Balbás,M.

Chicharro, J.M.

García-Berrocal, A.

Incertidumbre de medida en el laboratorio

Departamento de Física Aplicada a los Recursos Naturales

Escuela T.S. de Ingenieros de Minas

Universidad Politécnica de Madrid

Madrid,2001

FUNDACIÓN GÓMEZ PARDO

Servicio de publicaciones

I.S.B.N.: 84-95063-18-2

Balbás,M.

Chicharro, J.M.

García-Berrocal, A.

Incertidumbre de medida en el laboratorio

Presentación

Esta publicación pretende recoger los fundamentos del cálculo de incertidumbres en forma de un resumen teórico-práctico de aplicación inmediata, junto con un guión para el cálculo de las incertidumbres que aparecen en los trabajos de prácticas en el laboratorio, en las asignaturas de física de primer curso en la Escuela de Minas.

Se introducen ejemplos de cálculo de los diferentes casos, con el objetivo de que el alumno pueda realizar su trabajo experimental con plena seguridad en el campo de la determinación de incertidumbres.

Son autores del trabajo los profesores del Departamento doctores M. Balbás, J.M. Chicharro Higuera y A. García-Berrocal Sánchez.

índice

PRIMERA PARTE

resumen teórico-práctico

La incertidumbre mide la variabilidad de las medidas que obtenemos experimentalmente al querer medir una determinada magnitud. Cuanto más dispersos nos salgan los valores de las medidas, mayor será la incertidumbre de nuestro resultado.

NOTA PREVIA:
Cuando se tiene una distribución normal la dispersión de los valores en torno al valor central se mide mediante la *varianza* σ^2 (o mediante su raíz cuadrada σ, denominada *desviación típica*). La estimación de la varianza de la media de los valores muestreados se obtiene como suma de los cuadrados de la distancia de cada valor al valor medio, dividida por el producto del número de datos por este número menos uno.

Por ejemplo, los valores 12,14,16,18 y 20 tienen por media 16. Las diferencias de cada uno a la media son -4,-2,0,2 y 4 , cuyos cuadrados 16,4,0,4 y 16 dan una suma 40. Su dispersión se mide por 40/(5·4)=2. Sin embargo los valores 8,12,16,20 y 24, que también están centrados en el valor medio 16, dan lugar a diferencias -8, -4,0,4 y 8, cuyos cuadrados son 64,16,0,16 y 64, que tienen por suma 160. La varianza en este caso es 160/20=8; es decir, los valores están en este caso más dispersos que en el caso anterior.

PASOS EN EL CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE

Primero- Se determina la incertidumbre ***típica*** de la medida. Esta incertidumbre se aumentará después, multiplicándola por un cierto factor ***k*** para tener mas confianza en el valor de nuestro resultado.

Segundo- Para calcular la incertidumbre típica de una medida, se comienza por ver si la medida es ***directa***, es decir, se obtiene directamente del aparato de medida, o por el contrario si con los resultados de medidas directas hay que calcular el valor de la magnitud mediante una fórmula.

Tercero- La incertidumbre típica u de una medida directa se obtiene a partir de las incertidumbres u_A de ***tipo A*** y u_B de ***tipo B***, mediante la expresión:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

NOTA DE CÁLCULO:

En el estudio de la variabilidad de una variable que es suma de otras dos, hay que sumar las varianzas de éstas para obtener la varianza de aquella: $\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2$.

Las desviaciones típicas no son directamente sumables; se han de obtener mediante la raíz de las varianzas.

Cuarto- La incertidumbre de tipo A se calcula a partir de los valores de las medidas obtenidas. Sean n estas medidas, siendo x_i sus valores y $\bar{x}$ su valor medio:

$$u_A = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Quinto- La incertidumbre de tipo B se calcula a partir de los datos que se tengan, bien dados por el fabricante del equipo de medida, o por su certificado de calibración, o debido a estudios hechos sobre el comportamiento del equipo y en los cuales se hayan determinado posibles variabilidades en los resultados, definidas por sus varianzas.

Si el dato conocido es que el equipo se comporta, al menos para ciertos aspectos, con una distribución normal de incertidumbre U_B expandida mediante un factor k conocido, la incertidumbre típica correspondiente será $u_B = U_B/k$.

Si por el contrario la distribución seguida es de tipo rectangular con anchura *2a*, la incertidumbre típica es $u_B = a/\sqrt{3}$.

Si se conocen varios términos de incertidumbre u_{Bi} de tipo B para la misma medida (porque se hayan estudiado los comportamientos debidos a diferentes causas, por ejemplo) se obtiene la total mediante $u_B = \sqrt{\Sigma\, u_{Bi}^2}$

Sexto- Si la medida y es ***indirecta*** y se calcula a partir de una expresión $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ y previamente se han calculado las incertidumbres directas u_i de las medidas x_i, la incertidumbre típica de y se obtiene mediante:

$$u(y) = \sqrt{c_1^2 u_1^2 + c_2^2 u_2^2 + ... + c_n^2 u_n^2}$$

donde los coeficientes c, llamados de sensibilidad, son las derivadas parciales de y respecto de x_i en la función f:

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

Séptimo- Por último se expande la incertidumbre típica u obteniendo la incertidumbre expandida U, multiplicando u por un factor de recubrimiento k *(U=ku).* Si los valores de las medidas siguieran una distribución normal, el valor *k=2* corresponde a un nivel de confianza del 95,45% y el valor *k=3* al 99,77%.

Octavo- La expresión obtenida para la incertidumbre se presentará con solo dos cifras significativas, redondeando la segunda por exceso siempre. El valor de la medida se presentará con el mismo número de cifras decimales que tenga la incertidumbre.

EJEMPLO DEL CRITERIO DE CIFRAS:

Supongamos que se ha medido una longitud y que el valor obtenido es 28,3456 cm, mientras que la incertidumbre calculada toma el valor 1,2187 cm.

Al dejar la incertidumbre con solo dos cifras significativas, deberá expresarse como 1,3 cm, al forzar por exceso la segunda cifra, suprimiendo las siguientes. Por tanto la medida se expresará como 28,3. El resultado es:

$$28{,}3 \pm 1{,}3 \text{ cm}$$

o bien:

$$(27{,}0 \ ; \ 29{,}6)$$

A veces es útil expresar los resultados utilizando potencias de 10, dejando dos cifras como parte entera. Por ejemplo 1,2187 cm se escribirá como $12{,}187 \cdot 10^{-1}$; el resultado del truncamiento de cifras, forzando la segunda es $13 \cdot 10^{-1}$ cm.

Si, en otro ejemplo, hubiéramos obtenido 2324,238 con incertidumbre de valor 113,395, deberíamos escribir ésta como $11{,}3395 \cdot 10^{1}$, que quedará como $12 \cdot 10^{1}$. El valor obtenido se escribirá como $232{,}4238 \cdot 10^{1}$, y quedará como $232 \cdot 10^{1}$. El resultado final será:

$$(232 \pm 12) \cdot 10^{1} = 2320 \pm 120.$$

EJEMPLO DE CÁLCULO:

Se quiere medir el volumen *V* de un cubo, determinando su incertidumbre expandida para *k*=3. Para ello se dispone de un equipo de medida para medir el lado *L* del cubo. De esta forma, la medida directa es la del lado *L,* mientras que la del volumen es una medida indirecta dada por:

$$V = L^3$$

Supongamos que se mide cinco veces el lado *L* y que se han obtenido los siguientes valores en centímetros:

L=	*10,14*
L=	*10,12*
L=	*9,98*
L=	*10,10*
L=	*10,03*

El valor medio será:

$$\overline{L} = \frac{10{,}14 + 10{,}12 + 9{,}98 + 10{,}10 + 10{,}03}{5} = 10{,}074\, cm$$

de donde se obtiene el valor del volumen:

$$V = \overline{L}^3 = 10{,}074^3 = 1022{,}36468\ cm^3$$

<u>Incertidumbre típica de tipo A de la medida directa del lado *L*</u>

Si formamos una nueva tabla, partiendo de la anterior, en la que se ha añadido una columna con la diferencia entre el valor de *L* y su valor medio y otra columna con el cuadrado de esta diferencia. En la parte inferior se anota la suma de estas diferencias:

L_i	$L_i - \bar{L}$	$(L_i - \bar{L})^2$
10,14	-0,066	$4,356 \cdot 10^{-3}$
10,12	-0,046	$2,116 \cdot 10^{-3}$
9,98	0,094	$8,836 \cdot 10^{-3}$
10,10	-0,026	$0,676 \cdot 10^{-3}$
10,03	0,044	$1,936 \cdot 10^{-3}$
		$17,92.\ 10^{-3}$

Y con esta suma se tiene:

$$u_A^2(L) = \frac{17,92.10^{-3}}{20} = 0,896.10^{-3}\ cm^2$$

y:

$$u_A(L) = \sqrt{\frac{17,92.10^{-3}}{20}} = 0,0299\,cm$$

<u>Incertidumbre de tipo B de la medida del lado *L*</u>

Se han estudiado dos contribuciones a la incertidumbre. En primer lugar, la calibración hecha al dispositivo de medida da una incertidumbre de 0,08cm, suponiendo una distribución normal y que la incertidumbre dada está expandida a un nivel de confianza del 95,45 %. Esto quiere decir que en $U=ku$, U tiene el valor 0,08 y k vale 2. Por tanto u=0,04. Así la primera contribución a considerar es:

$$u_c=0,04$$

En segundo lugar, se sabe que la resolución del dispositivo de medida es $2a$=0,05. En una distribución de esta anchura la incertidumbre típica es:

$$u_r = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,05/2}{\sqrt{3}} = 0,0144$$

La incertidumbre total de tipo B se calcula mediante:

$$u_B^2 = u_c^2 + u_r^2 = 0,04^2 + 0,0144^2 = 1,8074\ .\ 10^{-3}$$

y por tanto:

$$u_B = \sqrt{1{,}8074.10^{-3}} = 0{,}0425\ cm$$

Incertidumbre típica de la medida directa del lado *L*

Conocidas las incertidumbres de tipo A y tipo B, se obtiene la total mediante:

$$u(L) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{(0{,}896 + 1{,}8074).10^{-3}} = 0{,}0519\ cm$$

