varios cuerpos geométricos. El valor de 0.05, propio de un cuerpo fuselado, es prácticamente imposible en un vehículo de tierra provisto de ruedas. De hecho, como se ha mencionado, el límite realista puede estar en torno a 0.15. En cualquier caso, todavía existe margen para la mejora, pues la mayoría de los vehículos tienen un  $c_x$  que no baja de 0.3. Existen dos procedimientos básicos para el diseño aerodinámico de un automóvil:

1. Partir del diseño original del vehículo y modificar los pequeños detalles en función del patrón de líneas de corriente. No suele ser necesario renunciar a los elementos importantes del diseño del automóvil.
2. Partir de una forma aerodinámica básica, del mismo tamaño aproximado que el vehículo que se trata de diseñar, y dotarlo progresivamente de las características

especiales que se desean para el automóvil en cuestión. En este proceso se intenta que el  $c_x$  de partida se modifique lo menos posible.

La Figura 10.5 muestra esquemáticamente los dos procesos anteriores.

Cuerpo	Flujo	$C_x$
Placa circular		1.17
Esfera		0.47*
Media esfera		0.42*
Cono a 60°		0.50
Cubo		1.05*
Cubo		0.80*
Cilindro I/D>2		0.82
Cilindro I/D>1		1.15
Cuerpo fuselado		0.04
Media placa circular en tierra		1.19
Medio cuerpo fuselado en tierra		0.09

Figura 10.4: Coeficientes aerodinámicos de diversos cuerpos.

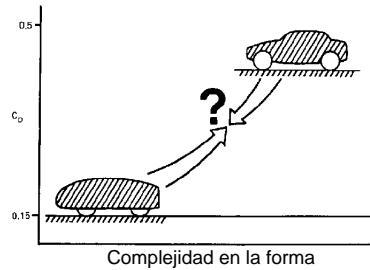


Figura 10.5: Procesos de diseño.

## 10.4 Vientos Laterales y Estabilidad

Existe un conflicto entre la disminución del coeficiente de resistencia aerodinámica y la disminución del momento de pivoteo en viento cruzado. Se puede alcanzar un compromiso razonable optimizando el  $c_x$  para vientos quasi-frontales (con ángulos de incidencia entre  $-10$  y  $+10$ ) y dando preferencia a la disminución del momento de pivoteo para ángulos de incidencia superiores (Fig. 10.6).

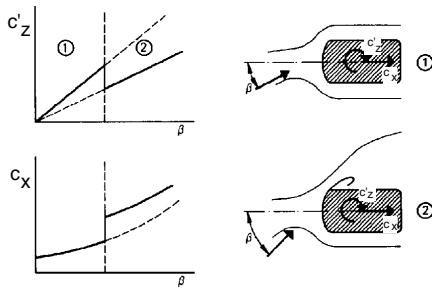


Figura 10.6: Variaciones ideales de los coeficientes  $c_x$  y  $c'_z$  en función del ángulo de incidencia.

De los perfiles aerodinámicos se sabe que cuando el ángulo de ataque aumenta, también lo hace la sustentación. Sin embargo se llega a un determinado valor del ángulo de ataque para el que la sustentación cae estrepitosamente (desprendimiento). En el caso de automóviles, el momento de pivoteo también aumenta cuando lo hace el ángulo del viento relativo (Fig. 10.7), se trata entonces de que este momento disminuya sustancialmente cuando se supera un cierto ángulo. El incremento de  $c_x$  se perdona puesto que los vientos cruzados suelen ocurrir en periodos cortos de tiempo.

El hecho de que el momento de pivoteo aumente con el ángulo de ataque es el factor responsable de la inestabilidad propia de los automóviles en viento cruzado. En efecto, al incidir el viento sobre el vehículo con un determinado ángulo genera un momento de pivoteo que lo fuerza a girar alrededor del eje vertical. Este giro hace crecer el ángulo de ataque de tal manera que el momento tiende a aumentar. El proceso es, por tanto, inestable. En el caso de aeroplanos el diseño es tal que la nave es aerodinámicamente estable en todos sus ejes. Para ello, el centro de gravedad debe estar ligeramente adelantado respecto del centro de presiones de las alas principales. Cuando el avión tiende a bajar el morro, la sustentación en la alas disminuye a la vez que el empuje hacia abajo de los estabilizadores horizontales aumenta, la posición original tiende a recuperarse haciendo el vehículo estable. El mismo tipo de razonamiento de puede aplicarse a perturbaciones en los otros dos ejes. En el caso de automóviles no se ha intentado, por el momento, conseguir la estabilidad aerodinámica, los diseños se limitan a desprender la capa límite en los casos comentados.

La distribución de presiones en la superficie de un vehículo sometido a viento cruzado se muestra en la Figura 10.7. Como puede verse, existe una cierta correlación entre esta distribución y la existente en un perfil aerodinámico. La resultante se reduce a una fuerza y un momento tendentes, ambos, a llevar el morro del vehículo aguas abajo. Como se ha venido haciendo, la fuerza ( $F_y$ ) y momento ( $M_z$ ) se adimensionalizan con la presión dinámica multiplicada por el área frontal. Los coeficientes resultantes,  $c_y$  y  $c'_z$ , se muestran en la Figura 10.8 para los tres diseños de trasera más comunes. Aunque no es conveniente hacer generalizaciones, se desprende de la Figura 10.8 que el “tres volúmenes” analizado tiene coeficientes  $c'_z$  y  $c_x$  intermedios, mientras que el de “trasera cortada” tiene menor  $c_y$  pero mayor  $c'_z$ , y el “coupé” mayor  $c_y$  pero menor  $c'_z$ .

En el estudio de la respuesta dinámica de un vehículo sometido a fuerzas laterales es necesario tener en cuenta los siguientes aspectos:

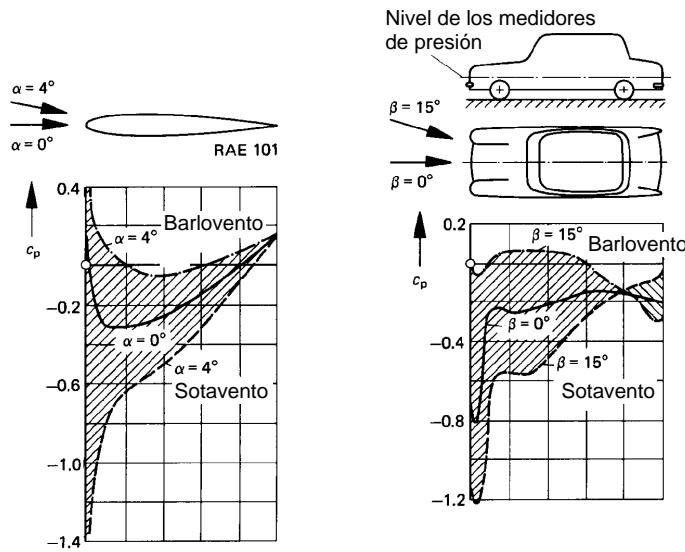


Figura 10.7: Distribución de presiones en un vehículo sometido a viento cruzado y comparación con la distribución en un perfil aerodinámico.

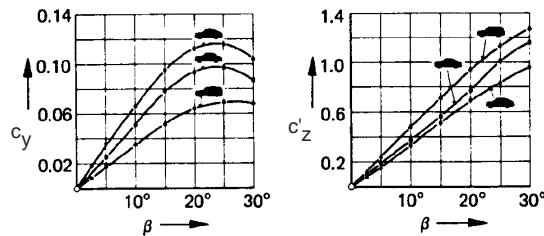


Figura 10.8: Momento de pivoteo y fuerza lateral para tres diseños de trasera.

1. El conductor es un elemento que realimenta información al vehículo y modifica su trayectoria. Desde que el par de pivoteo comienza a hacer girar el vehículo hasta que el conductor reacciona para intentar corregir el cambio de trayectoria transcurre un tiempo, llamado tiempo de reacción, que depende de la experiencia del conductor y cuyo orden de magnitud está en torno a 0.2seg. Además, la respuesta del vehículo no es instantánea. Existe un desfase entre la señal del conductor y la respuesta del automóvil cuyo orden de magnitud está en torno a 0.6seg. Este desfase produce inquietud en el conductor y la sensación de falta de manejabilidad del vehículo.
2. La desviación lateral en vehículos típicos sometidos a rachas de viento también típicas, está en torno a 0.8m. La distancia del extremo del vehículo al comienzo del otro carril es del orden de 1m. Puesto que el nivel de peligrosidad aumenta exponencialmente con la disminución de separación lateral entre vehículos, se debe concluir que la disminución de  $c'_z$  y  $c_y$  tiene una importancia extraordinaria a la hora de reducir la peligrosidad de la conducción con viento cruzado. Viento que a veces

se produce por el propio diseño de la carretera.

3. Las ráfagas de viento lateral se pueden producir al salir de la sombra de un camión (Fig. 10.9) o al abrirse un hueco en la protección al lado de la carretera. El perfil de velocidades en unos ejes fijos es tal que el aire está frenado en su contacto con el suelo y su velocidad aumenta con la altura. La velocidad del viento suele entonces ser superior en puentes y viaductos. Además, algunos obstáculos cercanos al suelo pueden acelerar el aire y aumentar su velocidad en algunas zonas. Por ejemplo en un terraplén de carretera, la velocidad del aire aumenta como consecuencia del perfil transversal del terreno (Fig. 10.9).

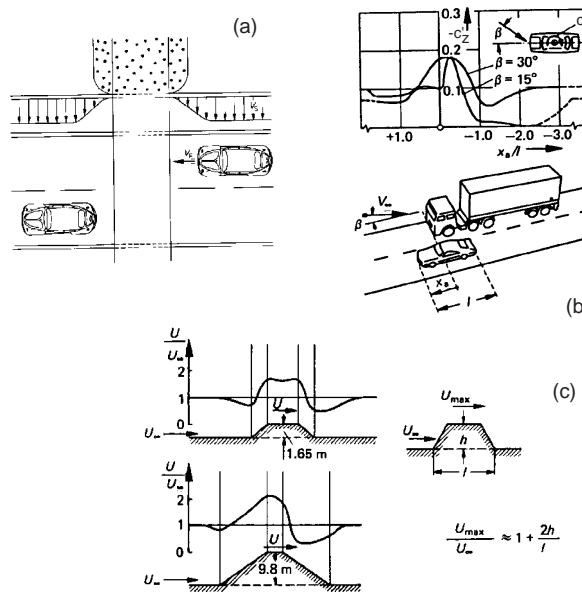


Figura 10.9: Perfil de velocidades del viento al atravesar un puente (a), a la salida de la sombra de un camión (b), y en un terraplén (c).

## 10.5 Influencia de Distintos Elementos

En esta sección se analiza la influencia de los distintos elementos que conforman la geometría del automóvil en su comportamiento aerodinámico. Para ello se hace uso de resultados experimentales concretos.

### 10.5.1 Morro

La forma del morro influye en la distribución de presiones sobre el mismo y, por tanto, en la resistencia aerodinámica. En casos de mal diseño del morro se tienen capas límite desprendidas. Este desprendimiento genera sustentación en el capó y disminuye la cantidad de movimiento del fluido necesaria para hacer frente a los gradientes adversos de presiones en la trasera del vehículo.

En el ejemplo de la Figura 10.10 se muestra cómo se ha retocado un diseño inicial hasta conseguir una mejora en el  $c_x$  global del 14%. Las mejoras 3, 4 y 5 consiguen todas el mismo efecto (10%), mientras que 6 y 7 son desviaciones importantes de estilo que se muestran para dar una idea de las máximas mejoras posibles. Es importante señalar que la pequeña modificación 2 ya consigue mejoras significativas (6%). La conclusión a obtener de este ejemplo es que es necesario mantener la capa límite adherida sobre el capó del vehículo, y que esto se puede conseguir fácilmente cuidando el diseño de la transición morro-capó. Un ejemplo en este sentido es el del VW Passat (Fig. 10.10). La versión del año 1977 se comercializaba con un morro que provocaba separación de la capa límite en el capó. El diseño se corrigió en la versión del año 1978 que contaba con un chaflán en la transición, suficiente para suavizar el flujo.

En el segundo ejemplo (VW Golf I, Fig. 10.11) se parte de dos diseños: el del estilista ( $M_0$ ) y el aerodinámicamente “ideal” ( $M_1 + K_1$ ). Se ve que ligeras modificaciones en el diseño original ( $M_3 + K_3$ ) consiguen, prácticamente, los mismos efectos que el diseño aerodinámico.

En un intento de encontrar la geometría óptima para el morro de automóviles, se ha realizado un estudio teórico sobre la posición que debe ocupar el punto de remanso de manera que el coeficiente de resistencia aerodinámica sea mínimo. La Figura 10.12 muestra los resultados de este estudio. Se observa que la posición óptima está próxima al extremo inferior de la carrocería.

### 10.5.2 Parabrisas y Pilar-A

La transición entre el capó y el parabrisas se suele hacer mediante un cambio más o menos brusco de pendiente. Esto da lugar a un punto de remanso que, en general, está inmerso en una burbuja donde la capa límite está desprendida. En la mayoría de configuraciones, existe un punto en el capó en el que el flujo se desprende, y un punto en el parabrisas en donde el flujo se re-adhiere. Estos puntos se separan a medida que aumenta la verticalidad del parabrisas (Fig. 10.13). La influencia directa de esta burbuja en el  $c_x$  global no es muy grande, de hecho, en algunos automóviles se aprovecha esta zona para esconder los limpia-parabrisas y eliminar así la contribución de éstos al  $c_x$  global.

La inclinación del capó y del parabrisas sí tiene influencia, aunque moderada, en el  $c_x$  global (Fig. 10.13). Los factores responsables de esta disminución son los siguientes. De una parte, la inclinación del parabrisas disminuye la velocidad excesiva del flujo en el pilar-A de manera que las pérdidas de cantidad de movimiento del fluido en esta transición

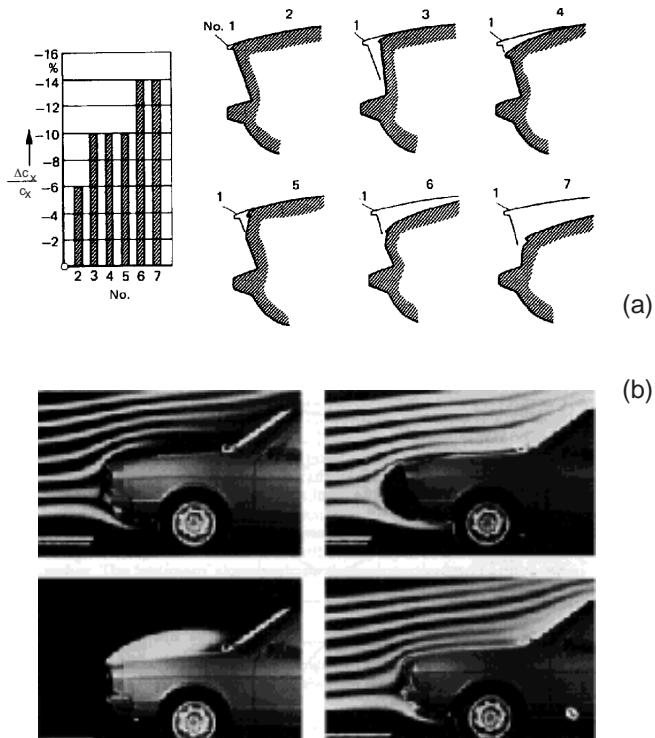


Figura 10.10: Reducción de la resistencia aerodinámica mediante ligeras modificaciones en el morro.

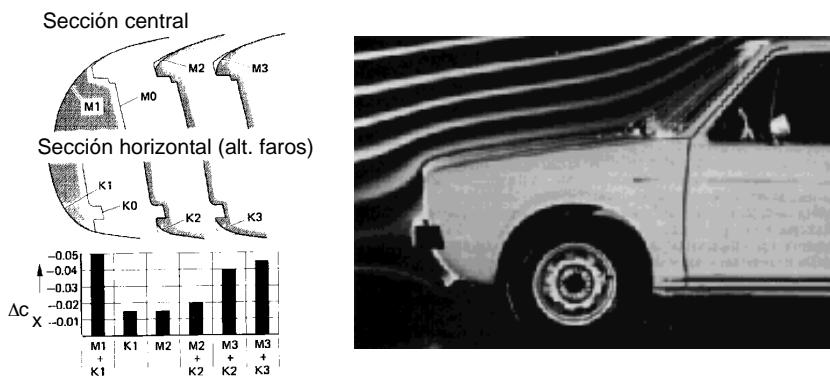


Figura 10.11: Optimización de detalle en el VW Golf.

se reducen considerablemente. Por otra parte, la deflexión del fluido en la transición parabrisas-techo es menor, esto reduce la depresión en esta zona (con lo que se consigue la mejora adicional de la disminución de sustentación) y hace menos pronunciado el gradiente adverso de presiones en el techo. Esto significa que la pérdida de cantidad de movimiento en la capa límite es menor, permitiendo una mayor recuperación en la parte trasera del vehículo. Quiere esto decir que un parabrisas inclinado contribuye más a la disminución

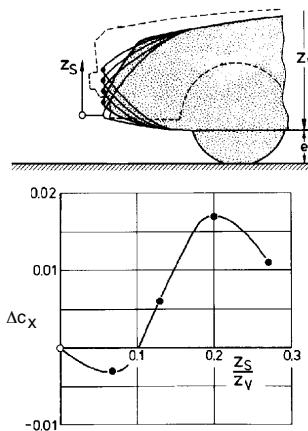
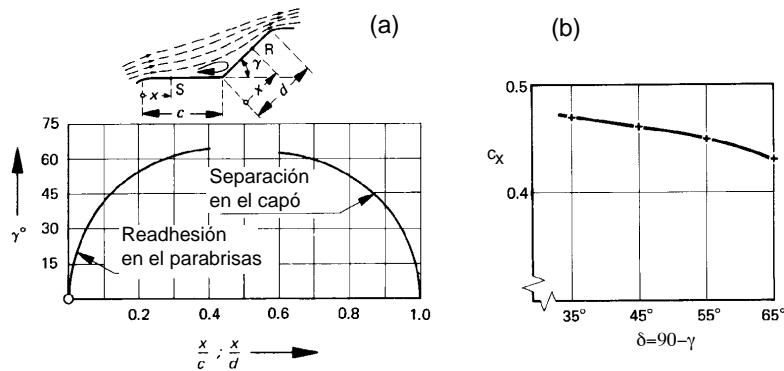


Figura 10.12: Posición óptima del punto de remanso.

Figura 10.13: Influencia del ángulo del parabrisas en las posiciones de los puntos de desprendimiento y adherencia (a) y en el  $c_x$  global (b).

del  $c_x$  global que a la resistencia local. La influencia es tanto mayor cuanto más abundante sea el caudal que se redirige hacia la parte superior del automóvil.

El diseño del pilar-A tiene una importancia considerable en la resistencia. Es importante que la deflexión del fluido sea suave, evitando que la capa límite se desprenda en esta zona. En la Figura 10.14 se muestra un ejemplo de diseño. Puede verse que es necesario desplazar el cristal de la ventana lateral hacia la parte exterior del pilar. El canalón para la recogida de agua contribuye a la resistencia, lo ideal sería no colocarlo, aunque se pueden conseguir prácticamente los mismos efectos desplazándolo hacia la zona del parabrisas.

### 10.5.3 Techo

El techo de la mayoría de los vehículos suele tener una cierta convexidad. El incremento de convexidad disminuye la resistencia aerodinámica siempre que esta curvatura no implique

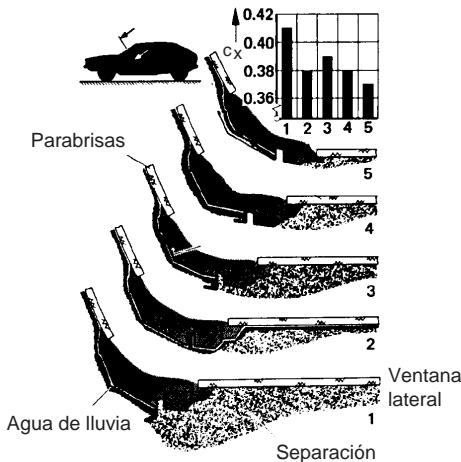


Figura 10.14: Diseño del pilar-A del VW Scirocco.

el aumento del área frontal del automóvil. A pesar de lo que pudiera parecer, el aumento de convexidad del techo no implica un aumento significativo de la sustentación debido a que la curvatura de la transición parabrisas-techo disminuye y, por tanto, la depresión local en esta zona se reduce.

#### 10.5.4 Trasera

El diseño de la parte trasera tiene una influencia considerable en la resistencia aerodinámica. En vehículos aéreos la sección frontal del fuselaje va disminuyendo muy suavemente, evitando que la capa límite se pueda desprender, hasta reducirla a un valor muy próximo a cero (trasera puntiaguda). Este diseño se observa claramente en el B747 cuya sección frontal aumenta bastante rápidamente en la parte delantera, y comienza a disminuir muy pronto para reducir la sección hasta hacerla parecida a la de salida de la turbina auxiliar. En automóviles, los problemas de espacio mandan más que los aerodinámicos y no se suelen diseñar traseras “sin estela”. Uno de los pocos prototipos es el Mercedes C111 III que cuenta con un coeficiente muy mejorado (Fig 10.15).

También es importante cuidar la curvatura del pilar-C para suavizar el flujo en esta zona. Los bajos en la parte trasera se deben chaflanar para conseguir un efecto difusor en esta sección que evacúe el flujo inferior (Fig. 10.16). Este difusor reduce, además, la sustentación en el eje trasero.

La Figura 10.17 muestra el coeficiente de resistencia aerodinámica en función del ángulo de inclinación del portón. Puede verse que para ángulos próximos a 30 se forman dos potentes vórtices que disminuyen considerablemente la presión en la trasera del vehículo dando lugar a un importante incremento de  $c_x$ .

En cuanto a la altura del maletero en automóviles de “tres volúmenes”, se puede ver en la Figura 10.17 que la resistencia aerodinámica disminuye monótonamente con dicha altura. Este es, posiblemente, uno de los pocos casos en ingeniería en que se mejoran dos problemas simultáneamente: volumen del portamaletas y resistencia aerodinámica. En este caso también es importante cuidar el ángulo del cristal trasero y la curvatura de la

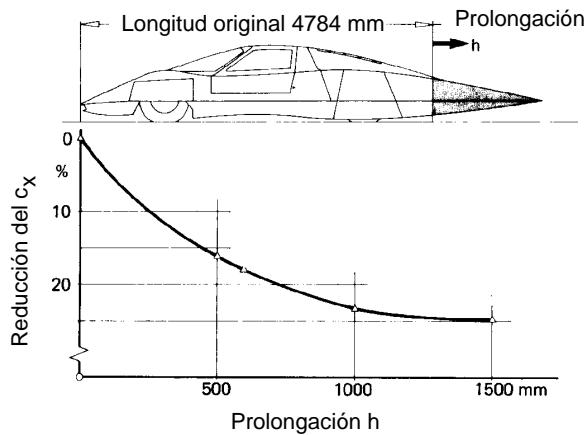


Figura 10.15: Trasera puntiaguda del Mercedes C111.

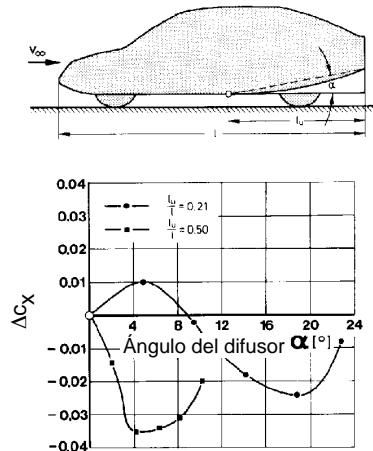


Figura 10.16: Difusor trasero.

transición techo–cristal.

La curvatura de la trasera en planta también influye en la resistencia aerodinámica. En la Figura 10.18 se muestra el valor del coeficiente  $c_x$  para distintas curvaturas del maletero. En la Figura 10.18 se muestra, también, un ejemplo de vehículo actual en donde esta curvatura es bastante apreciable.

Aunque no es conveniente generalizar las propiedades de los tres tipos de traseras sin entrar en los detalles de la construcción de cada caso concreto, se puede simplificar diciendo que:

1. Los vehículos tres volúmenes tienen:

$c_x$  alto

$c_{zr}$  alto

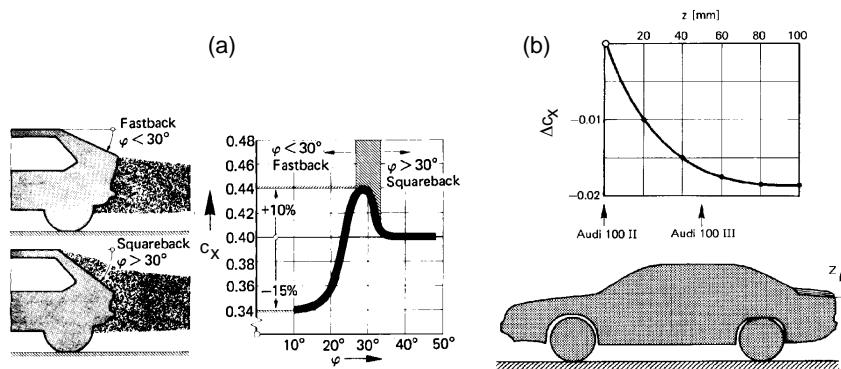


Figura 10.17: Coeficiente de resistencia aerodinámica en función del ángulo del portón trasero (a) y de la altura del maletero (b).

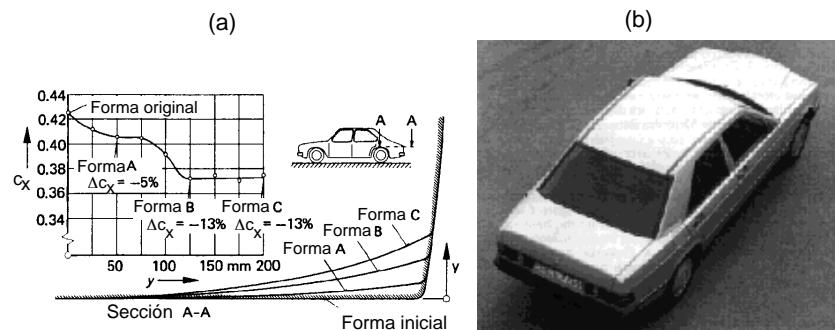


Figura 10.18: Influencia de la curvatura en planta sobre el  $c_D$  ( $c_x$ ).

$c_{yr}$  moderado

2. Los vehículos de trasera cortada tienen:

$c_x$  moderado

$c_{zr}$  bajo

$c_{yr}$  alto

3. Los vehículos coupé tienen:

$c_x$  bajo

$c_{zr}$  bajo

$c_{yr}$  alto

### 10.5.5 Spoiler Trasero

La utilidad fundamental del spoiler trasero es disminuir la sustentación en el eje trasero aún a costa, a veces, de aumentar ligeramente la resistencia. El spoiler rompe la estela

antes de tiempo para evitar la generación de una zona de flujo curvo y suave que produzca depresión local en la parte superior de la trasera.

En la Fig. 10.19 se muestra la variación de los coeficientes de sustentación, delantero ( $c_{zf}$ ) y trasero ( $c_{zr}$ ), y el de resistencia ( $c_x$ ) en función de la altura del spoiler. La sustentación trasera disminuye sustancialmente con la altura del spoiler. El  $c_x$  disminuye ligeramente con alturas pequeñas para subir suavemente con alturas crecientes. La sustentación delantera aumenta muy suavemente.

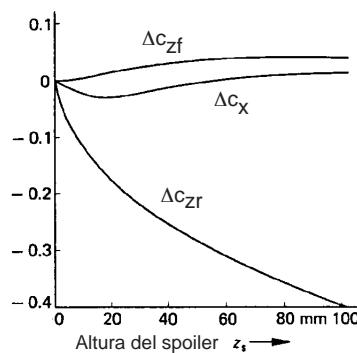
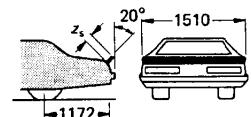


Figura 10.19: Coeficientes de sustentación y de resistencia en función de la altura del spoiler trasero.

### 10.5.6 Bajos

La contribución a la resistencia total de los bajos del automóvil se debe, fundamentalmente, a la fricción del aire con esta parte del vehículo que puede ser considerada una placa muy rugosa. Si se cubren totalmente los bajos con una chapa lisa se mejoraría el  $c_x$  pero se tendrían problemas de refrigeración del motor. Es preferible disminuir este rozamiento a base de reducir el caudal de aire que circula por la parte inferior.

### 10.5.7 Faldón o Spoiler Delantero

Este faldón reduce el flujo en la parte inferior con lo que disminuye sustancialmente el rozamiento por fricción en los bajos. Además, la presión en la parte delantera inferior se reduce considerablemente. Esto no debe atribuirse al aumento de velocidad del fluido sino a la existencia de una zona de flujo desprendido. Esta disminución de presión reduce el  $c_{zf}$  considerablemente.

El faldón delantero redirige más caudal hacia la parte superior del vehículo, de manera que es necesario cuidar el diseño de esta zona para no incurrir en penalizaciones adicionales sobre el  $c_x$ . También es necesario considerar el aumento de caudal que atraviesa los sistemas de refrigeración y ventilación. Por otra parte el faldón disminuye el caudal en

el difusor trasero lo cual puede anular la efectividad del mismo. La interrelación entre “faldón delantero” – “placa rugosa de los bajos” – “difusor trasero” no se ha estudiado sistemáticamente.

#### 10.5.8 Laterales

La influencia es similar a la comentada para el techo. A mayor curvatura menor resistencia, a no ser que con ello se aumente el área frontal del automóvil. Como se ha comentado los cristales deben retranquearse lo menos posible.

#### 10.5.9 Ruedas

El movimiento del fluido alrededor de una rueda girando sobre el suelo es complicado. Ya se ha mencionado que su influencia sobre la resistencia aerodinámica es considerable. Si se añaden ruedas a un cuerpo fuselado, su resistencia aerodinámica se dobla. Lo mejor que se puede hacer para disminuir la contribución de las ruedas a la resistencia es reducir el caudal que entra en la zona de acción las mismas, y disminuir la distancia entre rueda y guardabarros. En ruedas delanteras se puede, incluso, colocar guardabarros que se muevan con la rueda. En este caso, el espacio extra para maniobrar no está afectado por la rotación de la rueda.

#### 10.5.10 Antena y Espejos

Estos elementos adicionales contribuyen en torno a un 2% del  $c_x$  global cada uno. Por otra parte el incremento de área frontal suele ser del orden de 0.5%. Además de contribuir por sí mismos a la resistencia aerodinámica, modifican y perturban el flujo alrededor del cuerpo principal del vehículo.

#### 10.5.11 Ángulo de Ataque

Todo lo comentado anteriormente se refiere a la posición horizontal del vehículo. Cuando la distribución de carga es tal que que el automóvil se coloca formando un determinado ángulo de ataque con el flujo horizontal, se tiene un incremento de la resistencia aerodinámica acompañado de un aumento de sustentación. Para los pequeños ángulos de inclinación que se producen normalmente, el incremento de coeficientes está en torno a un 2%.

### 10.6 Aerodinámica de Vehículos Industriales

Las velocidades que en la actualidad alcanzan los vehículos industriales hacen necesario un cuidadoso diseño aerodinámico de este tipo de vehículos. Las áreas frontales de camiones, autobuses, furgonetas y turismos están en la relación 9 : 7 : 4 : 2. Esto significa que las resistencias totales crecen, al menos, como los valores anteriores.

En cualquier caso, las velocidades habituales en vehículos industriales son menores que en vehículos turismo. Esto quiere decir que la importancia relativa de los vientos laterales es mayor en los primeros. Por tanto, el análisis de resistencia aerodinámica se hace, en este caso, en función del ángulo de ataque horizontal:  $\beta$ .

La Figura 10.20 muestra los valores del coeficiente  $c_x$  para una cabina aerodinámica y otra cuadrada. Para  $\beta = 0$  los  $c_x$  son muy parecidos. Esto podría llevar a la conclusión

de que la forma de la cabina no influye en su resistencia aerodinámica. Sin embargo, si se divide el  $c_x$  en cada uno de sus componentes (tractora sola, y total menos tractora, Fig. 10.20) se puede explicar el resultado de una manera lógica. La cabina angulosa desprende el flujo en sus aristas. Esto supone casi toda la contribución del camión a la resistencia, de hecho, la colocación del remolque tiene una influencia nula o incluso negativa, esto es, el remolque puede reconducir el flujo aumentando ligeramente la presión en la estela. En el caso de tractora aerodinámica, la contribución de ésta a la resistencia total es muy baja. Sin embargo, al colocar el remolque el flujo suave de la cabina se estrella contra el frontal del trailer. La contribución de éste a la resistencia es enorme y el resultado global es similar en ambas cabinas para ángulos bajos.

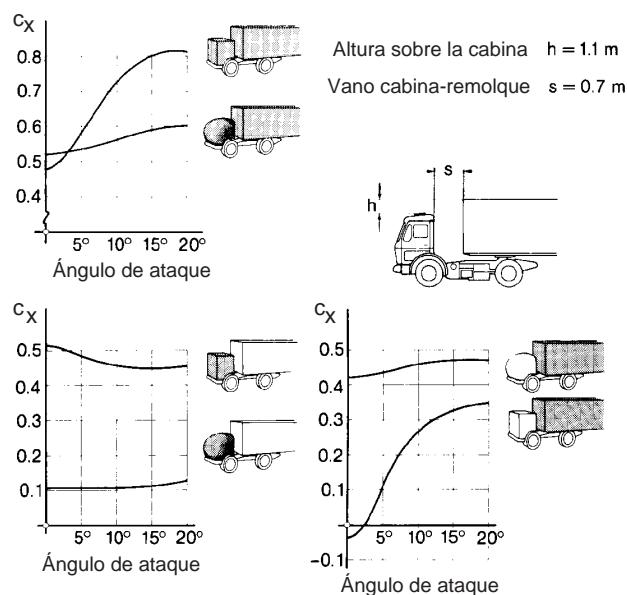


Figura 10.20: Coeficiente  $c_x$  global y descompuesto en función del ángulo de incidencia.

Como ya se ha hecho patente en la aerodinámica de automóviles, una cabina de diseño cuidado, aun cuando tenga apariencia cúbica, puede tener una resistencia próxima a la de una cabina de diseño aparentemente más aerodinámico. Esto se pone de manifiesto en los resultados de la Figura 10.21.

Para reducir la tremenda contribución del remolque a la resistencia, se pueden colocar deflectores sobre el techo de la cabina o, mejor, bulbos de curvatura suave sobre la parte frontal del remolque. En la Figura 10.22 se muestra la resistencia aerodinámica de distintas cabinas con cada tipo de deflector. Puede verse en la Figura que la mejor solución corresponde a una cabina de aristas suaves y un remolque provisto de un bulbo que suavice el encuentro del flujo con su frontal. Esta solución tiene además la ventaja de no aumentar el área frontal de la tractora cuando viaja sola.

En el caso de autobuses, en donde no existe la interferencia cabina-remolque, se demuestra de nuevo, que es mucho más importante un suficiente ángulo de acuerdo entre frente y laterales (y techo) que un perfil perfectamente fuselado (Fig. 10.23, de  $c_x = 0.88$  a  $c_x = 0.36$ ). Claro que un perfil fuselado reduce las presiones en el frontal y disminuye

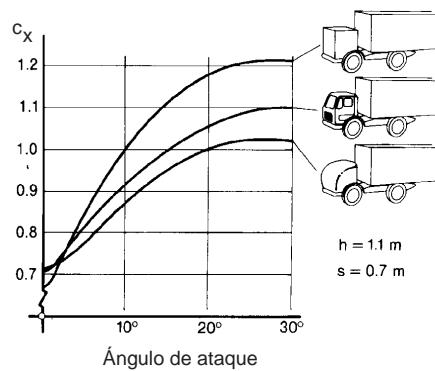


Figura 10.21: Influencia del diseño de la cabina.

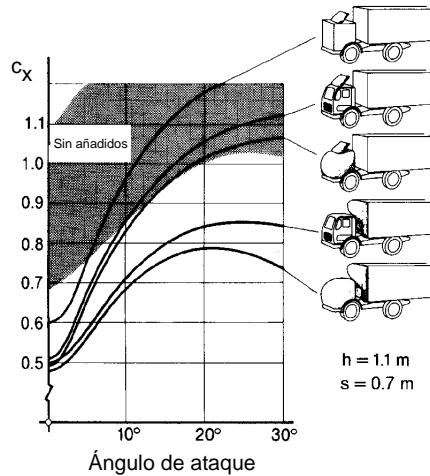


Figura 10.22: Influencia de los distintos tipos de deflectores.

el coeficiente ( $c_x = 0.34$ ), pero como puede verse, la reducción, aunque importante, no es comparable a la obtenida redondeando los bordes. Además, esta mejora está reñida con las limitaciones de espacio que, por ahora, pesan más en este campo.

En cuanto a la trasera de este tipo de vehículos se puede decir lo mismo que para automóviles. Las limitaciones de espacio y de estética impiden diseñar traseras fuseladas capaces de permitir que el fluido remonte el gradiente de presiones sin desprendimiento. Los diseños actuales se limitan a crear un difusor en la parte inferior y a redondear los bordes de salida.

La Figura 10.24 muestra una visión conceptual de lo que pueden ser las modificaciones en vehículos industriales desde el punto de vista de su comportamiento aerodinámico, la descripción de un tal camión podría ser como sigue. El faldón delantero se prolonga para reducir el caudal en los bajos del vehículo. El techo de la cabina redirige el flujo hacia el remolque. La unión cabina-remolque impide la penetración del flujo en esta zona. Estas

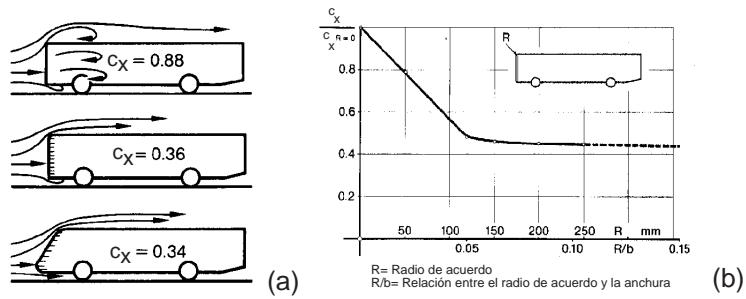


Figura 10.23: Influencia del diseño del frontal de autobuses.

cubiertas se repliegan a baja velocidad para permitir la maniobrabilidad. La trasera se hace lo más fuselada posible. Toda la parte inferior del camión, incluidas las ruedas, está carenada para impedir la ingestión de flujo exterior, estos faldones podrían ser retráctiles para permitir la circulación del camión por zonas accidentadas.

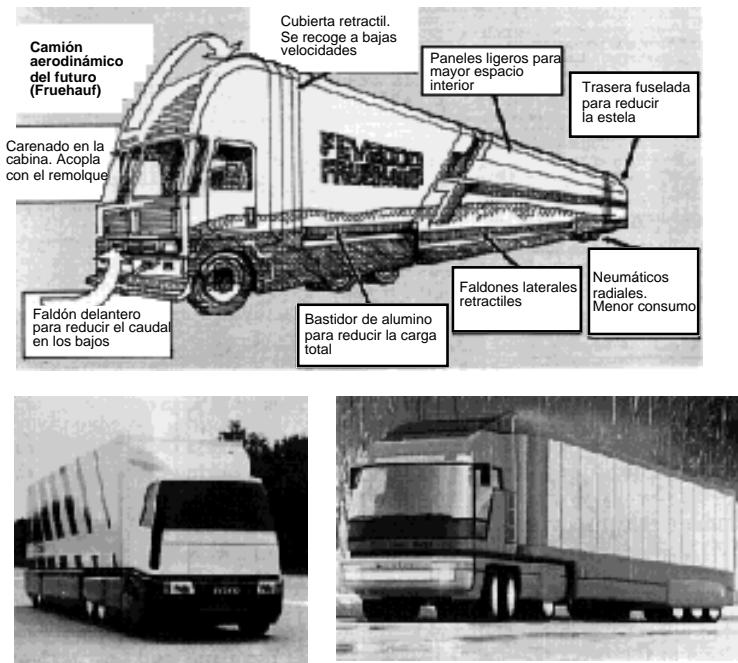


Figura 10.24: Diversos diseños de vehículos industriales “aerodinámicos”.