Incertidumbre de la medida indirecta del volumen *V*

El volumen se calcula a partir del lado *L* mediante $V=L^3$. En esta expresión se tiene:

$$c = \frac{\partial V}{\partial L} = 3L^2 = 3\ .\ 10{,}074^2 = 304{,}4564$$

y por tanto:

$$u(V) = \sqrt{(c\ u(L))^2} = c\ u(L) = 304{,}4564\ .\ 0{,}0519 = 15{,}8013\ cm^3$$

Incertidumbre expandida de la medida del volumen

Como el resultado se ha pedido para *k*=2, finalmente se tiene:

$$U(V) = k\ u(V) = 2\ .\ 15{,}8013 = 31{,}6026\ cm^3$$

Si se toman dos cifras significativas en este resultado, se tiene, forzando la segunda por exceso:

$$\boxed{U(V)=32\ cm^3}$$

La medida del volumen es, tomando en *V* las mismas cifras decimales que en *U*:

$$\boxed{V= 1022 \pm 32\ cm^3}$$

SEGUNDA PARTE

Aplicación a los trabajos prácticos del programa del laboratorio

En esta segunda parte se aplica el cálculo de incertidumbres a los trabajos prácticos a desarrollar como parte del programa de la asignatura de Física II de primer curso del plan de estudios del Ingeniero de Minas, en la E.T.S. de I. de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid. Solamente se aplica el cálculo de incertidumbres en las prácticas números 1,2 y 3, que son las que se detallan a continuación.

PRÁCTICA Nº 1: METROLOGÍA DIMENSIONAL

1.1 Objetivos de la práctica

La finalidad de la práctica es la determinación experimental del volumen de una pequeña pieza prismática.

Los objetivos que se persiguen con este trabajo son los siguientes:

- Manejar instrumentos para medida de pequeñas longitudes (calibre y micrométro).
- Obtener la incertidumbre de una medida directa.
- Calcular la incertidumbre de una medida indirecta.
- Realizar un estudio de sensibilidad.

1.2 Características de los aparatos

La magnitud que se mide con mayor frecuencia es la longitud. Por esta razón y por su sencillez iniciaremos nuestro estudio práctico con la medida de longitudes. Los instrumentos más usuales para la medida de longitudes pequeñas son: regla graduada, calibre, tornillo micrométrico, comparador ....

1.2.1 Calibre o Pie de Rey

El calibre (figura 1.1), también llamado pie de rey, es un instrumento de medida de longitudes tanto exteriores (nos serviremos para ello de las pinzas inferiores colocando el objeto entre ellas figura 1.2), como interiores (utilizando las pinzas superiores, figura 1.3).

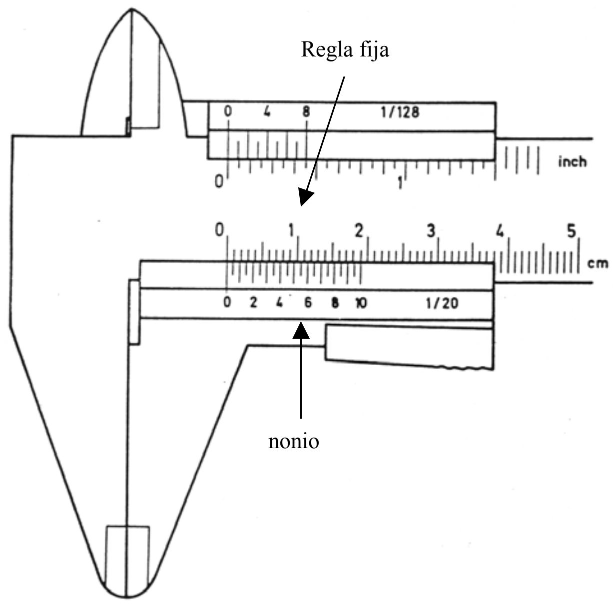

Figura 1.1. Calibre o pie de rey.

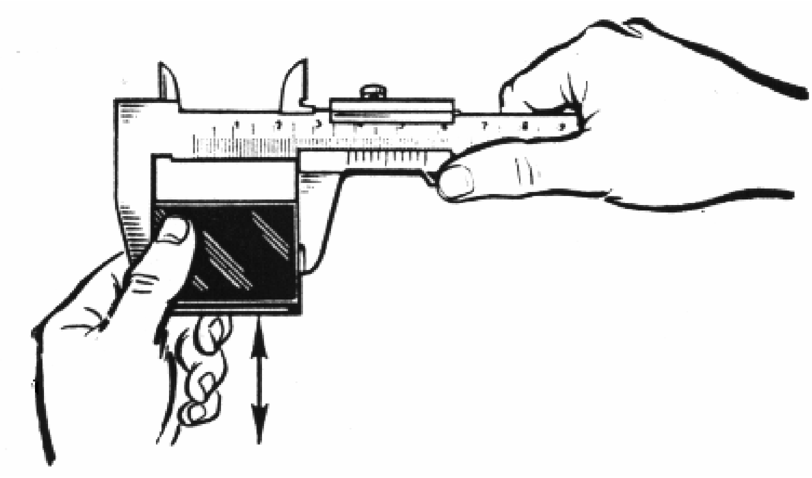

Figura 1.2. Medida de dimensiones exteriores con el calibre.

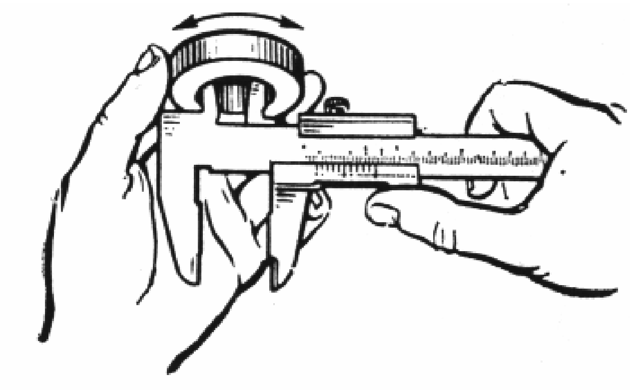

Figura 1.3. Medida de dimensiones interiores con el calibre.

El calibre consta de una regla R fija sobre la que están grabadas dos escalas, una de ellas en mm (en la parte inferior) y la otra en pulgadas. Utilizaremos siempre la primera de ellas. Sobre la regla principal desliza la corredera ó parte móvil del calibre, en la que está grabada una escala llamada nonio. Esta escala está dividida en 20 partes (ver la figura 1.4), aun cuando suele estar numerada del 0 al 10 (a veces el fabricante solo graba los números pares), quedando entre las divisiones numeradas, las intermedias de trazo más corto.

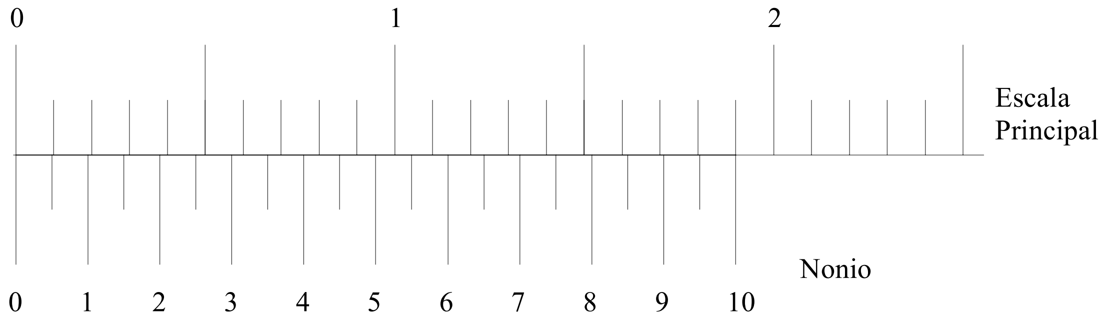

Figura 1.4. Divisiones en el nonio y en la regla principal.

Cuando el cero del nonio coincide con el cero de la regla principal, el último trazo del nonio también coincide exactamente con un trazo de la escala principal (en algunos modelos es la división 19 y en otros la 39). El trazo siguiente al 0 del nonio (habitualmente no numerado y que estaría marcado con 0,5 si tuviese número) no coincide con un trazo de la escala principal (fig. 1.5), aunque está muy cerca. Habría que abrir las pinzas una pequeña cantidad p para que estos trazos coincidieran. Al hacerlo así, el segundo trazo del nonio, el numerado con 1, no llega a coincidir con un trazo de la regla principal; le falta la cantidad p. Así si las pinzas se abrieran hasta estar separadas 2p, este trazo del nonio coincidiría con un trazo de la regla. Si se siguieran abriendo las pinzas hasta llegar a estar separadas un milímetro (el cero del nonio coincidiría entonces con el 1 de la regla principal) sería el último trazo del nonio el que coincidiría con un trozo de la principal. Por consiguiente para saber cuanto se han abierto las pinzas, se mirará primero cuánto marca la escala principal (qué trazo es el que está a la izquierda del 0 del nonio). Ese es el número de milímetros enteros. Para conocer la fracción de milímetro restante, nos fijaremos en qué trazo del nonio coincide con el otro de la principal. Como 20p = 1mm , p = 1/20 = 0,05mm. Multiplicando esta cantidad por el número del trazo tendremos la fracción de mm correcta. Como en la práctica los fabricantes numeran el nonio del 1 al 10, cada una de estas divisiones grandes equivale a 2x0,05 = 0,10mm. Es decir, los números que dan directamente las décimas de milímetro. Si el que coincide, por ejemplo, es el trazo numerado con el 8, la medida es 0,80mm. Si el que coincidiera fuera un intermedio por ejemplo el 17, que queda entre los número 8 y 9, la medida será 0,85mm. En cualquier caso vemos que la resolución del aparato es r = 1/20 = 0,05mm.