## Apéndice A

# Análisis de Vibraciones Aleatorias

### A.1 Caracterización de Vibraciones Aleatorias

#### A.1.1 Concepto de Vibración Aleatoria

Se dice que un sistema mecánico está vibrando si sus componentes experimentan movimientos que fluctúan con el tiempo. Los registros de la vibración (tomados de transductores como acelerómetros o galgas extensométricas) pueden tener una apariencia regular o irregular. En general, estamos inclinados a decir que el registro irregular corresponde a una vibración con una cierta componente aleatoria. Sin embargo, cualquiera de estos registros corresponderá a un proceso vibratorio determinista si al repetir el experimento, bajo las mismas condiciones, se obtienen registros similares. En cambio, si los resultados de experimentos (en los que las condiciones bajo control se mantienen idénticas) difieren continuamente se dice que la vibración es aleatoria.

Los optimistas afirman que los procesos aleatorios no existen, se trata simplemente de un desconocimiento de las variables que intervienen en el problema. Si conocieramos exactamente las condiciones iniciales en el lanzamiento de un dado se podría estudiar su trayectoria y conocer la cara que va a salir una vez disipada la energía cinética inicial. Los pesimistas afirman que todo proceso es aleatorio puesto que el número de variables que intervienen en el mismo es enorme y el control sobre cada una de ellas imposible. Al despreciar la mayoría de las variables del proceso se está haciendo una aproximación a la realidad. Las dos posturas son correctas, cuando la influencia de “la componente aleatoria” es pequeña, los procesos se estudian como deterministas, mientras que en el caso en el que el número de variables (que sería necesario emplear para hacer una aproximación determinista del problema) es muy elevado, el proceso se trata como aleatorio.

Ejemplos típicos de vibraciones aleatorias son las producidas en un automóvil por la rugosidad de la carretera y las producidas en un avión por el movimiento turbulento de gases en el reactor. Para tratar el caso del automóvil de manera determinista se necesitaría una representación bidimensional precisa de la carretera, y la trayectoria exacta que sobre dicha carretera describe cada neumático. La monstruosidad del problema resultante lo hace intratable. Es mucho más económico y útil tratar el problema como aleatorio. En el caso del avión, los conocimientos físicos actuales no permiten describir el fenómeno de la turbulencia de forma determinista. No existe, de momento, otra posibilidad que describirlo como proceso aleatorio.

### A.1.2 Proceso Aleatorio, Variable Aleatoria y Su Descripción Estadística

Para obtener una descripción estadística del proceso aleatorio  $x(t)$  es necesario analizar un número elevado de muestras  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ , cada una de ellas corresponde a un registro de vibración función del tiempo. Al especificar el valor del parámetro  $t = T$  se obtiene una variable aleatoria  $x(T)$  que estará descrita por su correspondiente *función de densidad de probabilidad*  $p(x(T))$ . En la Figura A.1 se representan los valores de las variables aleatorias  $x_i(T)$  en función del número de muestra.

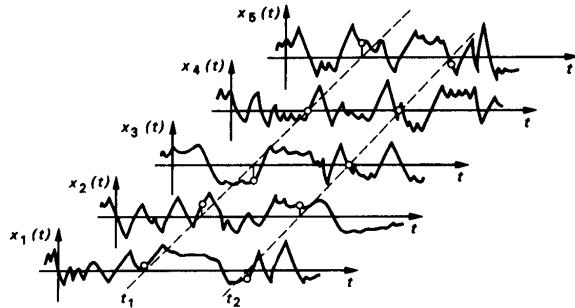


Figura A.1: Muestras de un proceso aleatorio.

La función de densidad de probabilidad  $p(x)$  se define como la derivada de la distribución de probabilidad, de esta manera, la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre  $a$  y  $b$  viene dada por:

$$P(a < x < b) = \int_a^b p(x) dx$$

Puesto que la probabilidad de que la variable aleatoria (número real) tome un valor comprendido entre  $-\infty$  y  $+\infty$  es 1, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

El valor esperado de cualquier función de la variable aleatoria es:

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx$$

y, en concreto, el valor esperado para la variable aleatoria (media) es:

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

La varianza se define como:

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx$$

Una distribución que puede representar bastantes variables aleatorias es la distribución normal, a la que corresponde la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Cuando se tienen varias variables aleatorias (como se ha visto, en el caso de vibraciones aleatorias se tienen muchas) se pueden definir las funciones de densidad de probabilidad conjuntas. La función de densidad conjunta para las variables  $x$  e  $y$  se define a través de la siguiente relación:

$$P(a < x < b, c < y < d) = \int_a^b \int_c^d p(x, y) dx dy$$

Una de las más usadas es la distribución normal:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left( \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right]}$$

La probabilidad marginal se obtiene al considerar la densidad de probabilidad de una variable para todos los valores posibles de la otra:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \\ p_2(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx \end{aligned}$$

La esperanza de una función cualquiera de las variables aleatorias es:

$$E[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy$$

en concreto, las medias de cada variable son:

$$\begin{aligned} \mu_x &= E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx \\ \mu_y &= E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} y p_2(y) dy \end{aligned}$$

y la covarianza:

$$\mu_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) p(x, y) dx dy$$

El coeficiente de correlación se define como:

$$\rho_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Este coeficiente toma el valor 1 (o -1) para variables perfectamente correlacionadas entre sí. La demostración es la siguiente. Sean dos variables aleatorias  $x$  e  $y$  y sus valores muestra representados en el plano  $xy$ . Si el aspecto de esta representación es el mostrado en la Figura A.2a, las variables no estarán correlacionadas. Por el contrario, si el aspecto es el mostrado en la Figura A.2b, las variables tendrán un cierto grado de correlación. En lo que sigue se supone que los ejes se han modificado para hacer coincidir el origen con el centro de gravedad de la nube de puntos. Existen dos formas de representar  $y$  como función de  $x$ :

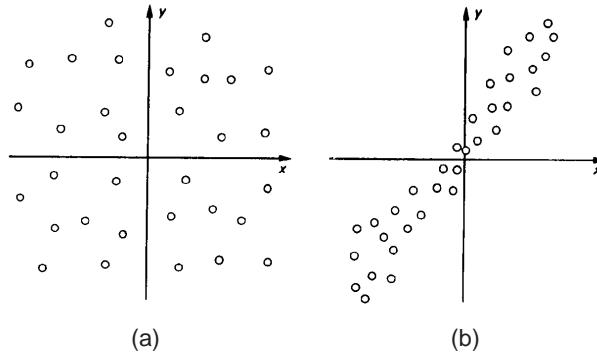


Figura A.2: Aspecto de las nubes de datos con correlación baja y alta.

1. Minimizar la distancia de  $y$  al valor dado por la recta de regresión. Con esto se obtiene lo que se llama la regresión de  $y$  sobre  $x$ .
2. Minimizar la distancia de  $x$  al valor dado por la recta de regresión de  $x$  sobre  $y$ .

En el primer caso, la media del cuadrado de las desviaciones ( $\Delta$ ) del valor real respecto del predicho por la recta de regresión ( $y = mx$ ) es:

$$E [\Delta^2] = E [(y - mx)^2] = \sigma_y^2 + m^2 \sigma_x^2 - 2m\mu_{xy}$$

Este valor es mínimo cuando:

$$\frac{\partial E [\Delta^2]}{\partial m} = 0 \Rightarrow m = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2}$$

es decir:

$$\frac{y}{\sigma_y} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \frac{x}{\sigma_x} = \rho_{xy} \frac{x}{\sigma_x}$$

Análogamente, la regresión de  $x$  sobre  $y$  es:

$$\frac{x}{\sigma_x} = \rho_{xy} \frac{y}{\sigma_y}$$

Las variables aleatorias estarán perfectamente correlacionadas cuando  $\rho_{xy} = \pm 1$ , esto es, cuando las dos rectas sean la misma, de ahí el nombre que recibe este coeficiente.

Para un par de variables ( $x(t)$  y  $x(t + \tau)$ ) que pertenecen al mismo proceso aleatorio, se puede definir la autocorrelación como:

$$R(\tau) = E [x(t)(x(t + \tau)]$$

Como se verá más adelante, el contenido en frecuencia de una vibración aleatoria se describe en base a esta función de autocorrelación.

### A.1.3 Proceso Estacionario y Ergódico

Un proceso aleatorio es estacionario si todas las funciones de densidad de probabilidad coinciden, es decir, si  $p(x(t))$  es independiente de  $t$  ( $p(x(t)) = p(x)$ ). Cuando un proceso es estacionario es posible imaginar que los valores de  $x$  en un registro ( $x_1(t)$ ) representan los valores que puede tomar cada una de las variables aleatorias del proceso. Con esta imagen mental, es posible definir una función de densidad de probabilidad para describir la “variable”  $x_1$  (sea  $p(x_1)$ ). Si esta función de densidad coincide con la del proceso aleatorio ( $p(x_1) = p(x)$ ), entonces se dice que el proceso es ergódico. Cuando se hace la suposición de que un proceso es ergódico, se puede obtener su descripción estadística a partir de un único registro. En lo que sigue se supone que los procesos aleatorios son estacionarios y ergódicos.

### A.1.4 Autocorrelación y Densidad Espectral

Para un proceso estacionario se tiene que:

$$E[x(t)] = E[x(t + \tau)] = \mu$$

$$\sigma_{x(t)} = \sigma_{x(t+\tau)} = \sigma$$

de manera que la autocorrelación está acotada por:

$$\mu^2 - \sigma^2 \leq R(\tau) \leq \mu^2 + \sigma^2$$

que se obtiene del hecho de que:

$$\rho_{x(t)x(t+\tau)} = \frac{R(\tau) - \mu^2}{\sigma^2}$$

La representación de la Figura A.3 muestra el aspecto típico de una función de autocorrelación.

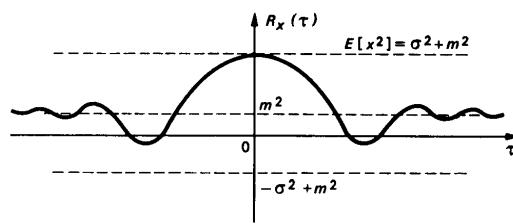


Figura A.3: Aspecto típico de una función de autocorrelación.

Para describir el contenido en frecuencias de un registro aleatorio sería necesario obtener la transformada de Fourier de dicho registro. En la teoría clásica de Fourier se requiere que la función a transformar tienda a cero para valores grandes de la variable independiente. Puesto que esta condición no se cumple en el caso de vibraciones aleatorias, el contenido en frecuencias se describe indirectamente haciendo uso de la función de autocorrelación. Este rodeo no es estrictamente necesario con las técnicas actuales de

análisis de frecuencias y el uso de funciones generalizadas, sin embargo, se sigue usando, porque la formulación a que da lugar esta definición es de una potencia muy superior a la que se obtendría de otra manera. Se define entonces la *Densidad Espectral* como la transformada de Fourier, salvo constantes, de la función de Autocorrelación:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

El siguiente ejemplo aclara cómo la densidad espectral representa el contenido en frecuencias del registro original. Sea  $x(t) = \sin(\omega_0 + a)t$ , en donde se supone que el desfase  $a$  es aleatorio. La probabilidad de encontrar  $x$  entre  $-1$  y  $1$  se supone uniforme,  $p(x) = 1/2$  para cada variable aleatoria. El proceso resultante es estacionario aunque no ergódico. Si se supone que un registro representa los valores posibles de una variable aleatoria se obtendría la siguiente función de densidad de probabilidad (Fig. A.4):

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

que no coincide con la dada arriba para el proceso aleatorio, con lo que el proceso no es ergódico.

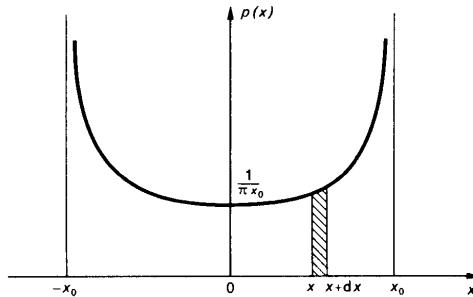


Figura A.4: Función de densidad de probabilidad cuando las muestras vienen dadas por la función seno.

Supongamos, no obstante, que la función de autocorrelación puede obtenerse mediante la expresión:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t + \tau) p(x) dx$$

y puesto que:

$$x(t + \tau) = \sin \omega_0(t + \tau) = x \cos \omega_0 \tau + \sqrt{1 - x^2} \sin \omega_0 \tau$$

se tiene que:

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau$$

La transformada de Fourier de esta función es:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{12\pi} \left[ \frac{\sin(\omega_0 + \omega)\tau}{(\omega_0 + \omega)} + \frac{\sin(\omega_0 - \omega)\tau}{(\omega_0 - \omega)} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{12} [\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega)] \end{aligned}$$

Luego la densidad espectral describe el contenido en frecuencias de la vibración aleatoria. En este caso, la única frecuencia presente es  $\omega_0$ .

### A.1.5 Procesos de Banda Estrecha y Banda Ancha

En el apartado anterior se ha visto que la densidad espectral describe el contenido en frecuencias de un proceso aleatorio. Teniendo esto en cuenta, se pueden definir dos tipos de procesos: procesos de banda estrecha y procesos de banda ancha. Los procesos de banda ancha son aquellos en los que la vibración tiene un contenido significativo en una gran cantidad de frecuencias distintas. El aspecto típico de estas vibraciones es el mostrado en la Figura A.5a. El caso extremo corresponde al *ruido blanco* en el que todas las frecuencias tienen el mismo peso específico. El nombre de ruido blanco está relacionado con el hecho de que la luz blanca está compuesta de todos los colores del espectro visible.

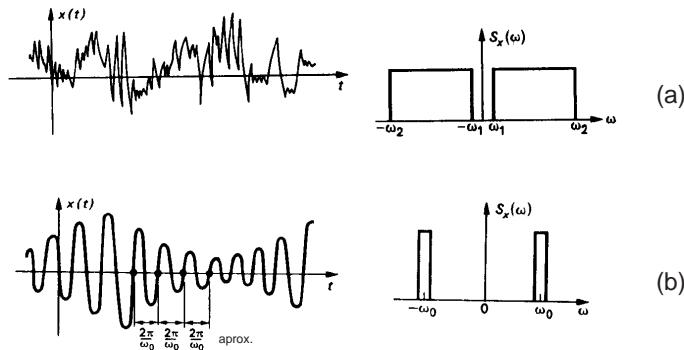


Figura A.5: Proceso de banda ancha (a) y banda estrecha (b).

En el caso en que la vibración tenga un contenido limitado de frecuencias centradas sobre una frecuencia dada, se tiene un proceso de banda estrecha. La banda se considera estrecha si su ancho es pequeño en comparación con la frecuencia central de la banda. El aspecto típico de una tal vibración es el mostrado en la Figura A.5b.

### A.1.6 Densidad Espectral de un Proceso Derivado

Conocida la densidad espectral de un proceso es posible obtener la densidad espectral de sus derivadas. Así, conocida la densidad espectral del desplazamiento de un punto en una vibración, pueden obtenerse las densidades espectrales de la velocidad y aceleración del punto. Haciendo uso de las definiciones de autocorrelación y densidad espectral, se obtiene:

$$\begin{aligned} S_{\dot{x}}(\omega) &= \omega^2 S_x(\omega) \\ S_{\ddot{x}}(\omega) &= \omega^4 S_x(\omega) \end{aligned}$$

### A.1.7 Correlación y Densidad Espectral Cruzadas

Cuando se tienen más de un proceso aleatorio, es posible definir la función de correlación cruzada entre cada dos procesos:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t + \tau)]$$

Si los dos procesos son estacionarios se tiene que:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

La definición anterior da lugar al concepto de densidad espectral cruzada:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

que verifica la propiedad:

$$S_{yx}(\omega) = S_{xy}^*(\omega)$$

donde  $*$  indica complejo conjugado. Se hará uso de estas funciones en el caso de vibraciones de sistemas de varios grados de libertad.

## A.2 Análisis de Fourier

### A.2.1 Serie y Transformada de Fourier

Toda función periódica ( $x(t)$ ) puede expresarse como una serie infinita de términos armónicos de la siguiente manera:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i\omega_k t}$$

Los coeficientes  $X_k$  indican el “peso específico” que cada frecuencia tiene en la función en cuestión, representan la amplitud con la que cada armónico interviene en la suma. Estos coeficientes se obtienen a partir de la función  $x(t)$  mediante la expresión:

$$X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

Para funciones no periódicas, se puede hacer una extensión de lo anterior haciendo que  $T$  tienda a infinito. En este caso, la separación entre frecuencias se hace cero y el contenido en frecuencias pasa a ser un espectro continuo que se conoce como Transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \tag{A.1}$$

La función original se recupera como la “suma” ponderada de armónicos:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Para que exista la transformada anterior es suficiente que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

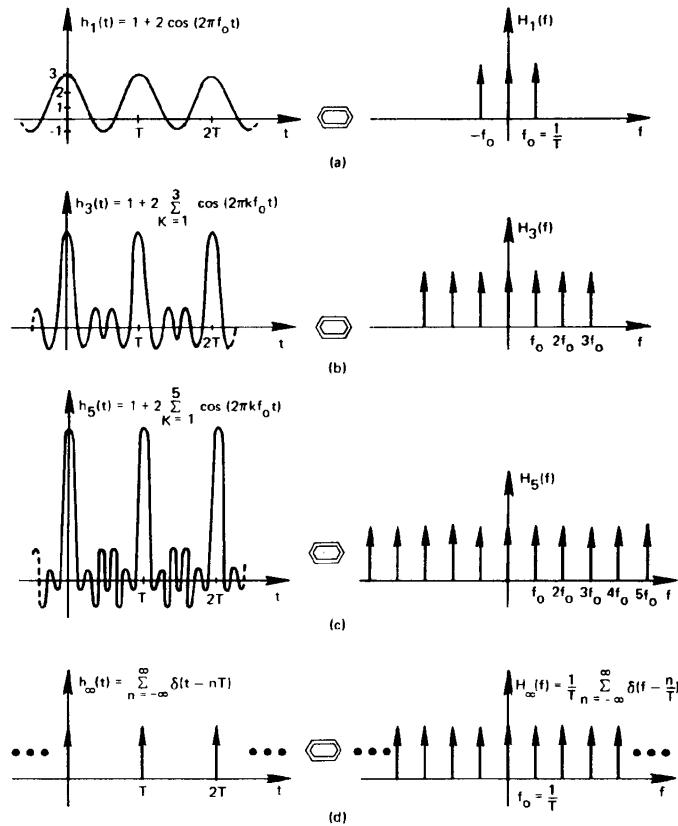


Figura A.6: Imagen gráfica de la obtención de la transformada de un peine de deltas de Dirac.

aunque no es necesario. De hecho, con el uso de funciones generalizadas se puede considerar la serie de Fourier como caso particular de la transformada de Fourier. Una visualización gráfica del proceso de obtención de la transformada del peine de deltas de Dirac se muestra en la Figura A.6.

Puesto que la parte real de la exponencial compleja es el coseno (par) y su parte imaginaria es el seno (ímpar), se tiene que la transformada de cualquier función real tiene parte real par y parte imaginaria ímpar. Si además la función real es par, la transformada será real y par. Si la función real es ímpar, la transformada será imaginaria e ímpar.

### A.2.2 Convolución de Dos Funciones

Se define el producto de convolución entre dos funciones de  $t$  ( $x(t)$ ,  $y(t)$ ) como una nueva función de  $t$  ( $y(t)$ ) dada por:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

Haciendo un cambio de variable, es fácil deducir que el producto de convolución es commutativo. La versión gráfica del producto se ofrece en la Figura A.7 que representa las siguientes operaciones: obtener la imagen espectral (respecto del origen) de una de las

funciones; trasladarla hacia la izquierda una cantidad  $t$ ; multiplicarla por la segunda de las funciones que intervienen en el producto y obtener la integral del resultado; repetir lo anterior para todo valor de  $t$  desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ .

Con la imagen anterior en mente, y teniendo en cuenta que la integral (en todo el eje real) de una función por la delta de Dirac es el valor de la función en el punto en que se encuentra situada la delta, puede comprobarse que el producto de convolución de una función cualquiera y un peine de deltas de Dirac resulta en “la superposición de la repetición periódica de la imagen espectral de la función”. La imagen de la función se repite a sí misma cada vez que, en su movimiento de translación, atraviesa una de las deltas de Dirac que forman el peine correspondiente. Es evidente, entonces, que se producirán superposiciones en el caso en que la separación de las deltas sea inferior al rango significativo de la función. Una propiedad de interés en el análisis de Fourier es el hecho de que la transformada del producto de convolución es el producto de las transformadas:

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

donde las funciones en mayúscula son las transformadas de las correspondientes funciones en minúscula. La utilidad de esta propiedad se verá en lo que sigue.

### A.2.3 Transformada de Funciones Discretizadas

Para operar con funciones en ordenadores digitales es necesario obtener representaciones discretas de las mismas. La discretización consiste en la representación de la función mediante sus valores en un conjunto numerable y finito de puntos. Matemáticamente esta discretización es el resultado de multiplicar la función original por un peine de deltas. La transformada del registro discreto será entonces el producto de convolución de las transformadas (Fig. A.8). Si la separación entre valores discretos es suficientemente pequeña, se obtendrá una repetición sucesiva de la transformada deseada. Si esta separación es poco densa, dará lugar a la superposición de la transformada con ella misma, obteniendo una función que no representa a la transformada real (Fig. A.9). Es fácil ver que el máximo espaciamiento entre valores discretos es:

$$T \leq \frac{1}{2f_c}$$

donde  $f_c$  es la máxima frecuencia presente en el registro (frecuencia de corte). En registros en los que todas las frecuencias están presentes existe un cierto grado de superposición para cualquier  $T$  elegido. El valor  $1/2T$  se conoce como frecuencia de Nyquist.

### A.2.4 Transformada Discreta de Fourier

La obtención de la integral A.1 de manera discreta requiere de los siguientes pasos: obtener una representación discreta de la función a transformar, truncar el registro resultante para manejar un vector finito, y obtener una representación discreta de la transformada resultante.

En la Figura A.10 se muestra la función y la transformada que se pretende hallar de manera discreta. La discretización de la función requiere multiplicarla por un peine de deltas de Dirac. La transformada que se obtendrá (producto de convolución de las transformadas) será una repetición periódica de la transformada real que sólo representará a

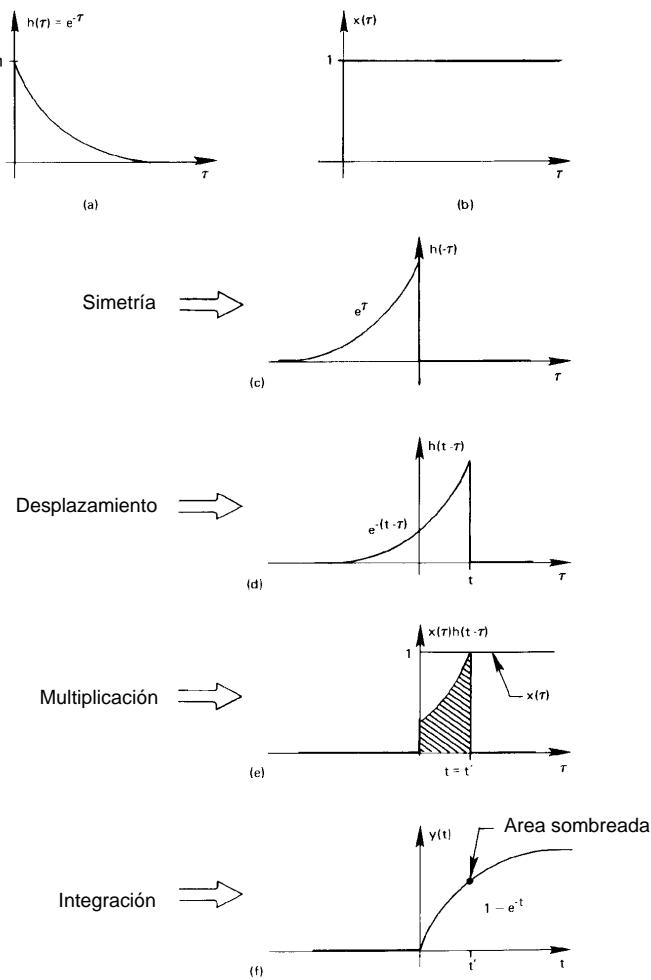


Figura A.7: Operaciones sobre dos funciones para obtener su producto de convolución.

ésta en el intervalo  $(-1/2T, 1/2T)$ . El truncamiento de la serie consiste en multiplicar el registro discreto por la función pulso. El producto de convolución de las transformadas introduce un pequeño rizado. Este error puede minimizarse aumentando el intervalo considerado  $(-T_0/2, T_0/2)$ .

Para obtener una representación discreta de la transformada es necesario multiplicarla por un peine de deltas como el de la Figura A.10. Esto implica que la función que en realidad se está transformando (convolución del registro discreto con un peine de deltas) es la repetición periódica de la original. En resumen, al transformar una función de manera discreta se está en realidad transformando una función periódica (de periodo  $2T_0$ ) y el resultado es también una función periódica que representa a la transformada real en el intervalo  $(-1/2T, 1/2T)$ .

Algunos autores obtienen la definición de transformada discreta de Fourier a partir de las expresiones de la serie de Fourier. La justificación necesaria se basa en los comentarios del párrafo anterior. Alternativamente, se puede obtener la expresión de la transformada

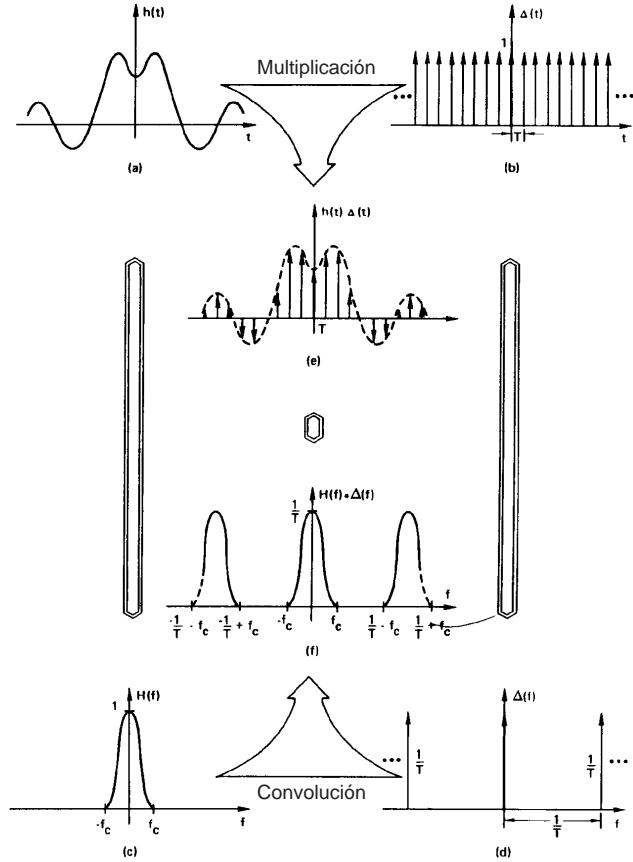


Figura A.8: Transformada de una función con una discretización suficientemente fina.

discreta efectuando el proceso descrito anteriormente sobre la expresión de la integral de Fourier. En cualquiera de los dos casos se obtiene que la transformada de un registro discreto  $\{x_r\}$  viene dada por:

$$X_k = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_r e^{-i \frac{2\pi k}{N} r} \quad (A.2)$$

y el registro original puede recuperarse con la expresión:

$$x_r = \frac{\Delta \omega}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i \frac{2\pi k}{N} r}$$

### A.2.5 Transformada Rápida de Fourier

El uso de la transformada discreta de Fourier se ha visto impulsado por el desarrollo de ordenadores digitales, y por la implementación de algoritmos rápidos para el cálculo de todos los sumatorios de la expresión A.2. Para transformar una serie de  $N$  elementos es necesario realizar  $N^2$  multiplicaciones, el tiempo necesario para la ejecución es aproximadamente proporcional a  $N^2$ . Este tiempo puede llegar a hacer el problema intratable

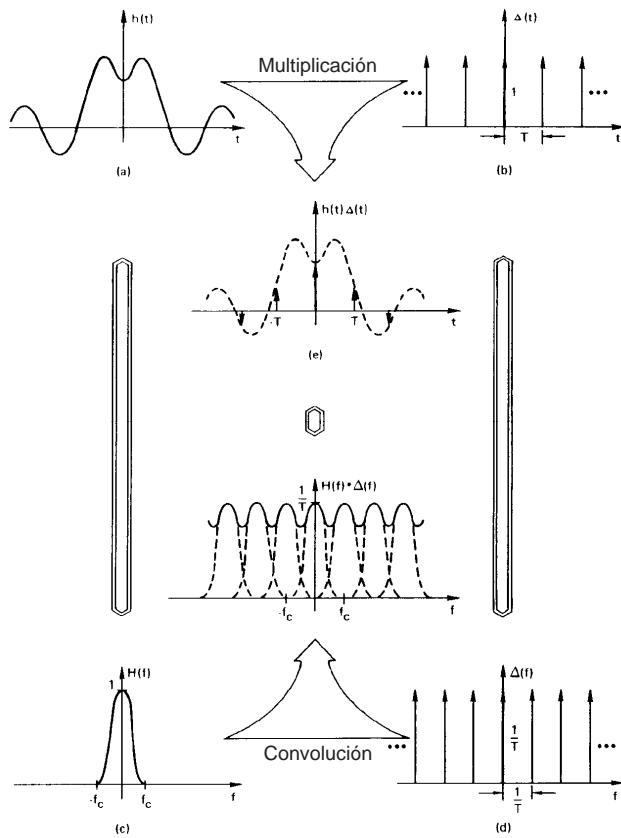


Figura A.9: Transformada de una función con una discretización demasiado dispersa.

cuando el número de términos es elevado. El siguiente algoritmo reduce el tiempo considerablemente. El número de multiplicaciones en este caso es del orden de  $2 \log N$  con lo que el tiempo se reduce extraordinariamente para valores grandes de  $N$ .

El algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) se basa en la descomposición de la serie original en dos series, la serie de los términos que ocupan la posición par y los términos que ocupan la posición impar:

$$\begin{cases} y_r = x_{2r} \\ z_r = x_{2r+1} \end{cases} \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

La serie correspondiente a la transformada discreta de  $\{x_r\}$  viene dada por:

$$X_k = Y_k + M^k Z_k \quad (\text{A.3})$$

donde:

$$M = e^{-i \frac{2\pi}{N}}$$

y las series  $\{Y_k\}$  y  $\{Z_k\}$  son las transformadas de  $\{y_r\}$  y  $\{z_r\}$ , respectivamente.

La serie original debe orlarse de ceros, en su caso, para conseguir que el número de términos  $N$  sea una potencia de dos. Como se ha demostrado en el apartado anterior, las

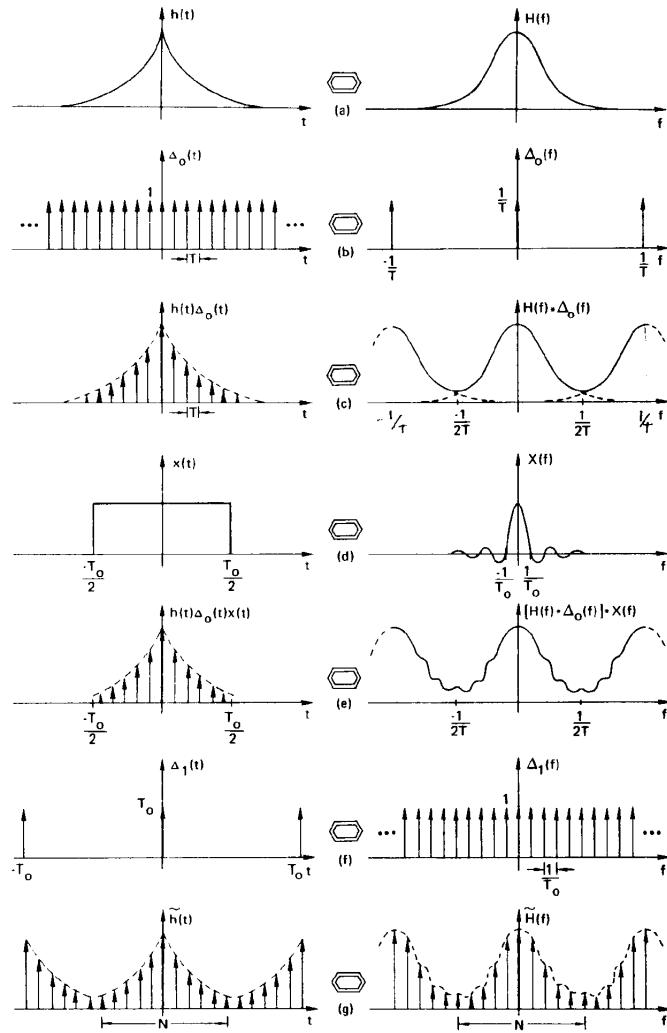


Figura A.10: Obtención gráfica de la transformada discreta de Fourier.

series  $\{Y_k\}$  y  $\{Z_k\}$  de  $N/2$  términos se repiten periódicamente con periodicidad  $N/2$ , de esta manera se tiene que:

$$X_{k+\frac{N}{2}} = Y_k - M^k Z_k \quad (\text{A.4})$$

que proporciona la transformada completa de la serie original. La operación de subdivisión anterior puede repetirse hasta obtener series con un único término. La serie transformada de una serie con un único término coincide con ella misma  $X_0 = x_0$ . La serie original se obtiene ahora recomponiendo cada una de las semi-series con expresiones análogas a las A.3 y A.4.

Un ejemplo de aplicación del proceso anterior, para una serie de cuatro términos, se da a continuación. La subdivisión de la serie, y las transformadas de las series de un solo

término, vienen dadas por:

$$x_r = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \quad \begin{cases} y_r = \{x_0, x_2\} \left\{ \begin{array}{l} s_0 = x_0 \rightarrow S_0 = x_0 \\ t_0 = x_2 \rightarrow T_0 = x_2 \end{array} \right\} \\ z_r = \{x_1, x_3\} \left\{ \begin{array}{l} u_0 = x_1 \rightarrow U_0 = x_1 \\ v_0 = x_3 \rightarrow V_0 = x_3 \end{array} \right\} \end{cases}$$

El proceso de recomposición de la serie transformada es como sigue:

$$\begin{cases} \begin{cases} Y_0 = x_0 + x_2 \\ Y_1 = x_0 - x_2 \\ Z_0 = x_1 + x_3 \\ Z_1 = x_1 - x_3 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = Y_0 + Z_0 = x_0 + x_2 + x_1 + x_3 \\ X_1 = Y_0 + iZ_0 = x_0 - x_2 + i(x_1 + x_3) \\ X_2 = Y_0 - Z_0 = x_0 + x_2 - (x_1 - x_3) \\ X_3 = Y_1 - iZ_1 = x_0 - x_2 - i(x_1 - x_3) \end{cases}$$

El algoritmo FFT consta de dos pasos diferenciados: reordenar la serie original, y recomponer la serie transformada. En la reordenación, la nueva posición en binario es la imagen especular de la posición que el término en cuestión ocupaba en la serie original. La programación de estos dos pasos da lugar a códigos rápidos para la transformación discreta de Fourier.

## A.3 Transmisión de Vibraciones Aleatorias

### A.3.1 Función de Respuesta en Frecuencia

En el estudio de la respuesta de sistemas de un grado de libertad ante excitaciones deterministas existen dos métodos clásicos de resolución: el método de superposición en frecuencia (Función de Transferencia) y el método de superposición en el tiempo (Integral de Duhamel). Estos dos métodos se repasan someramente a continuación. La ecuación de equilibrio dinámico para un sistema de un grado de libertad es:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{f(t)}{m} \quad (\text{A.5})$$

donde  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia natural ( $k$  y  $m$  son la rigidez y la masa del sistema),  $\xi = c/2m\omega_n$  es el factor de amortiguamiento ( $c$  es el coeficiente de amortiguamiento del sistema),  $x$  es el desplazamiento, y  $f(t)$  la fuerza excitadora.

Como se ha visto al estudiar la transformación de Fourier, toda función puede expresarse como una suma (integral) de términos monocromáticos. De esta manera, si se obtiene la respuesta a una excitación armónica de frecuencia cualquiera, se puede calcular la respuesta a la excitación en cuestión como “superposición” de las correspondientes a los monocromáticos. Haciendo que la excitación  $f(t)$  sea monocromática:

$$f(t) = e^{i\omega t}$$

la ecuación A.5 se escribe como:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{e^{i\omega t}}{m}$$

cuya solución general es:

$$x(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

con:

$$H(\omega) = \frac{1/k}{1 - \tau^2 + i2\xi\tau}$$

donde  $\tau = \omega/\omega_n$

La función  $H(\omega)$  se conoce como función de transferencia. Su parte real corresponde a la transmisión de armónicos del tipo coseno y su parte imaginaria a la transmisión de armónicos tipo seno. El módulo de  $H(\omega)$  representa la amplificación que  $f(t)$  experimenta al “atravesar” el sistema lineal y “convertirse” en respuesta, mientras que el argumento de  $H(\omega)$  representa el desfase entre respuesta y excitación.

Una función cualquiera  $f(t)$  puede descomponerse en una suma de armónicos de “peso”  $F(\omega)$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

La respuesta al armónico:

$$\frac{1}{2\pi} F(\omega) e^{i\omega t}$$

será:

$$\frac{1}{2\pi} H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t}$$

luego, por superposición, la respuesta a la suma (integral) de armónicos será la suma (integral) de las respuestas a cada uno de ellos:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

lo cual quiere decir que la transformada de  $x(t)$  viene dada por:

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

Una superposición similar puede hacerse en el “dominio del tiempo”. La respuesta a la función impulso ( $\delta(t)$ ) puede obtenerse sin mayores complicaciones:

$$h(t) = -\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d} \sin(\omega_d t)$$

Una función cualquiera puede considerarse una suma de funciones impulso de valor  $f(t)$ . La respuesta en el instante  $t$  será la suma de las respuestas en dicho instante correspondiente a todos los impulsos que ya han ocurrido:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau = h(t) * f(t)$$

la equivalencia de esta integral (Integral de Duhamel) con el producto de convolución es posible porque la respuesta a impulsos que aún no han ocurrido es nula. Luego la respuesta es la convolución entre la excitación en cuestión y la respuesta a la función impulso. La transformada de la expresión anterior es:

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

con lo que se deduce que la función de transferencia debe ser la transformada de la respuesta al impulso unidad. La comprobación de este extremo no presenta complicaciones.

### A.3.2 Relaciones Excitación–Respuesta para Procesos Aleatorios Estacionarios

Los resultados del apartado anterior son de utilidad en el estudio de la descripción estadística y en frecuencia de la respuesta a excitaciones aleatorias. La media de la respuesta se obtiene como sigue:

$$E[x] = H(0)E[f]$$

Si la excitación es de media cero, también lo será la respuesta.

La función de autocorrelación de la respuesta en función de la autocorrelación de la excitación puede obtenerse haciendo uso de la superposición en el dominio del tiempo (integral de Duhamel). A partir de la función de autocorrelación se deduce la densidad espectral de la respuesta en función de la densidad espectral de la excitación:

$$S_x(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega)$$

Del resultado anterior se tiene que la respuesta a un ruido blanco tiene una densidad espectral como la indicada en la Figura A.11. Se puede decir entonces que el sistema lineal actúa como filtro, dejando pasar frecuencias próximas a su frecuencia natural y amortiguando el resto de frecuencias.

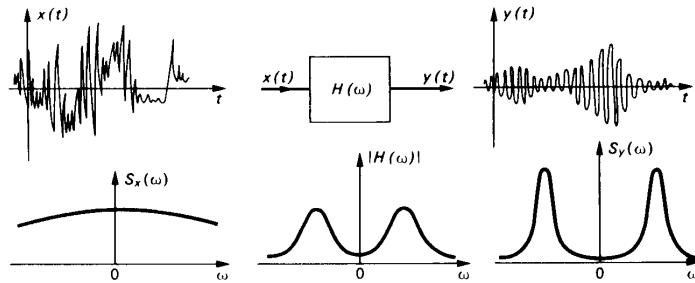


Figura A.11: Filtrado de una vibración de banda ancha al atravesar un sistema lineal.