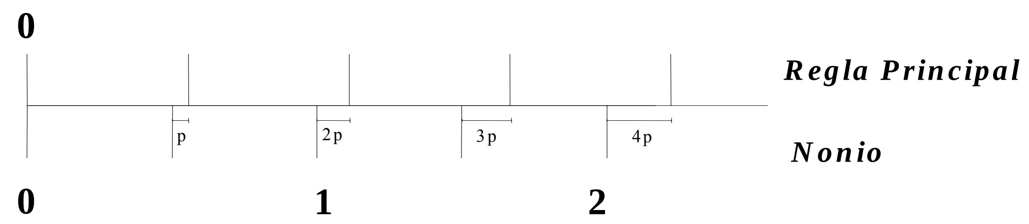

Figura 1.5. Desplazamiento entre el nonio y la regla principal.

El modo práctico de realizar una medida con el calibre (supongamos por ejemplo la medida es la de la figura 1.6) es el siguiente:

- Buscar la primera división de la regla fija que queda a la izquierda del cero del nonio (en el ejemplo *X=22 mm*). Este es el valor de la medida con la resolución de la escala principal. Para obtener la resolución máxima en la medida con el calibre se debe utilizar el nonio.
- Buscar la división del nonio que coincide con una de la escala principal (*div=14 en el ejemplo*) Se debe tener cuidado con la numeración que tiene la

escala del nonio (para nonio numerados) dado que cada unidad corresponde con dos divisiones del mismo. En el ejemplo la 14 es la división grande entre 6 y 8.

- Mirar el valor que tiene la mínima división de la escala principal (*d=1 mm*).
- Mirar el número de divisiones del nonio (*n=20*).
- Obtener la resolución dividiendo el tamaño de la mínima división de la escala principal (*d*=1mm) por el número de divisiones del nonio (*n*=20).

$$resolución = \frac{1mm}{20} = 0{,}05\ mm$$

- La medida realizada será igual a:

$$X + div \cdot resolución = 22mm + 14 \cdot 0{,}05 = 22{,}70mm$$

En la práctica no es necesario hacer operaciones. Hay fabricantes que numeran el nonio una línea sí y otra no, del 1 al 10; cada una de estas divisiones grandes equivale a 0,10mm. Con lo que las décimas de milímetro se leen directamente: tantas como corresponde a la división que coincide, si es de las numeradas. Si la que coincide es una de las no numeradas serán las décimas de la línea numerada anterior más 0,05 mm (suponemos que la 15, entre las numeradas con un 7 y con un 8, corresponde a 7,5 décimas es decir 0,75 mm). Otros fabricantes numeran las líneas del nonio de dos en dos y solo escriben los números pares del 0 al 10 (figura 1.6); el criterio seguido es el mismo que antes.

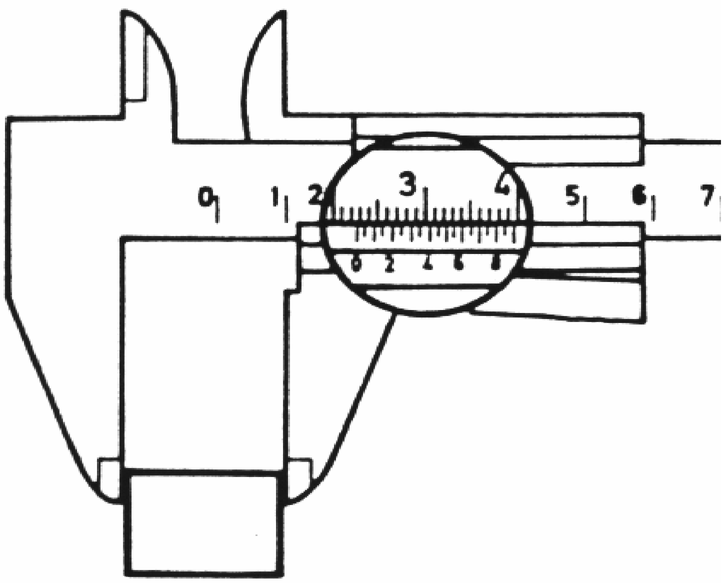

Figura 1.6. Medida con el calibre.

1.2.2 Micrómetro o Pálmer

El pálmer únicamente se puede emplear para medir dimensiones exteriores, (figura 1.7). Consta en esencia de un tornillo de paso de rosca constante, con un tambor cilíndrico graduado; una escala lineal en el tornillo, en donde se puede apreciar el número de vueltas completas que da el tambor, mientras que las fracciones de vuelta se leen en la escala del tambor. Si, por ejemplo, el paso de rosca es tal que el tambor avanza 0,5 mm por cada vuelta completa y la escala de éste está dividida en 50 partes, por cada unidad que gire el tambor, su avance será de 0,5mm/50, es decir 0,01 mm.

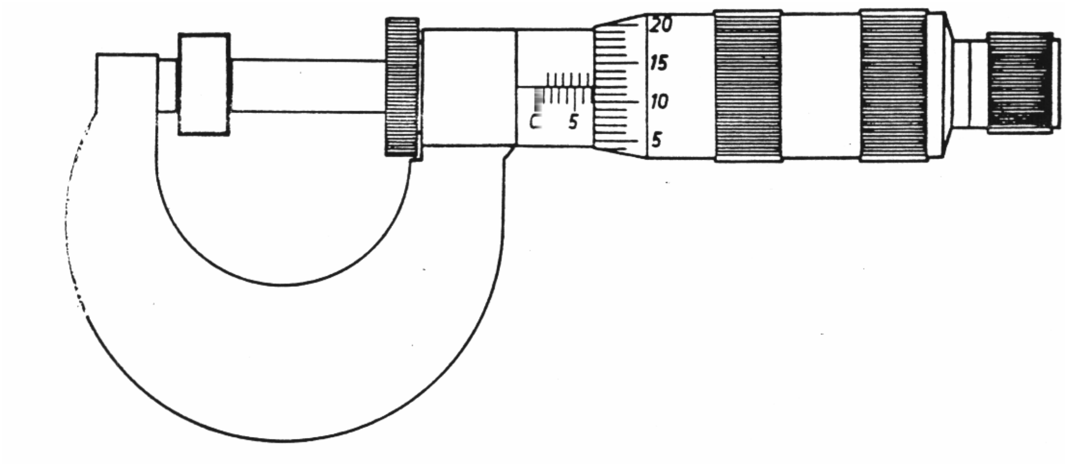

Figura 1.7. Micrómetro o palmer.

Por lo tanto la resolución del pálmer es igual al paso de rosca (desplazamiento en una vuelta) dividido por el número de divisiones que tiene el tambor. En este caso la resolución del micrómetro del ejemplo es:

$$resolución = \frac{paso\ de\ rosca}{divisiones\ del\ tambor} = \frac{0{,}5mm}{50} = 0{,}01mm$$

Modo práctico de realizar una medida con el pálmer (en el caso del ejemplo el tambor está dividido en 50 partes y el paso de rosca es de 0,5 mm, figura 1.7; la numeración de la parte inferior de la escala lineal indica parejas de vueltas, es decir 1mm por división, mientras que en la parte superior se ven las indicaciones de las vueltas intermedias):

- Contar el número de divisiones enteras que aparecen en la escala lineal. En el caso de la figura 1.7 son 14; como el paso de rosca es de 1/2 mm, el avance de estas 14 divisiones será:

$$14 \cdot \frac{1}{2} = 7mm$$

O bien fijándonos (figura 1.7) en la parte inferior de la escala se lee 7, es decir 7mm.

- Observar la división de la escala del tambor que coincide con la lineal horizontal de la escala lineal. En este caso vemos que es la división 12; el avance correspondiente a estas doce divisiones, se obtiene multiplicando el número de división por la resolución:

$$12 \cdot resolución = 0{,}12mm$$

- La medida del pálmer será en este caso:

$$7\ mm + 0{,}12\ mm = 7{,}12\ mm$$

1.3.- DESARROLLO DE LA PRÁCTICA:ESTUDIO DIMENSIONAL DE UNA PIEZA

En esta práctica se estudiará dimensionalmente una pieza problema y se determinará su volumen. Se emplearán el calibre y el pálmer. Se deberá calcular la incertidumbre y la fiabilidad de las medidas directas del estudio dimensional y también del volumen resultante(medida indirecta).

1.3.1.1 Modo Operativo

El cuerpo problema es el esquematizado en la figura 1.8. Esta pieza es un prisma rectangular con un lado mucho más largo que los otros (L = Longitud), un lado mucho más pequeño que los otros (E = Espesor) y un tercer lado intermedio denominado anchura (A).

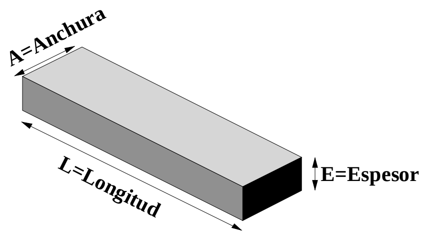

Figura 1.8. Pieza Problema

- Tomando medidas con el calibre, se determinarán las tres longitudes. Para ello se tomarán series de **seis valores de cada una de ellas**, en distintos puntos. , para poder calcular posteriormente el valor más probable (la media aritmética).