### A.3.3 Respuesta de un Sistema de Varios Grados de Libertad.

Existen diversos métodos para la obtención de la respuesta de sistemas de varios grados de libertad sometidos a excitaciones deterministas. Uno de los más populares es el de superposición modal. Las ecuaciones de equilibrio para un tal sistema son:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{P}$$

Para desacoplarlas es necesario hacer alguna suposición respecto del amortiguamiento: bien suponer que es proporcional a la masa y a la rigidez, o bien suponerlo conocido para cada modo de vibración. En este último caso, haciendo  $\mathbf{x} = \phi\mathbf{y}$  (siendo  $\phi$  la matriz modal) se tiene un sistema desacoplado en  $\mathbf{y}$ :

$$\ddot{y}_r + 2\xi_r\omega_r\dot{y}_r + \omega_r^2 y_r = \frac{p_r^*}{m} \quad (\text{A.6})$$

en donde  $\omega_r$  es la frecuencia natural correspondiente al modo  $r$ , y  $\mathbf{p}^* = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{p}$ . La matriz modal y las frecuencias naturales se obtienen del problema de autovalores:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi} = 0$$

Cada una de las ecuaciones del sistema A.6 tiene una función de transferencia dada por:

$$H_r(\omega) = \frac{1/k_r}{1 - \tau_r^2 + i2\xi_r\tau_r}$$

De hecho, se puede definir la matriz de transferencia como aquella en que los términos de la diagonal alojan a la función de transferencia correspondiente. La respuesta a una excitación cualquiera en el grado de libertad  $r$  se puede obtener mediante la integral de Duhamel correspondiente a dicho grado de libertad (usando la función de respuesta al impulso correspondiente). En el caso de respuesta ante excitación aleatoria, es necesario disponer de la descripción estadística de cada excitación, así como de las posibles correlaciones entre las distintas entradas. Con esta información se puede obtener, por ejemplo, la función de correlación entre dos respuestas cualesquiera, y con ella, la densidad espectral cruzada entre las respuestas en cuestión, o entre una entrada y una salida:

$$S_{y_m y_n} = H_m^*(\omega) S_{p_m^* p_n^*} H_n(\omega)$$

En forma matricial, se tiene:

$$\mathbf{S}_y = \mathbf{H}^*(\omega) \mathbf{S}_{\mathbf{p}^*}(\omega) \mathbf{H}(\omega)$$

Relación que proporciona la matriz de densidad espectral de la respuesta en función de la matriz de transferencia del sistema y de la matriz de densidad espectral de la entrada. Esta relación se escribe en coordenadas naturales como:

$$\mathbf{S}_x(\omega) = \boldsymbol{\phi} \mathbf{H}^*(\omega) \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{S}_{\mathbf{p}}(\omega) \boldsymbol{\phi} \mathbf{H}(\omega) \boldsymbol{\phi}^T$$

# Apéndice B

## Engranajes

### B.1 Engranajes Paralelos

#### B.1.1 Condición de Engrane, Perfiles Conjugados

Los perfiles de dos ruedas dentadas cumplen la “condición de engrane” cuando son capaces de reproducir el movimiento relativo que existe entre dos discos de fricción, esto es, cuando mantienen una relación de transmisión (relación de velocidades) constante, no dependiente del punto de contacto entre los perfiles en cuestión. En este caso, se tiene un dispositivo capaz de transmitir potencia a través de una fuerza de contacto normal a superficies sólidas (que pueden hacerse mucho más altas que las fuerzas tangenciales de los discos o correas de fricción) con la suavidad cinemática de funcionamiento propia de estos discos (Fig. B.1).

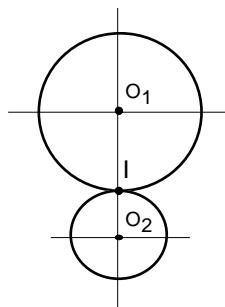


Figura B.1: Discos de fricción.

Los axoides del movimiento relativo de dos cuerpos son los lugares geométricos de los ejes instantáneos de rotación y mínimo deslizamiento referidos a cada uno de los dos cuerpos considerados. En el movimiento plano, los vectores de rotación tienen que ser perpendiculares al plano en el que se produce el movimiento, por otra parte, el mínimo deslizamiento (siempre paralelo al vector rotación) tiene que ser nulo para no sacar a los cuerpos del plano. Los axoides del movimiento relativo son entonces curvas que ruedan sin deslizamiento la una sobre la otra. En la transmisión del movimiento a través de discos de fricción, los axoides del movimiento relativo coinciden con la circunferencia exterior a los discos. En el caso de dos perfiles que engranan, los axoides del movimiento relativo deben

ser dos circunferencias tangentes si se quiere que la relación de transmisión sea constante. En una posición determinada, el centro instantáneo de rotación del movimiento relativo está en la normal a las superficies de los dientes en el punto de contacto porque los dientes no se penetran, y en la linea entre centros de las dos ruedas porque el centro de una de ellas se desplaza perpendicularmente a esta linea.

Dos perfiles de diente cumplen la condición de engrane, esto es, son perfiles conjugados, cuando los axoides del movimiento relativo son dos circunferencias (Fig. B.2). En la Figura B.3 puede verse que para cualquier perfil convexo existe un perfil conjugado. Dejando la rueda correspondiente al perfil conjugado en posición estacionaria, y desplazando el perfil original según el movimiento relativo que describe sobre la rueda estacionaria, puede verse que, en cada posición, los perfiles han de permanecer tangentes para no penetrarse. Esto es, el perfil conjugado es la envolvente de las distintas posiciones del perfil móvil.

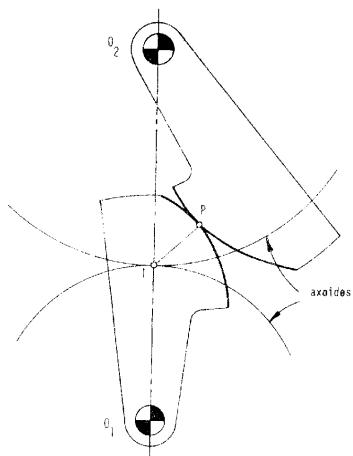


Figura B.2: Condición de engrane.

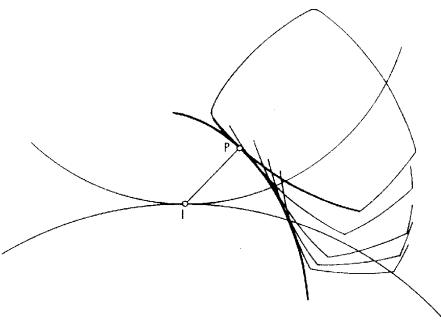


Figura B.3: Generación de un perfil conjugado.

Una rueda debe estar dotada de una colección de perfiles si se quiere que el movimiento de rotación se transmita durante los  $360^\circ$  de una vuelta, esto es, el engrane de un par de

perfíles conjugados no debe terminar antes de que comience el engrane de los siguientes. Por otra parte, es muy infrecuente que un par de ruedas dentadas trabajen continuamente con el mismo sentido en giros y momentos (Fig. B.4), por esto, es necesario disponer de otro juego de perfíles conjugados que entran en funcionamiento en el caso de que varíe el signo de los momentos o de los giros. Estas dos condiciones dan lugar al aspecto ordinario de ruedas con un número determinado de dientes simétricos (Fig. B.4).

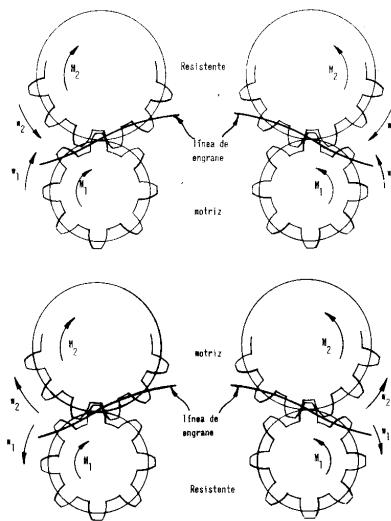


Figura B.4: Cuatro modos de funcionamiento de un engranaje.

Se define como “Línea de Engrane” el lugar geométrico de los puntos de contacto entre perfíles conjugados respecto de un tercer sistema de referencia estacionario. En la Figura B.5 se representa la construcción geométrica de esta linea. Los sucesivos centros instantáneos de rotación, referidos a la rueda 1, están en la perpendicular a la superficie del perfil y sobre el axoide. El centro instantáneo de rotación referido a un sistema fijo permanece invariablemente en el punto I de la Figura B.5, por tanto, cuando el punto de contacto es el punto 1 de la rueda 1, el centro instantáneo de rotación I coincide con 1', el segmento 11' pasa a ocupar la posición  $P_1I$  a través del giro correspondiente. Análogamente, cuando el punto de contacto es el 2, el punto 2' ocupa la posición  $I$ , el segmento 22' ha girado el ángulo correspondiente. Siguiendo este proceso se obtiene la linea de engrane del perfil de diente. Esta construcción sirve además para generar el perfil conjugado, basta con girar los segmentos  $IP_1$ ,  $IP_2$  ... sobre el centro de la rueda 2 y con el mismo ángulo que los llevó de la posición original a la linea de engrane.

De lo tratado hasta aquí se deduce que la linea del empuje normal a las superficies de los dientes es aquella que pasa por el punto correspondiente de la linea de engrane y el punto  $I$  (Fig. B.6), el ángulo que forma esta linea con la tangente a los axoides por  $I$  es el ángulo de empuje. A menos que la linea de engrane sea recta, cosa que sólo ocurre en un tipo especial de perfíles llamados de evolvente, el ángulo de empuje va variando en el tramo de la linea de engrane que se aprovecha para la conducción (*arco de conducción*), de manera que la componente perpendicular al eje varía de magnitud y se producen vibraciones en los apoyos que pueden llegar a ser muy violentas en engranajes rápidos.

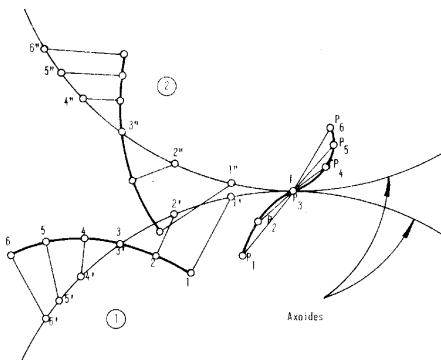


Figura B.5: Línea de engrane.

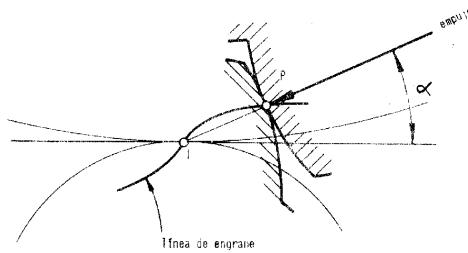


Figura B.6: Ángulo de empuje.

Para asegurar el engrane sin saltos entre las dos ruedas, se debe comprobar que el siguiente par de perfiles entran en contacto antes de que el actual salga del arco de conducción. Esto se consigue en engranajes paralelos haciendo el paso sobre el axoide menor que el arco de conducción. El paso se define como el arco (medido sobre alguna circunferencia, en este caso sobre el axoide) dividido por el número de dientes:

$$P = \frac{\pi D}{z}$$

En ocasiones se sigue utilizando el *módulo*, que se define como el diámetro de la circunferencia en cuestión dividido por el número de dientes:

$$m = \frac{D}{z}$$

El *recubrimiento* se define como la relación entre el arco de conducción y el paso:

$$\epsilon = \frac{C_B}{P_B}$$

La velocidad tangencial a las superficies de los dientes (velocidad de deslizamiento) es:

$$v_d = \omega_{21} \overline{IP}$$

donde  $\omega_{21}$  es la velocidad de giro relativa entre ruedas, y el punto  $P$  es un punto de la linea de engrane. Puesto que  $\omega_{21}$  es constante,  $v_d$  es proporcional a  $\overline{IP}$  ( $v_d = 0$  cuando  $P$  coincide con  $I$ ). Para mantener la velocidad de rozamiento y, por tanto, el desgaste y la pérdida de potencia, en unos valores razonables, es necesario limitar la longitud  $\overline{IP}$  a un intervalo lo más pequeño posible. Esto limita el arco de conducción (Fig. B.7) y, por tanto, el paso en engranajes paralelos. En engranajes helicoidales se dispone de un recubrimiento adicional debido al ángulo de la hélice que permite reducir el paso (para minimizar el desgaste) sin afectar al engrane.

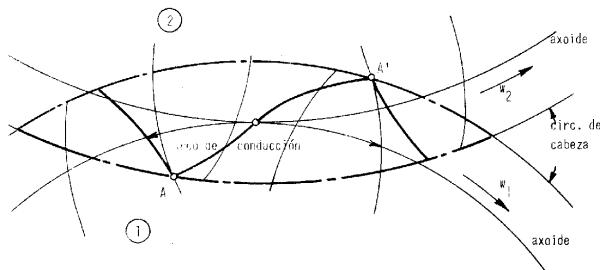


Figura B.7: Arco de conducción.

### B.1.2 Perfil de Evolvente

El perfil de evolvente presenta ventajas claras frente a cualquier otro perfil de diente, sin embargo, durante casi dos siglos se vino utilizando el perfil de cicloide (Fig. B.18). La condición de engrane se demostró pronto para estos perfiles y su utilización se generalizó como representante de una ceguera histórica de la ingeniería.

La curva que genera la punta de un hilo que se desenrolla de una circunferencia base se llama *Evolvente de Círculo* (Fig. B.8). El único parámetro que caracteriza a una evolvente dada es el diámetro del círculo base  $R_B$ . La expresión en coordenadas polares de la evolvente  $r(\varphi)$  es complicada, mejor utilizar las expresiones paramétricas  $r(\phi)$ ,  $\varphi(\phi)$ . De la Figura B.8b se obtiene:

$$r = \frac{R_B}{\cos \psi}$$

y:

$$R_B \varphi = \overline{BC} = \overline{BT} - \overline{TC} = R_B \tan \psi - R_B \psi = R_B(\tan \psi - \psi)$$

$$\varphi = \tan \psi - \psi$$

La función  $\tan \psi - \psi$  se conoce como función evolvente.

La siguiente analogía explica muchas de las propiedades de los perfiles conjugados de evolvente. Sean dos círculos de radios  $R_{B1}$  y  $R_{B2}$  separados una distancia arbitraria  $d$  (Fig. B.9). Se enrolla un hilo en uno de los círculos y, en una de las pasadas, se lleva hasta el segundo círculo donde se continúa enrollando en sentido contrario. Supóngase que los círculos se recubren arbitrariamente con papel para dibujar sobre estos los perfiles de los dientes conjugados. Se dispone de un lápiz unido al hilo y en movimiento con él. Una de las ruedas se hace girar en el sentido de enrollar más hilo sobre ella, por ejemplo, la rueda

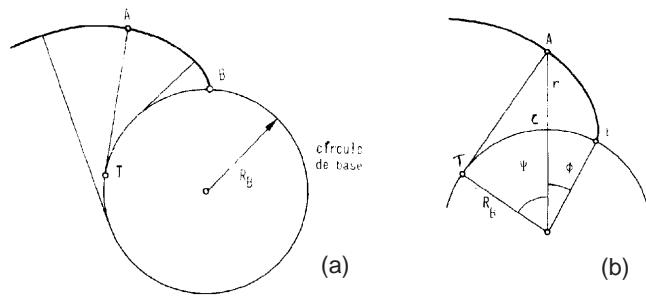


Figura B.8: Evolvente de circulo (a) y coordenadas polares (b).

2 girando en sentido contrario a las agujas del reloj (Fig. B.9). El lápiz viaja en linea recta (con el hilo) desde la rueda 1 (punto  $T_1$ ) hasta la rueda 2 (punto  $T_2$ ). Respecto del sistema de referencia estacionario, el lápiz describe un movimiento rectilíneo (segmento  $\overline{T_1 T_2}$ ). En cambio, respecto de la rueda 1 el lápiz hace las veces de la punta de un hilo que se desenrolla de esta rueda, el lápiz dibuja una evolvente sobre la rueda 1. A la vez que el hilo se desenrolla de la rueda 1 se va enrollando en la 2 y, por tanto, el lápiz dibuja una evolvente que se recorre en sentido contrario sobre este sistema. Si se prescinde del hilo, y se hacen engranar los perfiles de evolvente así obtenidos, se reproduce el movimiento que los ha generado.

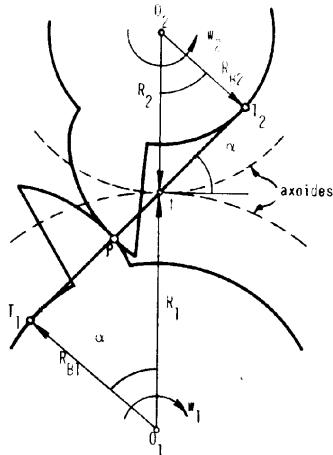


Figura B.9: Fundamento del engrane de dos evolventes.

Las ventajas de los dientes con perfil de evolvente son las siguientes:

1. El ángulo de empuje es constante. Se mejora la suavidad de funcionamiento.
2. Cualquiera dos dentaduras pueden engranar entre sí con tal de que tengan el mismo módulo.
3. Dos ruedas con el mismo módulo engranan a cualquier distancia entre centros,

aunque el engrane sin holgura requiere una distancia determinada.

4. La cremallera de evolvente tiene los flancos rectos con lo que la facilidad de tallado de ruedas de evolvente es considerable.

La analogía del hilo explica perfectamente todas estas propiedades.

Para estas ruedas se suele definir el paso y el módulo en función del círculo base:

$$\begin{aligned} P_B &= \frac{2\pi R_B}{z} \\ m_B &= \frac{2R_B}{z} \end{aligned}$$

Los parámetros de funcionamiento se obtienen una vez determinada la distancia entre centros de las ruedas. El ángulo de empuje es (Fig. B.9):

$$\cos \alpha = \frac{R_{B1}}{R_1} = \frac{R_{B2}}{R_2} = \frac{R_{B1} + R_{B2}}{d}$$

El radio del axoide para este valor de  $\alpha$  es:

$$R = \frac{R_B}{\cos \alpha}$$

y por tanto, el paso y el módulo siguen la misma relación:

$$P = \frac{P_B}{\cos \alpha} \quad m = \frac{m_B}{\cos \alpha}$$

El espesor de diente sobre el axoide se obtiene como sigue:

$$e = \frac{e_B - 2R_B E_v(\alpha)}{\cos \alpha}$$

La distancia de engrane sin holgura (Fig. B.10) es la que hace que la suma de los espesores de los dientes de las dos ruedas (medidos sobre los axoides) coincida con el paso sobre el axoide:

$$e_1 + e_2 = P$$

En la Figura B.11 se representan el resto de dimensiones que definen completamente la geometría de la rueda dentada. El paso y espesor en el círculo base se pueden obtener de una rueda ya construida haciendo las medidas indicadas en la Figura B.12. Esto es posible porque los perfiles se han ido desenrollando del círculo base hasta llegar a la posición de medida.

En la Figura B.13 se representan los datos intrínsecos de una cremallera. La Figura B.14 muestra la generación del perfil de evolvente en ruedas interiores.

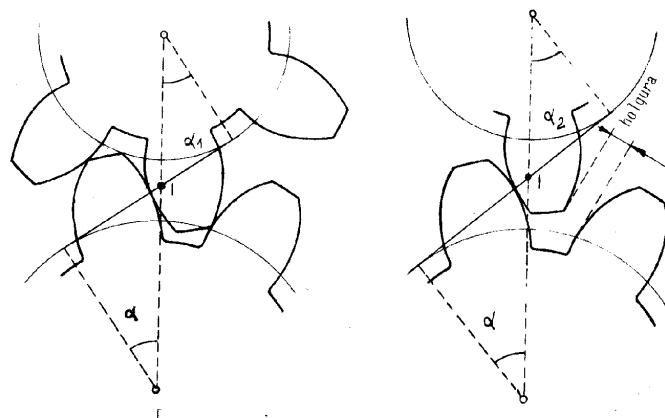


Figura B.10: Posibles distancias entre centros.

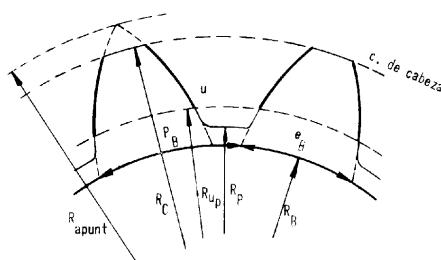


Figura B.11: Datos que definen la dentadura.

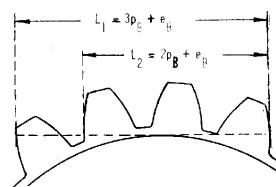


Figura B.12: Medida del paso y el espesor sobre una rueda.