Ejemplo

Supongamos que se han medido los valores siguientes:

A (cm)	*L (cm)*	*E (cm)*
2,520	*4,800*	*0,115*
2,525	*4,780*	*0,120*
2,525	*4,770*	*0,110*
2,540	*4,800*	*0,120*
2,520	*4,760*	*0,120*
2,525	*4,770*	*0,115*

Así se tiene que los valores medios de A, L y E son:

$$\overline{A} = \frac{1}{6}(2{,}520 + 2{,}525 + 2{,}525 + 2{,}540 + 2{,}520 + 2{,}525) = 2{,}525833\ cm$$

$$\overline{L} = \frac{1}{6}(4{,}800 + 4{,}780 + 4{,}770 + 4{,}800 + 4{,}760 + 4{,}770) = 4{,}78000\ cm$$

$$\overline{E} = \frac{1}{6}(0{,}115 + 0{,}120 + 0{,}110 + 0{,}120 + 0{,}120 + 0{,}115) = 0{,}116\widehat{6}\ cm$$

- Calcular la incertidumbre correspondiente a cada medida. Para el cálculo de la incertidumbre se comenzará por la de tipo A. En el cálculo de la incertidumbre de tipo B se supondrá una distribución rectangular con una anchura igual a la mínima medida (resolución) que puede apreciar el aparato.

para la anchura *A* tenemos que la incertidumbre tipo A es igual a:

$$u_A(A) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} (A_j - \overline{A})^2}$$

con los datos del ejemplo generamos la siguiente tabla:

A (cm)	$A-\overline{A}$	$\left(A-\overline{A}\right)^2$
2,520	-0,0058	0,0000340
2,525	-0,0008	0,0000007
2,525	-0,0008	0,0000007
2,540	0,0142	0,0002007
2,520	-0,0058	0,0000340
2,525	-0,0008	0,0000007

y con ella tenemos:

$$u_A(A) = \sqrt{\frac{1}{6 \cdot 5} \sum_{j=1}^{6} \left(A_j - \overline{A}\right)^2} = 3{,}004663 \cdot 10^{-3}\ cm$$

Para calcular la incertidumbre tipo B, partimos de la medida mínima que es capaz de apreciar el calibre. En nuestro caso tal y como se detalla en el epígrafe 1.2.1, la resolución es 0,005 cm. Tomando una distribución rectangular de anchura igual a la resolución tenemos que el parámetro *a* para la determinación de la incertidumbre en este tipo de distribuciones es igual a:

$$Anchura = 2a = 0{,}005\,cm \rightarrow a = 0{,}0025\,cm$$

Así la incertidumbre tipo B, debida a la resolución del calibre, es:

$$u_B(A) = \sqrt{\frac{1}{3}a^2} = \sqrt{\frac{1}{3}0{,}0025^2} = 1{,}443375 \cdot 10^{-3}$$

La incertidumbre total de la medida A es la siguiente:

$$u^2(A) = u_A^2(A) + u_B^2(A)$$

Así:

$$u(A) = \sqrt{\left(3{,}00466 \cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(1{,}44337 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 3{,}333366 \cdot 10^{-3}\,cm$$

Por tanto el resultado de la anchura *A* se expresará:

$$A = \overline{A} \pm u(A) = 2{,}5258 \pm 0{,}0034\ cm$$

Si operamos análogamente con el resto de las medidas se obtiene la siguiente tabla de resultados:

	A (cm)	L (cm)	E (cm)
Media	2,5258	4,7800	0,11667
$u_A(q)$	$3{,}0046\cdot 10^{-3}$	$6{,}8313\cdot 10^{-3}$	$1{,}6667\cdot 10^{-3}$
$u_B(q)$	$1{,}4434\cdot 10^{-3}$	$1{,}4434\cdot 10^{-3}$	$1{,}4434\cdot 10^{-3}$
$u\ (q)$	$3{,}3333\cdot 10^{-3}$	$6{,}9821\cdot 10^{-3}$	$2{,}2048\cdot 10^{-3}$

- Se calculará el volumen de la pieza a partir de las medidas de A, L y E (medida indirecta), siendo el volumen

$$V = Volumen = A \cdot L \cdot E$$

En nuestro ejemplo, entrando la fórmula del volumen con los valores medios calculados anteriormente tenemos:

$$V = \overline{A} \cdot \overline{L} \cdot \overline{E} = 2{,}5258 \cdot 4{,}7800 \cdot 0{,}11667 = 1{,}40857306\ cm^3$$

- Se calculará la incertidumbre del volumen de la pieza.

Para determinar la incertidumbre típica de *V* se aplicará:

$$u^2(V) = c_A^2 \cdot u^2(A) + c_L^2 \cdot u^2(L) + c_E^2 \cdot u^2(E)$$

donde *u(A)*, *u(L) y u(E)* son las incertidumbres de las medidas de la anchura (*A*), longitud (*L*) y espesor (*E*); c_A, c_L y c_E son los correspondientes coeficientes de sensibilidad para cada una de las variables. Los coeficientes de sensibilidad son en este caso:

$$c_A = \left[\frac{\partial V}{\partial A}\right] = \overline{L} \cdot \overline{E}$$

$$c_L = \left[\frac{\partial V}{\partial L}\right] = \overline{A} \cdot \overline{E}$$

$$c_E = \left[\frac{\partial V}{\partial E}\right] = \overline{A} \cdot \overline{L}$$

Para el cálculo de la incertidumbre de *V* comenzamos calculado los coeficientes de sensibilidad

$$c_A = \left[\frac{\partial V}{\partial A}\right] = \overline{L} \cdot \overline{E} = 4{,}7800 \cdot 0{,}11667 = 0{,}5576$$

$$c_L = \left[\frac{\partial V}{\partial L}\right] = \overline{A} \cdot \overline{E} = 2{,}5258 \cdot 0{,}11667 = 0{,}29468$$

$$c_E = \left[\frac{\partial V}{\partial E}\right] = \overline{A} \cdot \overline{L} = 4{,}7800 \cdot 2{,}5258 = 12{,}0733$$

Con estos coeficientes de sensibilidad y los valores de incertidumbre de la anchura, longitud y espesor determinados anteriormente tenemos que:

$$u^2(V) = c_A^2 \cdot u^2(A) + c_L^2 \cdot u^2(L) + c_E^2 \cdot u^2(E) = 7{,}1629 \cdot 10^{-4}$$

Así la incertidumbre del volumen es

$$u(V)=0{,}02676356 \text{ cm}^3$$

que con el criterio de dos cifras significativas con la segunda forzada, queda

$$u(V)=0{,}027 \text{ cm}^3$$

y el resultado del volumen *V* se expresará:

$$V=\overline{V} \pm u(V) = 1{,}409 \pm 0{,}027 \text{ cm}^3$$

La incertidumbre expandida de la medida, se calcula, multiplicando la típica obtenida por un coeficiente *k, en este caso igual a* 2,

$$U(V) = k\ u(V) = 2 \cdot 0{,}02676356 = 0{,}05353 \text{ cm}^3$$

Así

$$V=\overline{V} \pm U(V) = 1{,}409 \pm 0{,}054 \text{ cm}^3 \ (k=2)$$

- Se realizará un estudio de sensibilidad determinando qué dimensión de la pieza es crítica en la incertidumbre.

Para realizar el estudio de sensibilidad se estudiaran las contribuciones a la incertidumbre final de cada una de las dimensiones de la pieza. Se denomina contribución a la incertidumbre al producto entre el coeficiente de sensibilidad por su incertidumbre:

$$u_A(V)=c_A \cdot u(A)=L \cdot E \cdot u(A)$$

$$u_L(V)=c_L \cdot u(L)=A \cdot E \cdot u(L)$$
$$u_E(V)=c_E \cdot u(E) =A \cdot L \cdot u(E)$$

La mayor contribución será la medida que más afectará en la incertidumbre del volumen. En el caso de que dos contribuciones fuesen iguales se analizará cuál tiene un mayor coeficiente de sensibilidad.

Volviendo al ejemplo anterior tenemos las siguientes contribuciones a la incertidumbre del volumen:

A = Anchura ⇒ $u_A(V)$=1,8589·10^{-3} $v_1 = u_E(V)/ u_A(V)$=14,34≈15
L = Longitud ⇒ $u_L(V)$=2,0575·10^{-3} $v_2 = u_E(V)/ u_L(V)$=12,94≈13
E = Espesor ⇒ $u_E(V)$=2,6620·10^{-2}

Como se observa con las contribuciones a la incertidumbre del volumen, la incertidumbre que más afecta a la medida del volumen es la del espesor de la placa: afecta 15 veces más que la de la anchura de la placa y 13 veces más que su longitud. Si las relaciones entre las contribuciones a incertidumbre fuesen iguales se buscará cual de las variables tiene un coeficiente de sensibilidad mayor. En este caso suponiendo que las relaciones anteriores fuesen iguales también se escogería el espesor, dado que su coeficiente de sensibilidad influye 41 veces más que la longitud y 22 veces más que la anchura, tal y como se comprueba a continuación:

A = Anchura ⇒ c_A=0,55766667 $v_1 = c_E/ c_A$=21,65≈22
L = Longitud ⇒ c_L=0,29468056 $v_2 = c_E/ c_L$=40,97≈41
E = Espesor ⇒ c_E=12,0733

Por lo tanto de este análisis de sensibilidad, para conseguir una mayor precisión en la medida del volumen es recomendable actuar principalmente sobre la precisión de la medida del espesor de la placa. Así midamos el espesor con un Palmer o Pie de Rey, que tiene una mayor precisión que el calibre empleado. La medida mínima que es capaz de apreciar el palmer es de 0,001 cm. Su incertidumbre tipo B, debida a la resolución, suponiendo que sigue una función de distribución rectangular es igual a

Palmer: → $u_B(E)$=2,88675·10^{-4} cm

Esta incertidumbre es inferior a la que teníamos con el calibre.

- Se medirá la dimensión crítica con el pálmer para mejorar la incertidumbre final de la medida. Se deberán tomar 6 medidas, también en distintos puntos, de esta dimensión más critica.

Si tomamos 6 nuevas medidas de la dimensión crítica con el palmer, es decir del espesor, tenemos:

E (cm)
0,115
0,117
0,116
0,117
0,116
0,117

El valor medio de estas medidas es:

$$\overline{E} = \frac{1}{6}(0{,}115 + 0{,}117 + 0{,}116 + 0{,}117 + 0{,}116 + 0{,}117) = 0{,}116\widehat{3}\ cm$$

La incertidumbre tipo A de estas medidas es:

$$u_A(E) = \sqrt{\frac{1}{6 \cdot 5}\sum_{i=1}^{i=6}\left(E_i - \overline{E}\right)^2} = 3.3366 \cdot 10^{-4} \quad \text{cm}$$

Teniendo en cuenta la incertidumbre tipo B del palmer, calculada anteriormente, la incertidumbre total del espesor medido de nuevo:

$$u(E) = \sqrt{\left(3{,}3366 \cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(2{,}88675 \cdot 10^{-4}\right)^2} = 4{,}4121 \cdot 10^{-4}\ cm$$

Por tanto el resultado del espesor *E* se expresará:

$$E = \overline{E} \pm u(E) = 0{,}11633 \pm 0{,}00045\ cm$$

- Se calculará la incertidumbre total del volumen empleando las nuevas medidas de la dimensión crítica realizadas con el palmer y las dos dimensiones restantes realizadas anteriormente con el calibre de la pieza.

Igual que se realizó anteriormente calculamos el valor del volumen de la pieza con las nuevas medidas realizadas del espesor:

$$V = \overline{A} \cdot \overline{L} \cdot \overline{E} = 2{,}5258 \cdot 4{,}7800 \cdot 0{,}1163 = 1{,}404548\, cm^3$$

Para el cálculo de la incertidumbre de *V* primeros calculamos los coeficientes de sensibilidad

$$c_A = \left[\frac{\partial V}{\partial A}\right] = \overline{L} \cdot \overline{E} = 4{,}7800 \cdot 0{,}1163 = 0{,}5559$$

$$c_L = \left[\frac{\partial V}{\partial L}\right] = \overline{A} \cdot \overline{E} = 2{,}5258 \cdot 0{,}1163 = 0{,}2937$$

$$c_E = \left[\frac{\partial V}{\partial E}\right] = \overline{A} \cdot \overline{L} = 4{,}7800 \cdot 2{,}5258 = 12{,}0733$$

Con estos coeficientes de sensibilidad y los valores de incertidumbre de la anchura y longitud, medidos con el calibre, y espesor medido con el palmer, tenemos que:

$$u^2(V) = c_A^2 \cdot u^2(A) + c_L^2 \cdot u^2(L) + c_E^2 \cdot u^2(E) = 3{,}6033 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm}^3$$

Así la incertidumbre del volumen es

$$u(V) = 0{,}0060027\ \mathrm{cm}^3$$

y el resultado del volumen *V* se expresará:

$$V = \overline{V} \pm u(V) = 1{,}4045 \pm 0{,}0061\ cm^3$$

La incertidumbre expandida para k=2 es:

$$V = \overline{V} \pm U(V) = 1{,}405 \pm 0{,}013\ cm^3\ (k=2)$$

- Se comparará la incertidumbre obtenida en el volumen a partir de las medidas realizadas con el pálmer y las realizadas sólo con el calibre. ¿Cuál es el método más preciso para la determinación del volumen?.

Para comparar cuál es el método más preciso se debe comprobar en primer lugar si los intervalos resultantes en ambos métodos son coincidentes o si uno de ellos es incluido en el otro. En segundo lugar se debe comparar los valores de incertidumbres obtenidos.

En nuestro ejemplo con todas las medidas realizadas solamente con el calibre teníamos que:

$$V=\overline{V} \pm U(V) = 1{,}409 \pm 0{,}054 \ cm^3 \ (k=2)$$

es decir el volumen V se encuentra en el siguiente intervalo:

$$1{,}355 \ cm^3 \leq V \leq 1{,}463 \ cm^3$$

Las medidas del espesor realizadas con el palmer y el resto con el calibre:

$$V=\overline{V} \pm U(V) = 1{,}405 \pm 0{,}013 \ cm^3 \ (k=2)$$

y el intervalo es en esta caso

$$1{,}392 \ cm^3 \leq V \leq 1{,}417 \ cm^3$$

Si se compara ambos intervalos se observa que el segundo queda incluido en el primero.

Para valorar cuál de los métodos es más preciso, determinamos las incertidumbres relativas:

las 3 medidas realizadas con calibre $\Rightarrow$

$$u(V)_{relativa} = \frac{u(V)}{V} \cdot 100 = \frac{0{,}027}{1{,}409} \cdot 100 = 1{,}90\,\%$$

espesor con palmer y restantes medidas con calibre $\Rightarrow$

$$u(V)_{relativa} = \frac{u(V)}{V} \cdot 100 = \frac{0{,}0061}{1{,}4045} \cdot 100 = 0{,}43\,\%$$

Si comparamos estas incertidumbres relativas midiendo el espesor con el palmer, obtenemos una incertidumbre casi 4,42 veces más pequeña en las medidas del volumen.

PRACTICA Nº 2: LEY DE OHM

2.1 OBJETIVOS DE LA PRÁCTICA

- Se pretende realizar medidas eléctricas en un circuito de tres lámparas en serie y mediante él comprobar experimentalmente la ley de Ohm.
- En una segunda parte, se busca estudiar la variación de la resistencia del filamento de una lámpara con la temperatura.

2.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS APARATOS DE MEDIDA.

2.2.1 Para corriente alterna

2.2.1.1 Amperímetro analógico.

El aparato dispone de dos campos de media: se puede medir de 0 a 1A o entre 0 y 0,5A.

Para la incertidumbre tipo B, se emplearán los datos aportados por el fabricante del amperímetro. Éste sigue una función rectangular en un intervalo doble de la resolución de la escala que se haya empleado en la realización de la medida (figura 2.1). La resolución de una escala es la medida mínima que se puede apreciar en esa escala. Así por ejemplo en la escala de 0 a 1A la medida mínima que se puede realizar es 0,01A. Así 2a=0,02A.

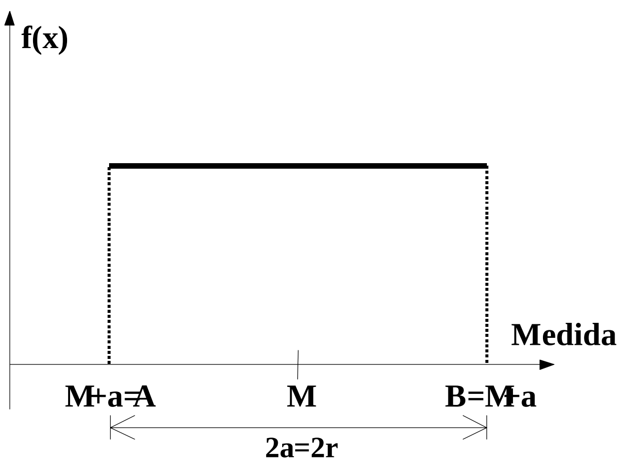

Figura 2.1. Función de probabilidad de las medidas de d.d.p, donde *M* es la medida y *r* es la resolución en la escala empleada.

2.2.1.2 Voltímetro digital.

Para la medida de la diferencia de potencial en corriente alterna se empleará un multímetro. Este aparato se denomina así porque permite medir varias magnitudes (diferencias de potencial, intensidades y resistencias) seleccionando la escala adecuada.

Las escalas que dispone el aparato como voltímetro son 200V y 750V estos valores, llamados fondo de escala, corresponden a los máximos que se pueden medir con esa escala.

Para la incertidumbre de tipo B, el fabricante certifica que las medidas de este aparato siguen una distribución normal, tal que para una fiabilidad del 99,77%, la incertidumbre expandida es igual al 0,1% del máximo de la escala empleada. Puesto que en una distribución normal para alcanzar una fiabilidad del 99,77% hay que tomar un factor de recubrimiento k=3, la incertidumbre será:

$$u_B = \frac{0{,}1\% \text{ del máximo de escala}}{k} = \frac{0{,}1\% \text{ del máximo de escala}}{3}$$

2.2.2 Para corriente continua

2.2.2.1 Amperímetro digital.

Para la medida de la intensidad en corriente continua se empleará también un multímetro.

Las escalas que dispone el aparato empleado como amperímetro van desde 200µA hasta 10A; estos valores, como en el caso anterior, llamados fondo de escala, corresponden a los máximos que se pueden medir con dicha escala.

Para la incertidumbre de tipo B, según lo visto en el apartado 2.2.1.2 es:

$$u_B = \frac{0{,}1\% \text{ del máximo de escala}}{k} = \frac{0{,}1\% \text{ del máximo de escala}}{3}$$

2.2.2.2 Voltímetro analógico.

El voltímetro utilizado tiene una serie de escalas fijas y una aguja móvil que se desplaza a lo largo de las mismas. Dispone de tres campos de medida: se puede medir entre 0 y 1,2V ; entre 0 y 6V ó entre 0 y 30V. También durante el desarrollo de la práctica se empleará un voltímetro analógico para la medida de tensiones en corriente continua.

Para el cálculo de la incertidumbre tipo B, se emplearán los datos aportados por el fabricante del voltímetro. Éste sigue una función rectangular en un intervalo doble de la resolución de la escala que se haya empleado en la realización de la medida.

Así para el voltímetro de corriente alterna empleando el campo de medida de 0 a 30V, la medida mínima que se puede apreciar (empleando la escala de 30V) será de 0,5V.2=1V. Por lo tanto:

$$2a=1V$$

2.3 DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

- El circuito se conecta según indica la figura 2.2,

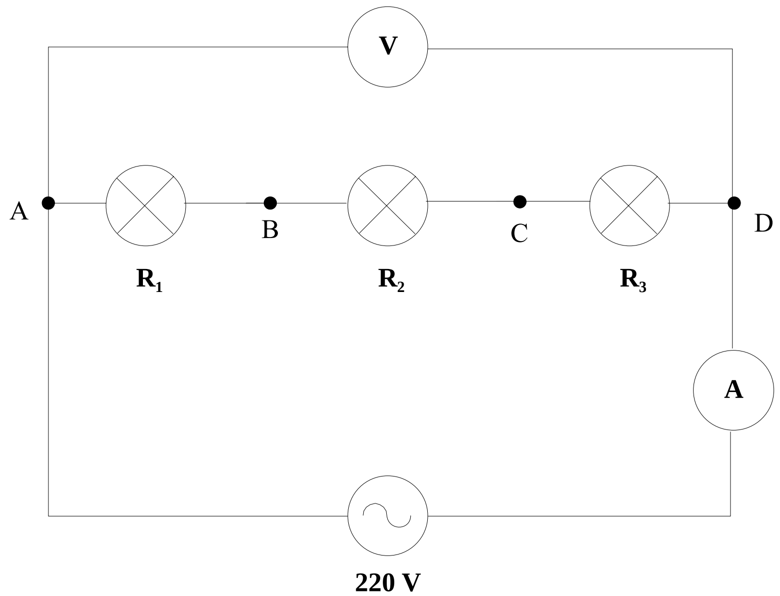

Figura 2.2. Circuito para la medida de R_{exp}.

donde R_1 representa la resistencia de la lámpara de 40W; R_2 es la resistencia de la lámpara de 60W y R_3 la de la lámpara de 100W (translúcida).