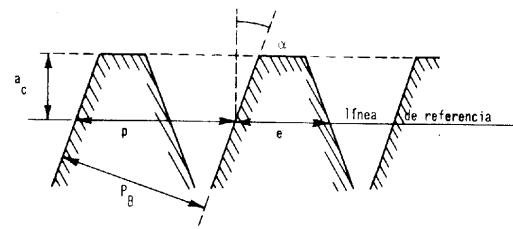


Figura B.13: Cremallera.

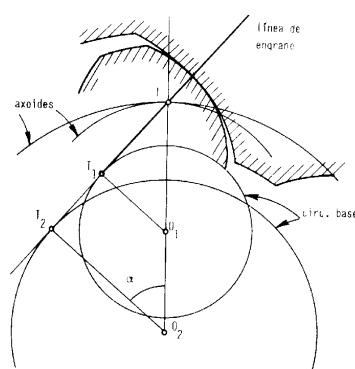


Figura B.14: Perfil de evolvente para ruedas interiores.

### B.1.3 Limitaciones al Engrane de Dientes con Perfil de Evolvente

Para que dos ruedas con dientes de perfil de evolvente engranen sin interferencias de ningún tipo se debe cumplir una serie de requisitos geométricos. Para que la cabeza de los dientes de una rueda no toque al fondo de la otra se debe cumplir que (Fig. B.15):

$$\begin{aligned} R_{C1} + R_{F2} &\leq d \\ R_{C2} + R_{F1} &\leq d \end{aligned}$$

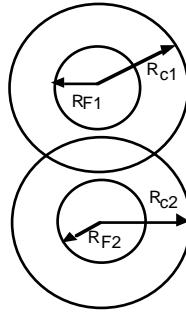


Figura B.15: Radio del fondo para evitar la penetración.

Para permitir el engrane continuado se debe tener un coeficiente de recubrimiento superior a la unidad (Fig. B.16). En la práctica se utilizan valores de  $\epsilon$  de 1.1 a 1.4. Puesto que la distancia  $CB$  se puede expresar como suma de  $IA_1$  y  $IA_2$  (Fig. B.16), cada una de las cuales sólo depende de los parámetros que definen una rueda, es común dividir el recubrimiento en dos magnitudes representativas de la contribución al recubrimiento por parte de cada una de las ruedas:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

El valor de  $\epsilon_1$  viene dado por (Fig. B.16):

$$\epsilon_1 = \frac{R_{B1}}{P_B} \left[ \sqrt{\frac{R_{C1}^2}{R_{B1}^2} - 1} - \tan \alpha \right]$$

Otra limitación al engrane proviene de la interferencia entre dientes. Es posible que dos dientes engranen en un tramo de la linea de engrane, y pasen seguidamente a interferir el uno con el otro (Fig. B.17). Aunque es posible fabricar dientes “que se interfieran”, no es recomendable porque la resistencia mecánica del diente queda muy reducida. El radio de cabeza máximo que no produce interferencia es (Fig. B.17b):

$$R_{C1} = \overline{O_1 T_2} = \sqrt{R_{B1}^2 + (R_{B1} + R_{B2})^2 \tan^2 \alpha}$$

El radio de cabeza está además limitado por el radio que produce el “apuntamiento” del diente, esto es, el radio que da lugar a un espesor en cabeza nulo. Este radio se obtiene de las expresiones (Fig. B.17c):

$$\begin{aligned} R_{ap} &= \frac{R_B}{\cos \psi} \\ \frac{e_B}{2} &= R_B E_v(\psi) \end{aligned}$$

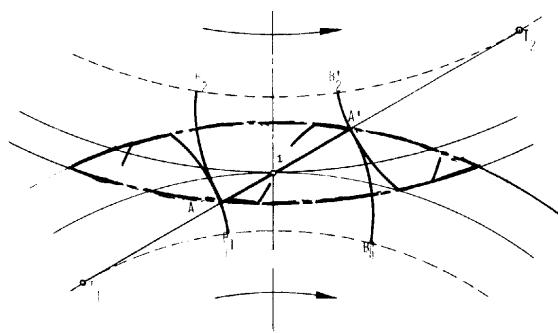


Figura B.16: Zona activa de la linea de engrane y recubrimiento.

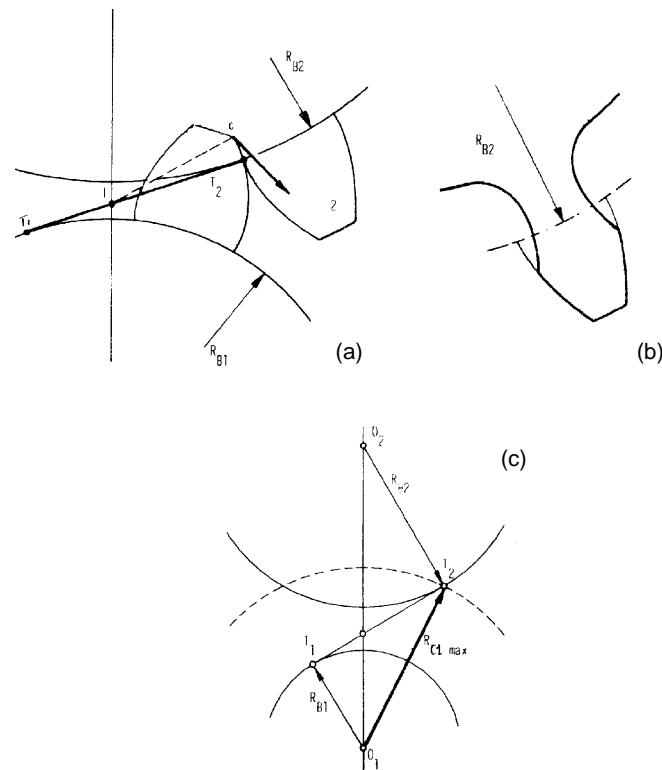


Figura B.17: Interferencia y apuntamiento.

#### B.1.4 Perfil de Cicloide

Una curva *cicloide* se genera haciendo rodar sin deslizamiento una circunferencia (ruleta) alrededor de una circunferencia base (Fig. B.18). Si la ruleta rueda por el interior de la base dibuja una *hipocicloide*, si rueda por el exterior de la base genera una *epicicloide*. En la Figura B.18 se hacen rodar sin deslizamiento dos circunferencias base y una ruleta de

manera que el centro instantáneo de rotación de los tres movimientos relativos permanezca en el punto  $I$  de un sistema de referencia estacionario. Un punto  $P$  de la ruleta dibuja una epicicloide en el sistema de la circunferencia  $C_2$  y una hipocicloide en el de la  $C_1$ , en el sistema de referencia fijo el punto  $P$  describe el contorno de la ruleta, ésta será la linea de engrane.

En la generación de los perfiles el punto  $P$  se desplaza tangencialmente a ambos, por tanto los dos perfiles son normales en  $P$ . El movimiento relativo de las dos ruedas tiene como axoides las dos circunferencias base, luego la condición de engrane se cumple automáticamente, los perfiles son conjugados. La linea de engrane es el lugar geométrico, en ejes fijos, de los sucesivos puntos de contacto entre dientes, esto es, el arco  $PI$  de la ruleta. La linea de engrane no es recta con lo que el ángulo de empuje varía a lo largo del arco de conducción. Esto impide que este tipo de perfiles se usen para la transmisión de potencia a altas velocidades.

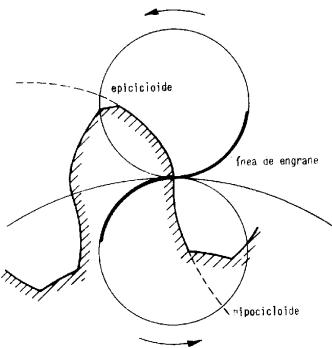


Figura B.18: Perfil de cicloide.

Los perfiles de cada rueda son distintos aun cuando las ruedas tuvieran el mismo radio de base. Esto puede corregirse dibujando el perfil con dos ruletas simultáneamente. En este caso, dos ruedas idénticas pueden engranar entre sí.

### B.1.5 Tallado de Engranajes con Perfil de Evolvente

El tallado de las ruedas de una familia (ruedas con el mismo módulo) puede hacerse con una cremallera de flancos rectos (perfil de evolvente) (Fig. B.19). El movimiento de corte es de arriba a abajo en la figura, mientras que el movimiento de generación se consigue desplazando y girando la rueda como si estuviera engranando con la cremallera. Los parámetros sobre los que se puede incidir para variar el tipo de rueda obtenida son, por un lado, la relación entre la velocidad de giro y de desplazamiento de la rueda a tallar y, por otro, el desplazamiento  $V$  del axoide resultante hasta la linea media de la cremallera.

Los datos intrínsecos de la cremallera son el ángulo de empuje  $\alpha_0$  y el paso  $P_0$  (referido a la linea media) (Fig. B.13). La linea media se define como aquella en que  $e_0 = P_0/2$ , sobre ella se miden las alturas de cabeza y pie de la cremallera. El radio del axoide está determinado por el número de dientes que se deseen conseguir. En efecto, el paso sobre el axoide (que en la cremallera coincide con el paso sobre cualquier otra linea paralela a

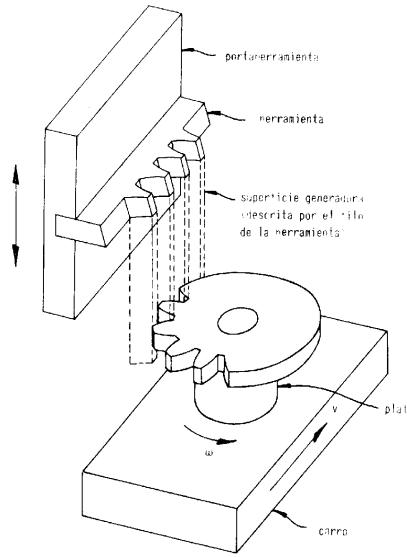


Figura B.19: Tallado por cremallera.

la linea media  $P_0$ ) es:

$$P_0 = \frac{2\pi R_0}{z}$$

con lo que el radio del axoide viene dado por:

$$R_0 = \frac{P_0 z}{2\pi}$$

Puesto que la velocidad lineal de la rueda es  $v = \omega R_0$ , se tiene que el número de dientes determina la relación entre  $v$  y  $\omega$ :

$$\frac{v}{\omega} = \frac{P_0 z}{2\pi}$$

El desplazamiento  $V$  se puede variar arbitrariamente controlando la distancia  $d$  del centro de la rueda a la linea media:  $V = d - R_0$ . En la Figura B.20 se muestran los perfiles obtenidos con distintos valores del desplazamiento  $V$ . Los parámetros intrínsecos de la rueda así obtenida vienen dados por:

$$\begin{aligned} R_B &= R_0 \cos \alpha_0 \\ P_B &= P_0 \cos \alpha_0 \\ e_B &= e \cos \alpha_0 + 2R_B E_v(\alpha_0) = \left[ \frac{P_0}{2} + 2V \tan \alpha_0 + 2R_0 E_v(\alpha_0) \right] \cos \alpha_0 \\ R_F &= R_0 + V - a_{c0} \end{aligned}$$

El radio de fondo no coincide con el radio de pie (radio en el que comienza el perfil de evolvente). Este último vienen dado por el radio del punto A de la Figura B.20:

$$R_P = \sqrt{OT^2 + TA^2} = \sqrt{(R_0 \cos \alpha_0)^2 + \left( R_0 \sin \alpha_0 - \frac{a_{c0} - V}{\sin \alpha_0} \right)^2}$$

El radio de cabeza se decide en un torneado previo, debe comprobarse que cumple todas las restricciones descritas en el Apartado B.1.3.

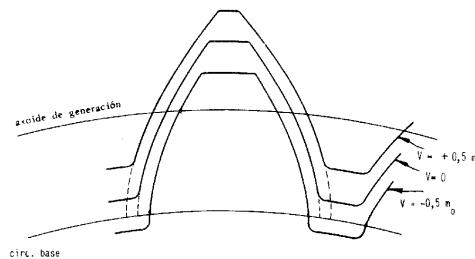


Figura B.20: Distintos dientes obtenidos al variar el desplazamiento  $V$ .

En el tallado con fresa madre (Fig. B.21a) se disponen una serie de cremalleras cortantes sobre un cilindro. El movimiento de corte es el giro de la fresa sobre su propio eje. Para conseguir fondos rectos es necesario desplazar la fresa en sentido vertical de vaivén. En la Figura B.21b se representa el tallado con piñón cortador, el movimiento de corte es el desplazamiento vertical del piñón y el giro del mismo sobre su propio eje es el movimiento de generación que simula el engrane con la rueda que se está tallando. El tallado con fresa de forma (Fig. B.21c) requiere una fresa específica para cada tipo de hueco a tallar. Este sistema se utiliza en pequeños talleres para producciones muy limitadas.

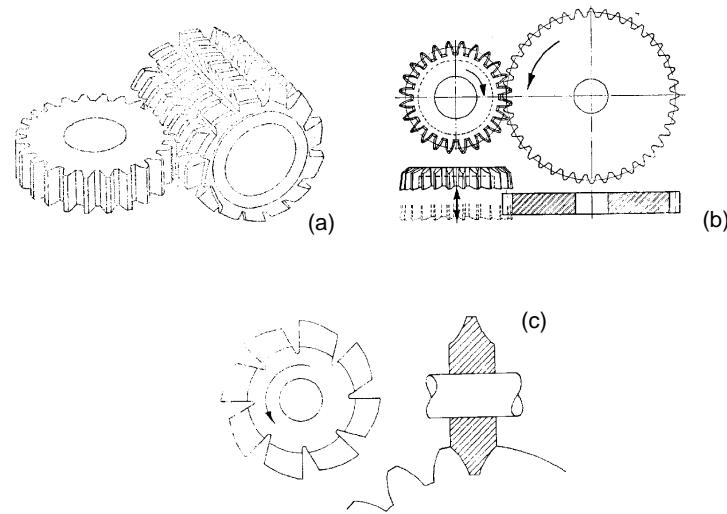


Figura B.21: Tallado con fresa madre (a), piñón cortador (b) y fresa de forma (c).

El acabado de las ruedas, talladas por alguno de los métodos anteriores, se realiza mediante una herramienta afeitadora (Fig. B.22a) que engrana con la rueda tallada y produce un raspado suave de sus perfiles. El rectificado con muelas planas “a cero” (Fig. B.22b) reproduce el engrane de la rueda con una cremallera de ángulo de empuje nulo. El giro de las muelas sobre su propio eje produce el rectificado.

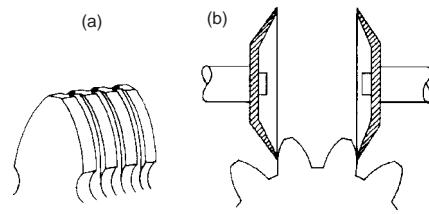


Figura B.22: Rectificado con herramienta afeitadora (a) y con muela plana (b).

### B.1.6 Engranajes Helicoidales

En un engranaje recto, la entrada en carga del diente se produce al mismo tiempo en toda la longitud del mismo. Para corregir esto en cierta medida, se pueden disponer dos ruedas idénticas desfasadas un cierto ángulo (Fig. B.23). De esta manera, cuando los dientes de una de ellas entran en carga, sólo tendrán que transferir una fracción de la carga total, el resto está siendo transmitido por la rueda colindante. Cada una de estas ruedas desfasadas se puede dividir en dos y repetir el proceso hasta el infinito. En el límite, se tendrá una rueda en la que los dientes se van desfasando a lo largo del eje según un determinado ángulo de hélice ( $\beta_B$ ) medido en el cilindro base (Fig. B.24). Cada sección normal de la rueda coincide con la rueda recta original salvo el ángulo de desfase correspondiente. El funcionamiento de una rueda de este tipo es sustancialmente más suave que el de una rueda con dientes rectos.

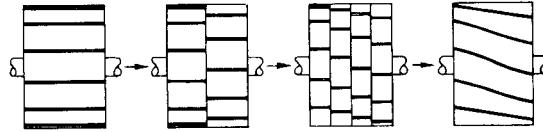


Figura B.23: Principio de las ruedas helicoidales.

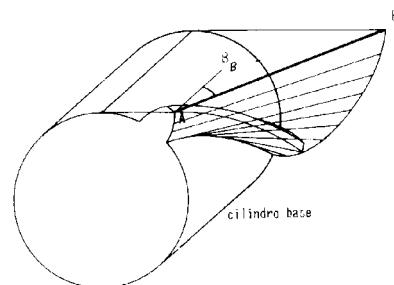


Figura B.24: Generación de todos los perfiles desfasados.

En la Figura B.24 se representa la generación a un tiempo de todos los perfiles desfasados de un diente de evolvente. Sobre el cilindro base se enrolla una cinta de papel cuyo extremo se ha cortado a un ángulo  $\beta_B$ . Cuando el extremo de la cinta de papel alcanza el radio de cabeza, comienza a dibujar sobre el cilindro base el perfil de evolvente correspondiente. Se observa en esta Figura que hasta que todo el extremo de la cinta no está en contacto con el cilindro base no se genera sobre él una hélice de ángulo  $\beta_B$ . Quiere esto decir que, si se corta el diente por un cilindro de mayor radio que el de la base, se obtiene una hélice de distinto ángulo que la trazada sobre el cilindro base. En la Figura B.25 se representa el cálculo del ángulo de la hélice sobre el cilindro axoide:

$$\tan \beta = \frac{\tan \beta_B}{\cos \alpha}$$

El paso  $H$  de las hélices sobre los dos cilindros es el mismo puesto que, cuando los perfiles han dado una vuelta completa, se tiene una sección idéntica a la original, todos los puntos guardan la misma relación.

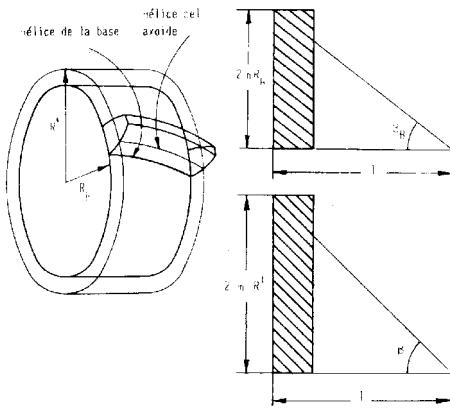


Figura B.25: Angulo de hélice sobre el cilindro axoide.

En ruedas helicoidales existe una condición de engrane adicional a las propias del perfil, los ángulos de las hélices deben tener la misma magnitud y ángulos contrarios:

$$\beta_{B1} = -\beta_{B2}$$

Exigir esta condición sobre el cilindro base es equivalente a exigirla sobre cualquier otro cilindro que corte a los dientes helicoidales.

Las ruedas helicoidales presentan una ventaja adicional frente a ruedas de dientes rectos, el recubrimiento está reforzado por el incremento de arco de conducción que supone el salto de un diente (Fig. B.26). En efecto, un diente helicoidal conduce durante el arco de conducción correspondiente a su perfil frontal más todo el arco barrido por el diente en sí:

$$S_B = b \tan \beta_B$$

El recubrimiento total es entonces:

$$\epsilon = \frac{C_f + S_B}{P_B} = \epsilon_f + \frac{S_B}{P_B}$$

Puesto que  $S_B/P_B$  se puede aumentar a base de ángulo de hélice y espesor de rueda, se puede conseguir un recubrimiento aceptable con  $\epsilon_f$  pequeños. Un recubrimiento de perfil frontal pequeño permite reducir la zona aprovechada de la linea de engrane y, por tanto, la velocidad de rozamiento entre perfiles. Esto da lugar a engranajes con mejor rendimiento, menos desgaste, y más silenciosos.

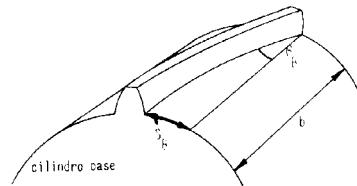


Figura B.26: Salto de un diente o recubrimiento adicional.

### B.1.7 Tallado de Ruedas Helicoidales

El tallado de ruedas de dientes rectos se efectúa, como se ha visto, mediante una cremallera del mismo módulo. En el caso de dientes helicoidales el tallado se puede realizar con una cremallera de dientes inclinados (Fig. B.27) con un ángulo igual al de la hélice de la rueda que se desea tallar. El disponer de cremalleras con los ángulos de inclinación propios de cada hélice es un sinsentido teniendo en cuenta que la traslación de una cremallera paralelamente a sí misma la deja invariable y que es este el movimiento utilizado en el corte. Esto significa que se puede usar una cremallera de dientes rectos para tallar ruedas helicoidales con sólo girar la herramienta el ángulo deseado (Fig. B.27).