- Se conecta el multímetro como voltímetro en la escala V(~) en paralelo con las lámparas y anótese el valor que marca, llamándolo V_T.

- Anótese también la lectura I en el amperímetro A, para calcular posteriormente la resistencia total R_T que tienen las tres lámparas en serie, entre A y D como indica la figura 2.2. Después desconectar el circuito de la red y volverlo a conectar; esperar un minuto para que el circuito se estabilice, y anotar los valores de intensidad y diferencia de potencial. Repetir esta operación cuatro veces (al final se deben tener 5 medidas de I y V_T).

Ejemplo

Supongamos que se han medido los siguientes valores de I y de V_T :

I = 0,14 A	V_T = 232,4 V
I = 0,14 A	V_T = 231,8 V
I = 0,12 A	V_T = 231,6 V
I = 0,14 A	V_T = 231,0 V
I = 0,16 A	V_T = 231,2 V

- Calcular el valor medio de I y de V_T.

En el ejemplo se tiene:

$$\bar{I} = \frac{0,14 + 0,14 + 0,12 + 0,14 + 0,16}{5} = 0,14 \text{ A}$$

$$\overline{V_T} = \frac{232,2 + 231,8 + 231,6 + 231,0 + 231,2}{5} = 231,6 \text{ V}$$

- Calcúlese, mediante la aplicación de la ley de Ohm, el valor de la resistencia R_{exp} de las tres lámparas en serie, a partir de la d.d.p y la intensidad obtenidas:

$$R_{exp} = \frac{V_T}{I}$$

En nuestro caso:

$$R_{exp} = \frac{231{,}6}{0{,}14} = 1654{,}2857\ \Omega$$

- Calcúlese la incertidumbre de esta medida, expandida con un coeficiente de cobertura *k*=3. Como se trata de una medida indirecta, ya que lo que se ha medido directamente han sido los valores de la intensidad y de la tensión, deberá calcularse la incertidumbre de la resistencia en función de la incertidumbre de aquellas.

- Sígase el siguiente orden: Cálculo de la incertidumbre típica de V_T :
  Para ello la incertidumbre de tipo A se obtendrá a partir de los cinco valores medidos, mediante:

$$\left[u_A(V_T)\right]^2 = \frac{\Sigma(V_{Ti} - \bar{v}_T)^2}{5 \cdot 4}$$

Con los datos del ejemplo:

V_T	$V_T - \bar{V}_T$	$(V_T - \bar{V}_T)^2$
232,4	0,8	0,64
231,8	0,2	0,04
231,6	0,0	0,00
231,0	-0,6	0,36
231,2	-0,4	0,16

$$\left[u_A(V_T)\right]^2 = \frac{0{,}64 + 0{,}04 + 0 + 0{,}3 + 0{,}16}{20} = 0{,}06\ \text{V}$$

- Para el cálculo de la incertidumbre de tipo B de esta tensión se recordará (ver la descripción de los aparatos hecha anteriormente) que el multímetro, usado como voltímetro, da lugar a una incertidumbre expandida a un nivel de confianza del

99,77, siguiendo una distribución normal (es decir, con valor *k*=3), de valor el 0,1% del fondo de escala *E* utilizado:

$$U_B(V_T) = 3u_B(V_T) = (0{,}1/100)E$$

$$u_B(V_T) = \frac{(0{,}1/100)\ E}{3}$$

Para el ejemplo, teniendo en cuenta que se ha medido en la escala que llega a 750V, ya que las medidas sobrepasan los 200V, se tiene:

$$u_B(V_T) = \frac{(0{,}1/100)\ 750}{3} = 0{,}25\ \mathrm{V}$$

$$[u_B(V_T)]^2 = 0{,}0625\ \mathrm{V}^2$$

- Con las incertidumbres de tipo A y de tipo B se obtiene la típica total de V_T:

$$u(V_T) = \sqrt{u_A^2(V_T) + u_B^2(V_T)}$$

$$u(V_T) = \sqrt{0{,}06 + 0{,}0625} = 0{,}35\ \mathrm{V}$$

- Se procede de igual forma para calcular la incertidumbre de I. Para la incertidumbre de tipo A mediante

$$[u_A(I)]^2 = \frac{\Sigma(I_i - \bar{I})^2}{5 \cdot 4}$$

Con los datos del ejemplo:

I	$I - \bar{I}$	$(I - \bar{I})^2$
0,14	0,00	0,0000
0,14	0,00	0,0000
0,12	-0,02	0,0004
0,14	0,00	0,0000
0,16	0,02	0,0004

$$u_A{}^2(I) = \frac{0{,}0004 + 0{,}0004}{20} = 0{,}00004 = 4 \cdot 10^{-5}\, A^2$$

y para la de tipo B recordando que se sigue una distribución rectangular de anchura doble que la mínima lectura realizable (resolución r) de la escala empleada:

$$u_B(I) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

Se ha utilizado la escala de 0 a 0,5 A con r = 0,005

$$u_B(I) = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}005}{\sqrt{3}} = 0{,}00288 \text{ A}$$

$$u_B^2(I) = 8{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ A}^2$$

Con las de tipo A y B se obtiene la típica total de I.

En nuestro caso:

$$u^2(I) = u_A^2(I) + u_B^2(I) = 0{,}4 \cdot 10^{-6} + 8{,}3 \cdot 10^{-6} = 8{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ A}^2$$

Para determinar la incertidumbre típica de R se aplicará:

$$u^2(R) = c_{V_T}^2\, u^2(V_T) + c_I^2\, u^2(I) = \left(\frac{\partial R}{\partial V_T}\right)^2 u^2(V_T) + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 u^2(I)$$

donde las derivadas de R se calculan mediante:

$$R = \frac{V_T}{I}$$

de donde:

$$\frac{\partial R}{\partial V_T} = \frac{1}{I}$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{V_T}{I^2}$$

con lo que:

$$u^2(R) = \frac{1}{I^2} u^2(V_T) + \frac{V_T^2}{I^4} u^2(I)$$

Para el ejemplo se tiene:

$$u^2(R) = \frac{0{,}35^2}{0{,}14^2} + \frac{231{,}6^2\ 8{,}7 \cdot 10^{-6}}{0{,}14^4} = 1214{,}7425\ \ \Omega^2$$

$$u(R) = 34{,}85\ \Omega$$

- Por último se deberá expandir la incertidumbre, multiplicando la típica obtenida por un coeficiente *k*=3, tal como se ha pedido:

$$U(R) = k\ u(R)$$

aplicándose finalmente el criterio de expresar la incertidumbre final con tan solo dos cifras significativas.

La incertidumbre expandida toma el valor:

$$U(R) = 3 \cdot 34{,}85 = 104{,}55\ \Omega$$

que con el criterio de las cifras significativas debe escribirse: $104{,}55=10{,}455 \cdot 10^1$ y dejando solo dos, la segunda forzada por exceso, será: $11 \cdot 10^1 \Omega$. Por tanto recordando que el valor de R_{exp} es :

$$R_{exp}=1654{,}2857=165{,}4257 \cdot 10^1\ \Omega,$$

que con las mismas cifras decimales que U, se convierte en:

$$R_{exp}=165 \cdot 10^1=1650\ \Omega$$

Por tanto el resultado de la medida debe expresarse como:

$$R_{exp}=1650 \pm 110\ \Omega$$

La incertidumbre relativa es:

$$U_r = \frac{110}{1650} 100 = 6{,}7\ \%$$

que es un valor alto, lo que refleja la baja calidad de los aparatos de medida utilizados.

- Después, mídanse las diferencias de potencial (d.d.p.) sucesivamente en bornes de cada una de las tres lámparas, conectando el multímetro en paralelo con la lámpara cuya d.d.p. se quiere medir, tal y como se indica
en la figura 2.3. En primer lugar en la lámpara R_1, conectando el multímetro entre A y B.

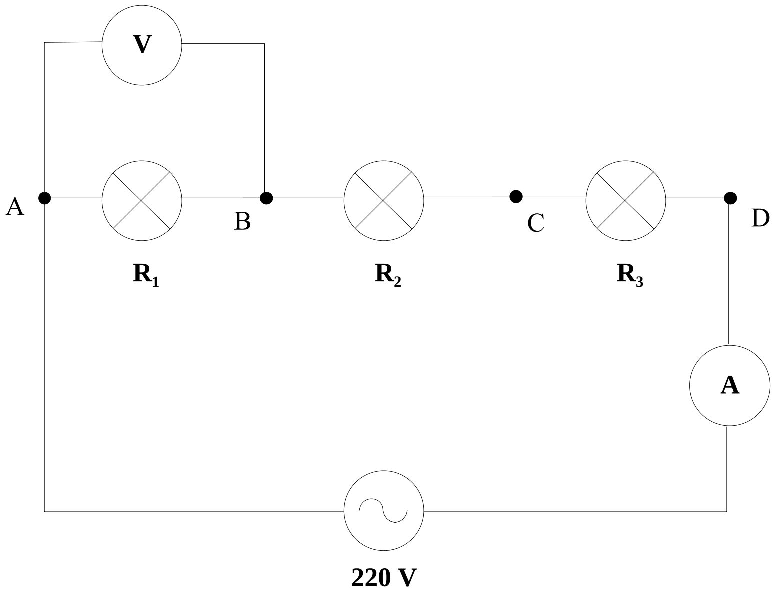

Figura 2.3. Circuito para la medida de la resistencia R_1.

Se deberán tomar 5 medidas de la intensidad I_1 y de la diferencia de potencial V_1, desconectando el circuito después de cada lectura, conectándolo de nuevo y esperando un minuto hasta que se estabilice antes de realizar la siguiente medida. Se calculará la media aritmética de los 5 valores.

Se repetirá lo mismo para la lámpara R_2 conectando el voltímetro entre B y C; se anotarán las cinco medidas de I_2 y de V_2, calculando los valores medios. Se volverá a hacer para la lámpara R_3 , con la conexión entre C y D. Se obtendrán las medidas de I_3 y de V_3 y sus valores medios.

Una vez realizadas todas las medidas se han obtenido los valores medios siguientes:

$\overline{V}_1 = 142{,}4\ V$

$\overline{I}_1 = 0{,}14\ A$

$\overline{V}_2 = 65{,}6\ V$

$\overline{I}_2 = 0{,}14\ A$

$\overline{V}_3 = 20{,}2\ V$

$\overline{I}_3 = 0{,}14\ A$

Con estos valores se obtienen los siguientes valores de cada resistencia (expresándolos en valores enteros para compararlos con el de la resistencia R_{exp}):

R_1= 1017 Ω ; R_2= 469 Ω ; R_3= 144 Ω

- Llamando R_c a la calculada mediante :

$$R_c=R_1+R_2+R_3$$

compárese el valor de R_{exp} con el de R_c para comprobar esta ley suma, deducida de la ley de Ohm. Si esta expresión es correcta, ambos resultados deberán coincidir (dentro de los márgenes de la incertidumbre experimental).

Con las resistencias calculadas se tiene:

$$R_c = 1017+469+144 = 1630\ \Omega$$

Como el valor obtenido para R_{exp} es:

$$R_{exp}=1650 \pm 110\ \Omega$$

luego ambos valores son metrológicamente equivalentes.

PRÁCTICA Nº 3: DETERMINACIÓN DE LA CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA DE UN MATERIAL

3.1 INTRODUCCIÓN

3.1.1 Objetivo de la práctica

El objetivo de la práctica es determinar la conductividad eléctrica σ de un material conductor desconocido, y verificar si depende de las características geométricas (longitud y sección) del conductor.

3.2 CARACTERÍSITICAS DE LOS APARATOS DE MEDIDA

3.2.1 Micrómetro o Pálmer

Según se explica en el epígrafe 1.2.2 de la práctica Nº 1, la resolución del pálmer es 0,01 mm. Por tanto, la mínima medida que puede efectuarse empleando este aparato es 0,01 mm (la mínima división de su escala es 0,01mm).

La distribución de las medidas efectuadas con el micrómetro sigue una distribución rectangular de anchura 2a=resolución:

$$2a=0{,}01\ mm$$

es decir

$$a=0{,}005\ mm$$

La incertidumbre típica tipo B asociada a la resolución del micrómetro es:

$$u_B = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}005\,mm}{\sqrt{3}} = 2{,}89\times10^{-3}\ mm$$

Nota: Se ha tomado el resultado final con tres cifras significativas efectuando el correspondiente redondeo.

3.2.2 Regla

La regla es un instrumento para la medida de longitudes, consta de una escala con una serie de trazos distanciados equidistantemente. Los trazos más grandes indican las unidades principales, en este caso centímetros, la distancia entre dos trazos pequeños es la distancia mínima que puede apreciar la regla. Para las reglas empleadas en el Laboratorio la distancia mínima es 1 mm.

La incertidumbre de una medida sigue una función rectangular con una anchura doble de la medida mínima que se puede realizar. La razón de tener que introducir una incertidumbre doble, en comparación con el calibre y el pálmer, es debida a que se realiza un doble ajuste: uno con el inicio del cuerpo a medir con el cero de la escala y el otro con el final del cuerpo, tal y como se aprecia en la figura 3.1.

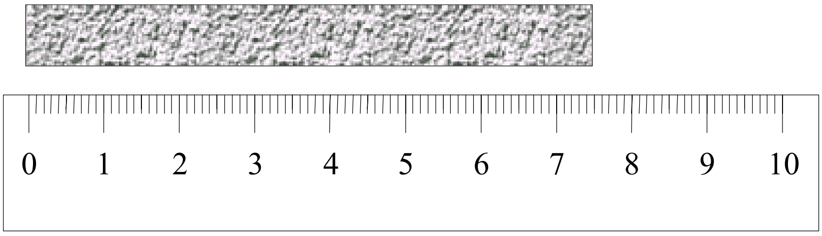

Figura 3.1 Medida con la regla.

En el caso de la regla empleada es, por tanto:

$$2a=2\ mm$$

es decir

$$a=1\ mm$$

Como la incertidumbre en este caso sigue una distribución rectangular de a anchura 2a, la incertidumbre típica tipo B asociada a la resolución de la regla es:

$$u_B = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1mm}{\sqrt{3}} = 0{,}58\,mm$$

Nota: Se ha tomado el resultado final con dos cifras significativas efectuando el correspondiente redondeo.

3.2.3 Óhmetro.

Para la medida de la resistencia se empleará un multímetro. Este aparato se denomina así porque permite medir varias magnitudes (diferencias de potencial, intensidades y resistencias) seleccionando la escala adecuada. En la figura 3.2, se puede observar el esquema del multímetro que se empleará para la realización de la práctica.

Se debe seleccionar la función de óhmetro Ω, girando el dial 1 y escogiendo la escala adecuada para tener la máxima resolución en la medida. Las escalas que dispone el aparato empleado van desde 200Ω hasta 2000kΩ; estos valores llamados fondo de escala, corresponden a los máximos que se pueden medir con esa escala. Por lo tanto debe comenzarse con la escala de mayor fondo de escala y si la lectura que marca la pantalla es muy pequeña se volverá a repetir la medición usando una escala con menor fondo. Se deben emplear como terminales de conexión las marcadas en la figura 3 con los números 3 y 4.

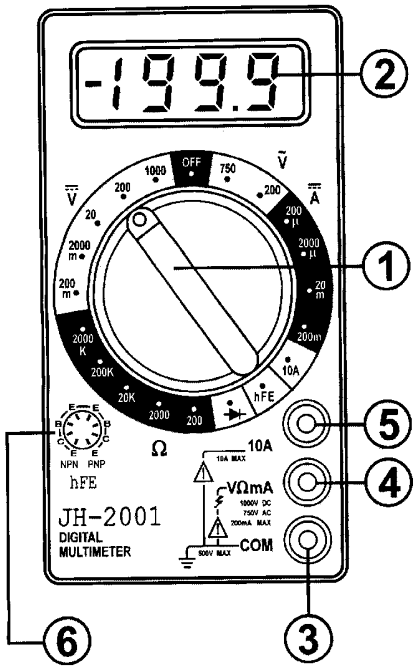

Figura 3.2 Óhmetro

Para la incertidumbre de tipo B, el fabricante certifica que las medidas de este aparato siguen una distribución normal, tal que, para una fiabilidad del 99,77%, la incertidumbre expandida es igual al 0,1% del máximo de la escala empleada.

Puesto que en una distribución normal para alcanzar una fiabilidad del 99,77% hay que tomar un factor de recubrimiento k=3, la incertidumbre será:

$$u_B = \frac{0{,}1\% \text{ del máximo de escala}}{k} = \frac{0{,}1\% \text{ del máximo de escala}}{3}$$

Ejemplo

Supongamos que se ha seleccionado un fondo de escala de 200Ω (máximo de la escala 200Ω) girando el dial 1 mostrado en la figura 3.2. Esta configuración de medida, según el fabricante del aparato, tiene una incertidumbre tipo B cuyo valor es:

$$u_B = \frac{0{,}1\% \text{ de } 200\ \Omega}{3} = \frac{0{,}1 \times 10^{-2} \times 200}{3}\ \Omega = 0{,}067\ \Omega$$

Nota: Se ha tomado el resultado final con dos cifras significativas efectuando el correspondiente redondeo.

3.3 PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

3.3.1 Determinación de la conductividad

Se dispone de una base sobre la que están situados 7 tramos de hilo del material a estudiar. Los diámetros van siendo progresivamente menores desde el 1° al 4°, siendo sin embargo los cuatro últimos (4º, 5º, 6º y 7º) de igual diámetro. En los extremos de cada tramo están colocadas clavijas, que pueden unirse entre sí mediante un cable de conexión auxiliar, para formar tramos de longitud mayor

- Se medirá 6 veces, con la regla, la longitud l del tramo 1 (el de mayor diámetro). Cada medida se hará entre los centros de las clavijas laterales. Se expresarán en metros.

Ejemplo

A continuación se recogen los datos obtenidos al efectuar las seis medidas de la longitud

Long. l_i (**m**)
0,492
0,492
0,493
0,492
0,492
0,493

- Se medirá 6 veces, con el pálmer, el diámetro D del tramo 1. Las medidas se expresarán en mm. Los diámetros se medirán en cada ocasión en diferentes secciones. Es conveniente comenzar la primera medida en un punto próximo a una clavija e irse desplazando en las medidas siguientes hacia la clavija contraria.

Ejemplo

A continuación se recogen los datos obtenidos al repetir seis veces las medidas del diámetro del hilo

Diám. D_i (**mm**)
2,02
2,01
2,01
2,00
2,00
2,03

- Se medirá 6 veces, con el óhmetro, la resistencia R del tramo 1. Las medidas se expresarán en Ω.

Ejemplo

A continuación se recogen los datos obtenidos al medir seis veces la resistencia del hilo con el óhmetro

Resist. R_i (Ω)
0,3
0,4
0,3
0,3
0,3
0,4

- Se calcularán los valores medios tanto de l, como de D y de R.