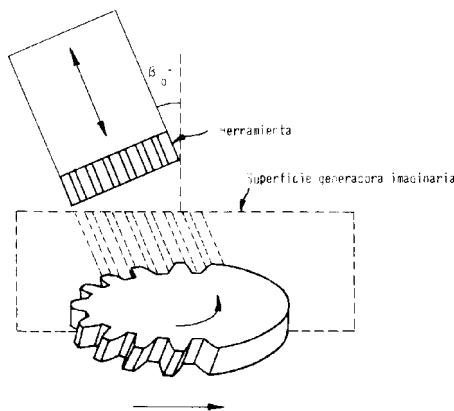


Figura B.27: Tallado de ruedas helicoidales.

El perfil de cremallera necesario para tallar la rueda helicoidal es el correspondiente al perfil normal de la rueda de dientes inclinados original (Fig. B.28). El paso, el espesor y la tangente del ángulo de empuje normales son el resultado de multiplicar los valores

frontales por el coseno del ángulo de hélice:

$$\begin{aligned} P_n &= P \cos \beta \\ m_n &= m \cos \beta \\ \tan \alpha_n &= \tan \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

Las alturas de cabeza y de pie son las mismas que las del perfil frontal (Fig. B.28).

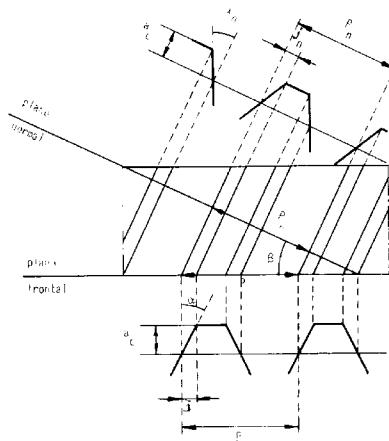


Figura B.28: Cremallera necesaria para el corte.

## B.2 Engranajes Concurrentes

Para la transmisión de potencia entre ejes concurrentes se utilizan ruedas cónicas como las de la Figura B.29. El ángulo de concurrencia se define como el que forman la dirección positiva de la velocidad de una rueda con la dirección opuesta a la velocidad de la segunda rueda (Fig. B.29a). Cuando el cono axoide de una rueda degenera en un plano, se tiene una rueda plana, equivalente a la cremallera en engranajes paralelos. El equivalente de las ruedas interiores son las ruedas cónicas con ángulos de cono axoide superiores a 90° (Fig. B.29b).

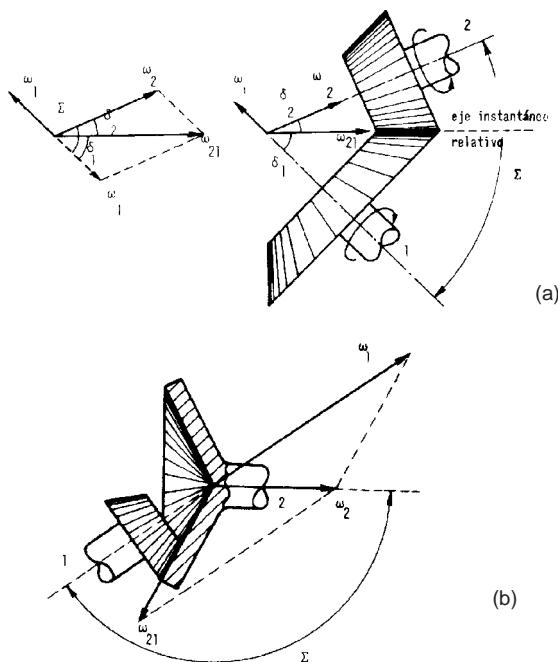


Figura B.29: Engranajes concurrentes.

Los axoides del movimiento relativo de las dos ruedas son los conos de la Figura B.30. Secciones esféricas de estos conos se mantienen en la esfera que los ha generado durante el movimiento relativo de rodadura. El perfil de los dientes puede definirse sobre esta esfera mediante, por ejemplo, una curva de evolvente esférica (Fig. B.31). Esta curva es la descrita sobre la esfera en cuestión por un círculo de igual diámetro que rueda sin deslizamiento sobre el cono axoide. La rueda plana con perfil de evolvente de círculo no tiene flancos rectos, de ahí que el perfil de evolvente no se utilice en ruedas cónicas. Se utiliza el perfil generado por una rueda plana con flancos planos (Fig. B.32). Esto implica que los engranajes de ejes concurrentes suelen tener menor rendimiento y ser más ruidosos que los de ejes paralelos.

El tallado se realiza con una cuchilla con movimiento longitudinal de corte que genera el flanco recto de la rueda plana imaginaria. La cuchilla y la rueda deben además moverse como si esta última estuviera engranando con la rueda plana (Fig. B.33). La mayoría de los problemas relativos al engranaje de ruedas cónicas puede estudiarse sobre las ruedas

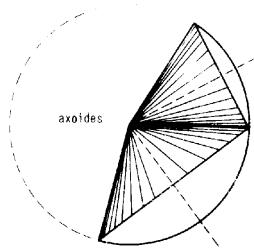


Figura B.30: Axoides del movimiento.

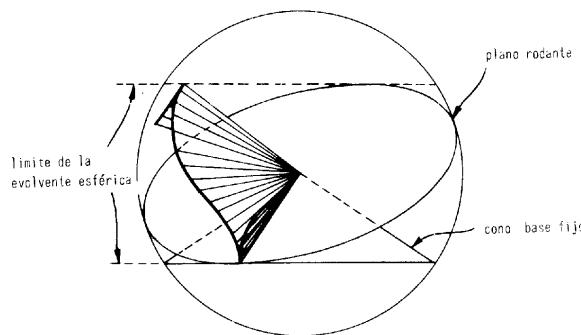


Figura B.31: Evolvente esférica.

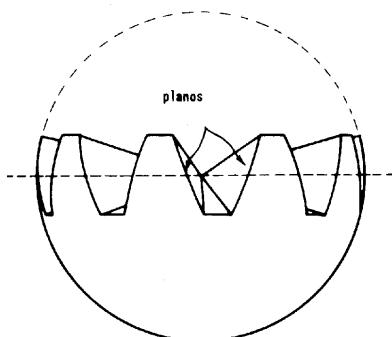


Figura B.32: Rueda plana de dientes piramidales.

cilíndricas equivalentes (Fig. B.34). Éstas se obtienen al proyectar los dientes sobre el cono complementario al cono axoide y desarrollar el resultado sobre un plano.

El tallado de ruedas cónicas con dientes espirales no presenta excesiva complicación. La cuchilla debe generar los flancos planos de una rueda plana con dientes inclinados (Fig. B.35). Por cierto que la técnica de tallado por generación de rueda plana imaginaria permite obtener ruedas de muy distinto tipo y características. Por ejemplo, las ruedas

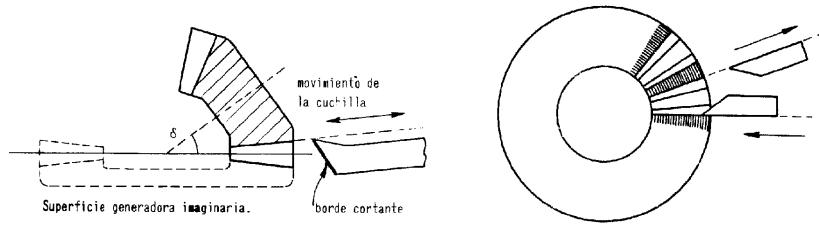


Figura B.33: Tallado de una rueda cónica.

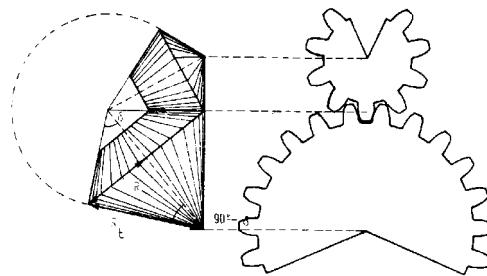


Figura B.34: Ruedas cilíndricas equivalentes.

Gleason e Hipoides se obtienen con un movimiento circular de la cuchilla (Fig. B.36).

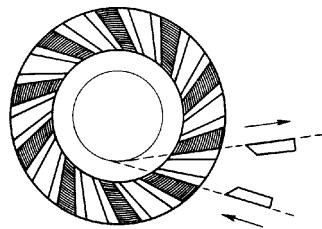


Figura B.35: Rueda cónica helicoidal.

### B.3 Engranajes Helicoidales Cruzados

El engranaje de ruedas helicoidales de ejes paralelos requiere que sus hélices tengan ángulos iguales y de sentido contrario. Dos ruedas de igual paso normal y ángulos distintos también pueden engranar pero sus ejes no serán paralelos y el contacto no será en una linea sino en un punto.

Para analizar el movimiento relativo es conveniente imaginar la rueda engranando con una cremallera virtual de igual paso normal (Fig. B.37). La situación no varía cuando la cremallera se desplaza paralelamente a sus dientes, sólo aparece un deslizamiento adicional

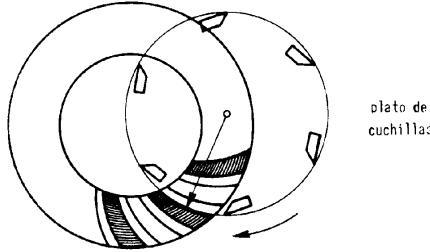


Figura B.36: Dentadura Gleason.

entre dientes de velocidad  $v_{d1}$ :

$$\begin{aligned} v_{d1} &= v_1 \sin \beta_1 \\ v_c &= v_1 \cos \beta_1 \end{aligned}$$

Otra rueda de ángulo  $\beta_2$  engrana con la cremallera por debajo. La cremallera se desliza paralelamente a sus dientes con velocidad  $v_{d2}$ :

$$\begin{aligned} v_{d2} &= v_2 \sin \beta_2 \\ v_c &= v_2 \cos \beta_2 \end{aligned}$$

En la Figura B.37b puede verse que la superposición de los dos movimientos hace que la cremallera virtual se desplace con velocidad  $v_c$  en dirección perpendicular a sus dientes que coincide con la perpendicular común a los dientes de las ruedas helicoidales. El ángulo que forman los ejes de las ruedas es  $\beta_1 + \beta_2$ .

El deslizamiento entre dientes es considerable, de manera que el rendimiento es bajo y el desgaste alto. La relación de transmisión es:

$$\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}$$

y el modulo normal:

$$m_n = \frac{2\pi R_1}{z_1} \cos \beta_1 = \frac{2\pi R_2}{z_2} \cos \beta_2$$

con lo que:

$$\mu = \frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \cos \beta_1}{R_2 \cos \beta_2}$$

El movimiento relativo se puede estudiar a través de los axoides del movimiento de cada rueda con la cremallera imaginaria (Fig. B.38). En la Figura se representan las líneas de contacto entre el cilindro axoide de cada rueda y el plano axoide de la cremallera. La intersección de estas rectas es el punto de contacto de los axoides. La intersección entre los planos de engrane de cada rueda con la cremallera da lugar a la línea de engrane entre ruedas (Fig. B.38). Los axoides reales del movimiento relativo son los paraboloides hiperbólicos de la Figura B.39. Un ejemplo muy usado de engranajes helicoidales cruzados es el de tornillo sinfin y rueda a  $90^\circ$  (Fig. B.40).

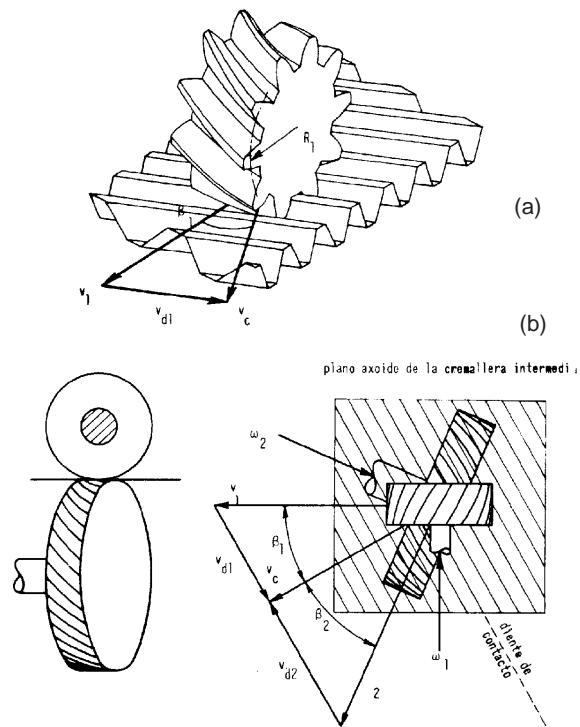


Figura B.37: Engrane de dos ruedas helicoidales de distinto ángulo.

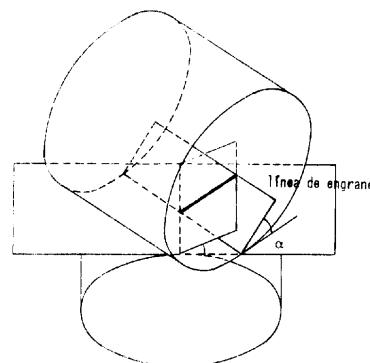


Figura B.38: Línea de engrane.

## B.4 Trenes de Engranajes

### B.4.1 Trenes Ordinarios

A veces una determinada relación de cambio no puede conseguirse con sólo dos ruedas dentadas, es necesario utilizar varias ruedas que engranen entre sí. El dispositivo se conoce

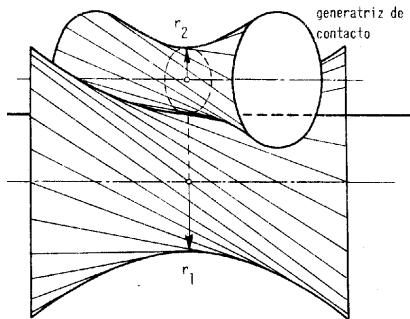


Figura B.39: Axoides del movimiento.

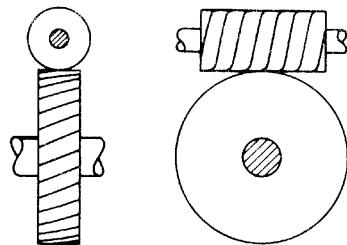


Figura B.40: Tornillo sinfin.

como tren de engranajes. La relación de transmisión en el ejemplo de la Figura B.41 es:

$$\mu = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\omega_3}{\omega_2} \frac{\omega_{3'}}{\omega_2} \frac{\omega_4}{\omega_{3'}} = \frac{z_1 z_{3'}}{z_3 z_4}$$

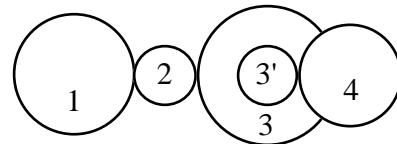


Figura B.41: Tren de engranajes.

En general:

$$\mu = \frac{\text{producto de } z's \text{ conductoras}}{\text{producto de } z's \text{ conducidas}}$$

Una rueda que es a la vez conductora y conducida no interviene en la relación de transmisión. Puede servir para cambiar el sentido del giro o salvar la distancia entre ejes.

### B.4.2 Trenes Epicicloidales

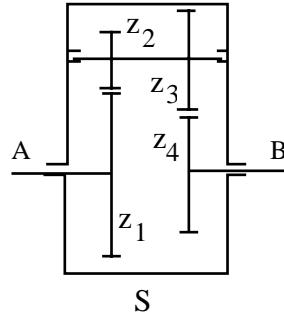


Figura B.42: Tren epicicloidal.

Por definición un tren epicicloidal es un tren de engranajes en el que una o varias ruedas giran en torno a un eje que no es fijo. Un ejemplo de tren epicicloidal se muestra en la Figura B.42. En este caso es necesario conocer la velocidad de dos ejes para conocer la del tercero (todas las velocidades se refieren al eje común  $AB$ ). La velocidad  $\omega_B$  está determinada cuando se fijan los valores de  $\omega_A$  y  $\omega_S$  (velocidad del portasatélites). En el caso en que el portasatélites está fijo se tiene un tren ordinario en el que la relación de transmisión es:

$$\left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)_S = \mu_S = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$$

Esta relación de transmisión es también la que se obtiene cuando las velocidades se refieren al portasatélites:

$$\mu_S = \frac{\omega_B - \omega_S}{\omega_A - \omega_S}$$

de donde se obtiene la relación de Willis:

$$\mu_S \omega_A + (1 - \mu_S) \omega_S = \omega_B$$

Se pueden considerar las siguientes relaciones particulares:

$\omega_S = 0$  (tren ordinario, no epicicloidal):

$$\left(\frac{\omega_B}{\omega_A}\right)_S = \mu_S$$

$\omega_A = 0$ :

$$\left(\frac{\omega_B}{\omega_S}\right)_A = 1 - \mu_S$$

$\omega_B = 0$ :

$$\left(\frac{\omega_S}{\omega_A}\right)_B = \frac{\mu_S}{\mu_S - 1}$$

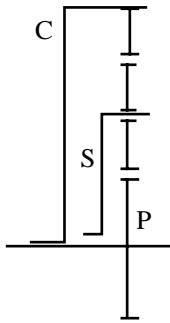


Figura B.43: Tren epicicloidal con una rueda interior (corona).

Otro ejemplo de tren epicicloidal se muestra en la Figura B.43. La ecuación de Willis se verifica también en este caso, el valor de  $\mu_S$  es:

$$\mu_S = \left( \frac{\omega_C}{\omega_P} \right)_S = -\frac{z_P}{z_C}$$

Si se unen dos trenes epicicloidales entre sí (4 g.d.l.) mediante dos ligaduras se obtiene un nuevo sistema de dos grados de libertad pero en el que la entrada y salida pueden permanecer invariables. Esto permite el uso de estos trenes para cajas de cambio como se comenta en el Apartado 9.6.

La ecuación de Willis hace pensar que un tren epicicloidal simple puede usarse como transmisión continuamente variable sin más que controlar la velocidad del portasatélites con algún motor que pueda variar su velocidad de funcionamiento en un rango amplio (por ejemplo, un motor eléctrico). Sin embargo, se comprueba que para que el sistema funcione es necesario suministrar la mayor parte de la potencia a través del portasatélites, esto es, para que la transmisión funcione se necesita una planta de potencia importante que no requiera transmisión, con lo cual se puede prescindir del motor de combustión y de la transmisión. La solución al problema de la transmisión continuamente variable no es tan sencilla.

# Bibliografía

- [1] Alexandrov M.P.; *Materials Handling Equipment*. MIR Publishers Moscow, 1981.
- [2] Alias J., Valdés A., Pardillo J.M.; *La Vía del Ferrocarril*. Bellisco, 1990.
- [3] Alonso J.M.; *Técnicas del Automóvil. Chasis*. Paraninfo, 1986.
- [4] Alonso J.M.; *Técnicas del Automóvil. Equipo Eléctrico*. Paraninfo, 1983.
- [5] Andrea M.H.P., Trottet E.; *Chasis*. Marcombro, 1975.
- [6] Andrews H.I.; *Railway Traction. The Principles of Mechanical and Electrical Railway Traction*. Elsevier, 1986.
- [7] Aparicio F.; *El Mecánico de Automóviles. Tecnología de Automoción*. Paraninfo, 1977.
- [8] Arias-Paz; *Tractores*. Dossat, 1982.
- [9] Arias-Paz M.; *Manual de Automóviles*. Dossat, 1990.
- [10] ASME; *Road Vehicle Handling*. MEP, 1983.
- [11] ASME; *Computational Methods in Ground Transportation Vehicles*, Vol. 50. ASME, 1982.
- [12] ASME; *Advanced Automotive Technologies-1989*, DSC- Vol.13. ASME, 1989.
- [13] ASME; *Composite Materials in the Automobile Industry*. ASME, 1978.
- [14] ASME; *Vehicle Structures*. MEP, 1984.
- [15] ASME; *Automobile Wheels and Tyres*. MEP, 1983.
- [16] ASME; *Vehicle Noise and Vibration*. MEP, 1984.
- [17] ASME; *Hydrostatic Transmissions for Vehicle Application*. MEP, 1981.
- [18] ASME; *Anti-lock Braking Systems for Road Vehicles*. MEP, 1985.
- [19] ASME; *Braking of Road Vehicles*. MEP, 1983.
- [20] Barwell F.T.; *Automation and Control in Transport*. Pergamon Press, 1983.
- [21] Bastow D.; *Car Suspension and Handling*. Pentech Press, 1980.

- [22] Beermann H.J.; *The Analysis of Commercial Vehicle Structures*. MEP, 1989.
- [23] Bekker M.G; *Theory of Land Locomotion*. The University of Michigan Press, 1962.
- [24] Bono S.G., deKryger W.J.; *Auto Technology. Theory and Service*. Delmar, 1990.
- [25] BOSH; *Automotive Handbook*. Bosch, 1986.
- [26] Brigham E.O.; *The Fast Fourier Transform*. Prentice-Hall, 1974.
- [27] Cascales J., Pelegrín J.; *Mecánica de Automóviles*. Paraninfo, 1989.
- [28] Clark S.K.; *Mechanics of Pneumatic Tires*. U.S. Department of Transportation, 1988.
- [29] Crandall S.H., Mark W.D.; *Random Vibration in Mechanical Systems*. Academic Press, 1963.
- [30] Crouse W.H., Anglin D.L.; *Mecánica de la Motocicleta*. Marcombo, 1992.
- [31] Cummins L.; *Internal Fire*. SAE, 1989.
- [32] Chironis N.P.; *Mechanisms & Mechanical Devices Sourcebook*. McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [33] Chudakov D.A.; *Fundamentos de la Teoría y el Cálculo de Tractores y Automóviles*. MIR, 1977.
- [34] Dixon J.C.; *Tires, Suspension and Handling*. Cambridge University Press, 1991.
- [35] Fenton J.; *Vehicle Body Layout and Analysis*. MEP, 1980.
- [36] Fitch, J. W.; *Motor Truck Engineering Handbook.*, 1984.
- [37] Foale T., Willoughby V.; *Motorcycle Chassis Design: The Theory and Practice*. Osprey, 1989.
- [38] Foss C.F., Gander T.J.; *Janes Military Vehicles and Logistics 1.991-92*. Jane's, 1992.
- [39] Fryba L.; *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. Noordhoff International Publishing.
- [40] García-Lomas J.M.; *Tratado de Explotación de Ferrocarriles. Tomo 1.: La Vía*. Madrid, 1945.
- [41] García-Lomas J.M.; *Tratado de Explotación de Ferrocarriles. Tomo 2.: El Material Móvil*. Madrid, 1947.
- [42] Garg V.K., Dukkipati R.V.; *Dynamics of Railway Vehicle Systems*. Academic Press, 1984.
- [43] Allen G.F.; *Janes World Railways 1991-92*. Breda, 1991.
- [44] Gieck K.; *Engineering Formulas*. McGraw-Hill Book Company, 1986.

- [45] Gillespie T.D.; *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. SAE, 1992.
- [46] Gladwell G.M.L., Ghonem H., Kalousek J.; *Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems II*. University of Waterloo Press, 1987.
- [47] Goodsell D.; *Dictionary of Automotive Engineering*. SAE, 1989.
- [48] Gott P.G.; *Changing Gears: The Development of the Automotive Transmission*. SAE, 1991.
- [49] Griffiths D.; *Automobile Assessing*. Butterworths, 1983.
- [50] Guadilla A.; *Tractores*. CEAC, 1988.
- [51] Gurévich A.M., Sorokin E.M.; *Tractores y Automóviles*. MIR, 1978.
- [52] Haug E.J.; *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Vol. I: Basic Methods*. Allyn and Bacon, 1989.
- [53] Hay W.W.; *Railroad Engineering*. John Wiley & Sons, 1982.
- [54] Heisler H.; *Advanced Vehicle Technology*. Edward Arnold, 1989.
- [55] Heitner J.; *Mecánica Automotriz. Principios y Prácticas*. Diana, 1972.
- [56] Henry J.J., Wambold J.C.; *Vehicle, Tire, Pavement Interface*. ASTM, 1992.
- [57] Hicks T.G.; *Standard Handbook of Engineering Calculations*. McGraw-Hill Book Company, 1972.
- [58] Hillier V.A.W., Pittuck F.; *Fundamentals of Motor Vehicle Technology*. Hutchinson, 1981.
- [59] Hoelze J.F., Amrhyn O.C., McAlexander G.A.; *Utility Vehicle Design Handbook*. SAE, 1991.
- [60] Hucho W.H.; *Aerodynamics of Road Vehicles*. Butterworths, 1987.
- [61] International Organization for Standardization; *Road Vehicles, Vol. 1*. ISO, 1987.
- [62] International Organization for Standardization; *Road Vehicles, Vol. 2*. ISO, 1987.
- [63] Johnson K.L.; *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [64] Johnson W., Mamalis A.G.; *Crashworthiness of Vehicles*. MEP, 1978.
- [65] Jones Ch. R.; *Heavy Duty Drivetrains- The System and Component Application*. SAE, 1991.
- [66] Jones N., Wierzbicki T.; *Structural Crashworthiness*. Butterworths, 1983.
- [67] Jones R. M.; *Mechanics of Composite Materials*. Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
- [68] Kamal M.M., Wolf J.A.; *Modern Automotive Structural Analysis*. VNR, 1982.

- [69] Karnopp D.C., Margolis D.L., Giménez J.G.; *Vehicle Dynamics and Active Control*. E.S.I.I. Universidad de Navarra, 1992.
- [70] Karnopp D.C., Margolis D.L., Rosenberg R.C.; *System Dynamics: A Unified Approach*. John Wiley & Sons, 1990.
- [71] Lafont P.; *Cálculo de Engranajes Paralelos*. ESII Universidad Politécnica de Madrid, 1991.
- [72] Lafont P.; *Mecanismos Planetarios*. ESII Universidad Politécnica de Madrid, 1992.
- [73] Laithwaite E.R.; *A History of Linear Electric Motors*. MacMillan, 1987.
- [74] Laithwaite E.R.; *Transport Without Wheels*. Elek Science, 1977.
- [75] Losada M.; *Apuntes de Ferrocarriles, Guión I*. Madrid, 1982.
- [76] Losada M.; *Apuntes de Ferrocarriles, Guión II*. Madrid, 1982.
- [77] Losada M.; *Apuntes de Ferrocarriles, Guión III*. Madrid, 1982.
- [78] Losada M.; *Apuntes de Ferrocarriles, Guión IV*. Madrid, 1982.
- [79] Losada M., López A., Martín G., Nasarre J., Moreno V.; *Tecnología de la Vía I. Las Líneas Ferroviarias: Proyecto*. Madrid, 1982.
- [80] Mills D.; *Pneumatic Conveying Design Guide*. Butterworths, 1990.
- [81] Mills D.; *Abbreviated Guide, Pneumatic Conveying Design Guide*. Butterworths, 1990.
- [82] Moliner P.R.; *Engranajes*. ESII de Barcelona.
- [83] Muñoz-Gracia F.; *El Vehículo Industrial y Automóvil*. Dossat, 1991.
- [84] Muñoz-Gracia F.; *Cálculo Teórico-Práctico de los Elementos y Grupos del Vehículo Industrial y Automóvil. Tomo 1*. Dossat, 1974.
- [85] Muñoz-Gracia F.; *Cálculo Teórico-Práctico de los Elementos y Grupos del Vehículo Industrial y Automóvil. Tomo 2*. Litoprint, 1980.
- [86] Muñoz-Gracia F.; *Cálculo Teórico-Práctico de los Elementos y Grupos del Vehículo Industrial y Automóvil. Tomo 3*. Litoprint, 1982.
- [87] Muñoz-Gracia F.; *Cálculo Teórico-Práctico de los Elementos y Grupos del Vehículo Industrial y Automóvil. Tomo 4*. Litoprint, 1983.
- [88] Muñoz-Gracia F.; *Cálculo Teórico-Práctico de los Elementos y Grupos del Vehículo Industrial y Automóvil. Tomo 5*. Litoprint-Pricam, S.A., 1986.
- [89] Muñoz-Gracia F.; *Cálculo Teórico-Práctico de los Elementos y Grupos del Vehículo Industrial y Automóvil. Tomo 6*. Litoprint-Palermo, S.L., 1988.
- [90] Muñoz-Gracia F.; *Cálculo Teórico-Práctico de los Elementos y Grupos del Vehículo Industrial y Automóvil. Tomo 7*. Litoprint-Palermo, S.L., 1990.

- [91] Nene V.D.; *Advanced Propulsion Systems for Urban Rail Vehicles*. Prentice-Hall, 1985.
- [92] Newland D.E.; *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*. Longman, 1984.
- [93] Newton K., Steeds W., Garret T.K.; *The Motor Vehicle*. Butterworths, 1989.
- [94] OCDE; *Dynamic Loading of Pavements*. OCDE, 1992.
- [95] Oliveros-Rives F., López-Pita A., Mejía-Puente M.; *Tratado de Ferrocarriles I. Vía Rueda*, 1977.
- [96] Oliveros-Rives F., Rodríguez-Méndez M., Megia-Puente M.; *Tratado de Ferrocarriles II. Ingeniería Civil e Instalaciones*. Rueda, 1980.
- [97] Olsson C.; *VOLVO. Sesenta Años Fabricando Camiones*. Förlagshuset Modern AB, 1988.
- [98] Sinha P.K.; *Electromagnetic Suspension. Dynamics & Control*. IEE, 1987.
- [99] Pacejka H.B.; *Modelling of the Pneumatic Tyre and its Impact on Vehicle Dynamic Behaviour*. TU Delft, 1988.
- [100] Parraga J.; *Automoción 1*. Ediciones del Castillo, 1979.
- [101] Peters G.A., Peters B.J.; *Automotive Engineering and Litigation. Vol. 5*. John Wiley & Sons, Inc, 1993.
- [102] Peters G.A., Peters B.J.; *Automotive Engineering and Litigation. Vol.6*. John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [103] Robinson J.; *Motocicletas. Chasis*. Paraninfo, 1992.
- [104] Rowell J.M. , Gritt P.S.; *Anti-Lock Braking Systems for Passenger Cars and Light Trucks- A Review*. SAE, 1987.
- [105] SAE; *Electronics in Commercial Vehicle Braking and Steering Systems SP-753*. SAE, 1998.
- [106] SAE; *Magnetic Levitation Technology for Advanced Transit Systems*. SAE, 1989.
- [107] SAE; *Lighting Systems for Motor Vehicles SP-786*. SAE, 1989.
- [108] SAE; *Commercial Vehicle Suspensions, Steering Systems, & Traction*. SAE, 1991.
- [109] SAE; *1990 SAE Handbook. Vol. 1.: Materials*. SAE, 1990.
- [110] SAE; *1990 SAE Handbook. Vol.2: Parts and Components*. SAE, 1990.
- [111] SAE; *1990 SAE Handbook. Vol. 3.: Engines, Fuels, Lubricants, Emissions, & Noise*. SAE, 1990.
- [112] SAE; *1990 SAE Handbook. Vol. 4.: On Highway Vehicles & Off Highway Machinery*. SAE, 1990.

- [113] SAE; *Advanced Materials in Future Transportation Design*. SAE, 1988.
- [114] SAE; *Aerodynamics: Recent Developments*. SAE, 1986.
- [115] SAE; *New Developments in Polymer Composites for Automotive Applications*. SAE, 1989.
- [116] SAE; *Vehicle Dynamics Related to Braking and Steering*. SAE, 1989.
- [117] SAE; *Car Suspension Systems and Vehicle Dynamics*. SAE, 1991.
- [118] SAE; *Advanced Truck Suspensions*. SAE, 1989.
- [119] SAE; *Dynamics Characteristics of Todays Passenger Car Transmissions*. SAE, 1990.
- [120] SAE; *Automotive Transmission Advancements*. SAE, 1991.
- [121] SAE; *Transmission and Driveline Developments for Trucks*. SAE, 1991.
- [122] SAE; *Transmission and Driveline Design*. SAE, 1991.
- [123] SAE; *Manual on Design and Manufacture of Coned Disk Springs (Belleville Springs) and Spring Washers*. SAE, 1988.
- [124] SAE; *Manual for Incorporating Pneumatic Springs in Vehicle Suspension Designs*. SAE, 1988.
- [125] SAE; *Air Disc Brakes*. SAE, 1986.
- [126] SAE; *Motorcycle Dynamics and Rider Control*. SAE, 1978.
- [127] SAE; *Dynamics of Wheeled Recreational Vehicles*. SAE, 1979.
- [128] SAE; *Recreational Vehicle Dynamics*. SAE, 1980.
- [129] SAE; *Dynamics of Recreational Vehicles*. SAE, 1982.
- [130] SAE; *Vehicle Dynamics & Electronic Controlled Suspensions*. SAE, 1991.
- [131] SAE; *Ground Vehicle Lighting Manual*. SAE, 1989.
- [132] SAE; *Automotive Electric/Electronic Systems*. SAE, 1988.
- [133] SAE; *Continuously Variable Transmissions for Passenger Cars*. SAE, 1987.
- [134] SAE; *Spring Design Manual*. SAE, 1990.
- [135] SAE; *Electric Vehicles: A Decade of Transition*. SAE, 1992.
- [136] SAE; *Recent Advances in Electric Vehicle Technology*. SAE, 1989.
- [137] SAE; *Electric Vehicle Design and Development*. SAE, 1991.
- [138] SAE; *Universal Joint and Driveshaft Design Manual*. SAE, 1979.
- [139] SAE; *Side Impact Occupant Protection Technologies*. SAE, 1991.

- [140] SAE; *Side Impact: Injury Causation & Occupant Protection*. SAE, 1989.
- [141] SAE; *Frontal Crash Safety Technologies for the 90s*. SAE, 1991.
- [142] SAE; *Automotive Frontal Impacts*. SAE, 1989.
- [143] SAE; *Accident Reconstruction Technologies: Pedestrians & Motorcycles in Automotive Collisions PT-35*. SAE, 1989.
- [144] SAE; *Reconstruction of Motor Vehicle Accidents: A Technical Compendium*. SAE, -34.
- [145] Scibor-Rylski A.J.; *Road Vehicle Aerodynamics*. Halsted Press, 1984.
- [146] Seiffert U., Walzer P.; *Automobile Technology of the Future*. SAE, 1991.
- [147] Shigley J. E. , Mischke Ch. R.; *Power Transmission Element. A Mechanical Designers Workbook*. 1990.
- [148] Wong J.Y.; *Theory of Ground Vehicles*. Wiley-Interscience, 1978.
- [149] Wong J.Y.; *Terramechanics and Off-Road Vehicles*. Elsevier, 1989.

# Índice alfabético

- Aceleracion lateral, 17, 39, 45–48, 51, 63, 66  
Ackerman  
    cuadrilatero de, 10–12  
    mecanismo de, 10–12  
    Rudolph, 10  
Adherencia, 166, 170  
Aeroelasticidad, 234  
Amortiguador torsional, 200  
Angulo de ataque, 233, 248  
Angulos de la direccion  
    avance, 12–17  
    caida, 12–17, 47  
    convergencia, 12–17  
    inclinacion o salida, 12–17  
Antena, 248  
  
Bajos, 247  
Ballestas, 103  
Barras estabilizadoras, 107  
Batalla, 35  
Benz, Carl, 3  
Bernuilli, 232  
Bloqueo de una rueda, 122  
  
Capa limite, 233  
Cardan, 217  
Cayley, 5  
Centro  
    de bote y cabeceo, 91  
    de contacto, 155  
    de curvatura, 222  
    de percusion, 94  
    instantaneo de balanceo, 101  
    instantaneo de rotacion, 228  
Coeficiente de presiones, 234  
Coeficiente de resistencia aerodinamica, 232  
Coeficiente de subvirador, 39  
  
en comportamiento no-lineal, 47  
medida del, 51  
sobrevirador, 39  
subvirador, 39  
virador neutro, 39  
Cugnot de Lorraine, 2, 3  
  
D'Alembert, 233  
Daimler, Gottlieb, 3  
Deriva  
    angulo global de, 59  
    angulo de, 36–37, 172  
    rigidez a, 36–37  
Dion, Count de, 98  
Direccion a las cuatro ruedas  
    comportamiento direccional con, 59  
    mecanismos para la, 28  
Direccion asistida, 26–28  
  
Espejos, 248  
Estabilidad  
    aerodinamica, 237  
    direccional, 40, 46, 52–54  
    en el frenado, 115–117, 127  
Evolvente, 275, 282  
  
Fluido ideal, 232, 233  
Flujo Interno, 236  
Fuerza y momento aerodinamicos, 231  
Fuerzas y momentos en la rueda, 17–21  
  
Ganancia  
    de aceleracion lateral, 41  
    de velocidad angular de pivotamiento, 41  
Genevois, J.H., 3  
  
Helicoidales, 285, 287, 291  
Hertz, 165  
Histeresis, 103, 105, 170

- Kalker, 166
- Langley, Samuel P., 7
- Lankensperger, George, 10
- Laterales, 248
- Lilienthal, Otto, 6
- Lineas de corriente, 232
- Mapas de consumo, 190
- Modelo 1/4, 88
- Modelo de bicicleta, 38
- Momento de pivoteo, 237
- Morro, 241
- Olley, Maurice, 95
- Otto, Nikolaus, 4
- Par de balanceo, 42
- Parabrisas, 241
- Pilar-A, 241
- Pilar-C, 244
- Prandlt, 233
- Presion
- de corte, 121
  - distribucion en la zapata, 134
  - en un cilindro con el escape cerrado, 137
- Pseudodeslizamiento, 55, 171, 176
- Recubrimiento, 274
- Rendimiento mecanico, 25
- Resistencia
- a la rodadura, 1
  - aerodinamica, 231
- Resistencia a la rodadura, 231
- Rigidez
- a caida, 48, 174
  - a cortante, 105
  - a deriva, 36–37, 39, 41, 42, 53, 170, 172, 173
  - a flexion, 103
  - a torsion, 104
  - al balanceo o vuelco, 43, 44, 46, 102, 104, 107
  - de Gough, 162
  - del laminado, 160
  - del neumatico, 146
  - en direcciones cualesquiera, 158
- en direcciones principales, 157
- lateral, 176
- longitudinal, 56, 171, 179
- transversal, 151
- Rochas, Alphonse B. de, 4
- Ruedas, 151, 248
- Ruedas dobles, 55
- Ruido aerodinamico, 234
- Rzeppa, 222
- Shimmy, 22–24
- Spoiler delantero, 247
- Spoiler trasero, 246
- Stephenson, George, 2
- Suspension
- activa, 110
  - de ballesta corrida, 107
  - de ballesta invertida, 98
  - de cuatro ballestas, 98
  - de Dion, 98
  - de doble horquilla, 99
  - de viga flotante, 98
  - hidroneumatica, 109
  - MacPherson, 99
  - neumatica, 98, 106, 109
  - semiactiva, 110
- Tandem, 56
- Techo, 243
- Torbellinos, 236
- Tornillo sinfin, 25
- Traccion, 42
- Tracta, 220
- Transferencia de carga, 43–47, 65, 70
- Trasera, 244
- Tren de engranajes
- epicicloidal, 295–296
  - ordinario, 293–294
- Vehiculos industriales, 248
- con mas de dos ejes, 54
  - latigazo, 58
  - tijera, 58
  - traccion, 229
  - Tractor–semirremolque, 57
- Vehiculos oruga
- comportamiento direccional, 63

- mecanismos para el direccionamiento de, 31-32
- Velocidad critica, 54
- Vibraciones aleatorias
- autocorrelacion, 257
  - concepto, 253
  - densidad espectral, 84, 257, 259, 260
  - ergodicas, 257
  - fuentes de excitacion, 82
  - interaccion carretera-vehiculo-individuo, 77
  - limites de exposicion, 79-81
  - relacion excitacion-respuesta, 269
  - tolerancia de, 79
- Vientos laterales, 237
- Vignoles, Charles, 2
- Vuelco, 67
- umbral de, 68
  - de la composición tractor-semirremolque, 71
  - de vehiculo con dos ejes, 70
  - de vehiculo con suspension, 69
  - de vehiculo rigido, 67
  - en regimen transitorio, 72
  - estadisticas de accidentes de, 75
  - medida del umbral de, 72
- Watt, James, 2, 3
- Weiss, 220
- Whittle, Frank, 9
- Wright
- Orville, 7
  - Wilbur, 7