Ejemplo

$$\bar{\ell} = \frac{0{,}492 + 0{,}492 + 0{,}493 + 0{,}492 + 0{,}492 + 0{,}493}{6} \text{ m} = 0{,}4923 \text{ m}$$

$$\bar{D} = \frac{2{,}02 + 2{,}01 + 2{,}01 + 2{,}00 + 2{,}00 + 2{,}03}{6} \text{ mm} = 2{,}0177 \text{ mm}$$

$$\bar{R} = \frac{0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}4}{6} \ \Omega = 0{,}3333 \ \Omega$$

Nota: al realizar los cálculos intermedios, como los de las medias aritméticas anteriores, se conservarán muchas cifras significativas, por ejemplo 4 ó 5. Al final, con ayuda de la incertidumbre del resultado final se podrán redondear adecuadamente sus cifras.

- Se calculará el valor medio de la sección recta S del conductor empleando la fórmula:

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

Ejemplo

$$\bar{S} = \frac{\pi \bar{D}^2}{4} = \frac{\pi \times (2{,}0117)^2}{4} \text{mm}^2 = 3{,}1785 \, \text{mm}^2$$

- Con estos valores medios de l, S y R se calculará el valor de la conductividad σ del hilo despejando en la fórmula:

$$R = \frac{\ell}{\sigma S} \qquad (1)$$

Ejemplo

$$\sigma = \frac{\overline{\ell}}{\overline{R}\,\overline{S}} = \frac{0{,}4923\ \mathrm{m}}{0{,}3333\ \Omega \times 3{,}1785 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2} = 4{,}647 \times 10^5\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$$

- Se determinará la incertidumbre expandida del resultado obtenido para la conductividad σ con un factor k=3.

Para obtener el valor de esta incertidumbre se procederá siguiendo los seis pasos que se detallan a continuación:

- Primero: se calculará la incertidumbre de tipo A de cada una de las medidas directas l, D y R.

Ejemplo

La tabla que se recoge a continuación muestra cómo debe procederse para efectuar los cálculos intermedios a la hora de obtener las incertidumbres tipo A:

l_i (**m**)	$(l_i - l_{med.})^2$	D_i (**mm**)	$(D_i-D_{med.})^2$	$R_i(\Omega)$	$(R_i-R_{med.})^2$
0,492	9×10^{-8}	2,02	$6{,}889\times10^{-5}$	0,3	0,001109
0,492	9×10^{-8}	2,01	$2{,}890\times10^{-6}$	0,4	0,004450
0,493	$4{,}9\times10^{-7}$	2,01	$2{,}890\times10^{-6}$	0,3	0,001110
0,492	9×10^{-8}	2	$1{,}369\times10^{-4}$	0,3	0,001110
0,492	9×10^{-8}	2	$1{,}369\times10^{-4}$	0,3	0,001110
0,493	$4{,}9\times10^{-7}$	2,03	$3{,}349\times10^{-4}$	0,4	0,004450
	$\Sigma=1{,}34\times10^{-6}$		**$\Sigma=6{,}833\times10^{-4}$**		**$\Sigma=0{,}01333$**

Ejemplo

Con los resultados de la tabla anterior es fácil efectuar los cálculos de las incertidumbres tipo A, teniendo en cuenta que cada medida se ha repetido n=6 veces.

$$u_A(\ell) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\ell_i - \overline{\ell})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1{,}34 \times 10^{-6}}{6 \times 5}}\ \mathrm{m} = 2{,}113 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

$$u_A(D) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{6{,}833 \times 10^{-4}}{6 \times 5}}\ \mathrm{mm} = 4{,}772 \times 10^{-3}\ \mathrm{mm}$$

$$u_A(R) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}01333}{6 \times 5}}\ \Omega = 0{,}0211\ \Omega$$

- Segundo: se calculará la incertidumbre de tipo B de cada una de las medidas directas l, D y R. Estos cálculos ya se han efectuado en el apartado 3.2, epígrafes 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3.

Ejemplo

$$u_B(\ell) = 0{,}58\,\text{mm}$$

$$u_B(D) = 2{,}89 \times 10^{-3}\ \text{mm}$$

$$u_B(R) = \frac{0{,}1\%\ \text{de}\ 200\ \Omega}{3} = \frac{0{,}1 \times 10^{-2} \times 200}{3}\ \Omega = 0{,}0667\ \Omega$$

Nota: se ha supuesto que el óhmetro se ha empleado con un fondo de escala de 200 Ω.

- Tercero: se calculará la incertidumbre típica de las medidas directas l, D y R.

Ejemplo

La incertidumbre típica al cuadrado de cada una de las medidas directas es igual a la suma de los cuadrados de las incertidumbres tipo A y tipo B, por tanto:

$$u(\ell) = \sqrt{u_A(\ell)^2 + u_B(\ell)^2} = 0{,}617\ \text{mm}$$

$$u(D) = \sqrt{u_A(D)^2 + u_B(D)^2} = 5{,}58 \times 10^{-3}\ \text{mm}$$

$$u(R) = \sqrt{u_A(R)^2 + u_B(R)^2} = 0{,}06996\ \Omega$$

- Cuarto: se calculará la incertidumbre de S. (Se tomará π con gran número de cifras decimales, de manera que sea despreciable la incertidumbre asociada a tomar π con un número finito de cifras decimales; es decir, de manera que sea despreciable la incertidumbre de truncamiento.)

Ejemplo

$$u(S) = \sqrt{[c\,u(D)]^2} = c\,u(D)$$

donde c es el coeficiente de sensibilidad asociado a la magnitud D. La única magnitud medida directamente que interviene en el cálculo de S es D.

$$c = \frac{\partial S}{\partial D} = \frac{\pi\,\overline{D}}{2} = \frac{3{,}14159 \times 2{,}0177}{2}\,\text{mm} = 3{,}169\ \text{mm}$$

$$u(S) = 3{,}169\,\text{mm} \times 5{,}58 \times 10^{-3}\,\text{mm} = 0{,}0177\,\text{mm}^2$$

- Quinto: se calculará la incertidumbre típica de la conductividad σ empleando los valores de las incertidumbres de l, S y R.

Ejemplo

Siguiendo la regla general para obtener la incertidumbre típica de una medida indirecta:

$$u(\sigma) = \sqrt{\left[c_\ell u(\ell)\right]^2 + \left[c_S u(S)\right]^2 + \left[c_R u(R)\right]^2}$$

Primero calculamos los coeficientes de sensibilidad, sin olvidar que sus valores deben ir acompañados de las correspondientes unidades:

$$c_\ell = \frac{\partial\sigma}{\partial\ell} = \frac{1}{\overline{R}\,\overline{S}} = 0,9439 \times 10^6\ \Omega^{-1}m^{-2}$$
$$c_S = \frac{\partial\sigma}{\partial S} = -\frac{\overline{\ell}}{\overline{R}\,\overline{S}^2} = -1,4620 \times 10^{11}\ \Omega^{-1}m^{-3}$$
$$c_R = \frac{\partial\sigma}{\partial R} = -\frac{\overline{\ell}}{\overline{R}^2\,\overline{S}} = -1,3942 \times 10^6\ \Omega^{-2}m^{-1}$$

Nótese que las derivadas parciales empleadas para calcular los coeficientes de sensibilidad son funciones de l, S y R. El valor de los coeficientes de sensibilidad se obtiene sustituyendo en dichas derivadas los valores medios de l, S y R.

Teniendo en cuenta los valores de u(l), u(S) y u(R) anteriormente calculados:

$$c_\ell\, u(\ell) = 0,54746 \times 10^3\ \Omega^{-1}m^{-1}$$
$$c_S\, u(S) = -2,5880 \times 10^3\ \Omega^{-1}m^{-1}$$
$$c_R\, u(R) = -97,538 \times 10^3\ \Omega^{-1}m^{-1}$$

Con lo que la incertidumbre típica de la conductividad eléctrica es:

$$u(\sigma) = 0,9757 \times 10^5\ \Omega^{-1}m^{-1}$$

Ahora aplicamos el criterio de expresar la incertidumbre con sólo dos cifras significativas:

$$u(\sigma) = 0,98 \times 10^5\ \Omega^{-1}m^{-1}$$

- Y sexto: el valor obtenido de la incertidumbre en el quinto paso es el de la incertidumbre típica. Para calcular la incertidumbre expandida U(σ), es decir, el valor de la incertidumbre asociado a un cierto nivel de confianza, se multiplica el valor de la incertidumbre típica por k=3.

Ejemplo

$$U(\sigma) = k\,u(\sigma) = 2,9 \times 10^5\ \Omega^{-1}m^{-1}$$

Nota: la incertidumbre se ha expresado ya sólo con dos cifras significativas.

Con el valor de la incertidumbre, se puede expresar el resultado de la medida de la conductividad con el adecuado número de cifras significativas

Ejemplo

El resultado de la medida convencionalmente se expresa junto con su incertidumbre de la siguiente manera:

$$\sigma = \overline{\sigma} \pm U(\sigma)$$

donde se entiende que el valor medio de σ es el obtenido a partir de los valores medios de las magnitudes medidas directamente, y $U(\sigma)$ es la incertidumbre expandida.

En el caso de nuestros datos experimentales, los valores que se obtienen son:

$$\sigma = (4{,}6 \pm 2{,}9) \times 10^{5}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$$

Nota: al realizar los cálculos intermedios para obtener el valor de una medida indirecta, se debe conservar un alto número de cifras significativas. Sólo al final, una vez determinado el valor de la incertidumbre expandida, se puede precisar el número de cifras significativas que deben conservarse para expresar el valor de la magnitud medida indirectamente (en este caso σ).

3.3.2 La no dependencia de la conductividad con la longitud.

La expresión σ muestra que la resistencia por unidad de longitud (R/l) es una constante para hilos de un mismo material y de igual diámetro. En esta parte de la práctica se quiere comprobar esta constancia experimentalmente.

Si se hace una representación gráfica en unos ejes coordenados Oxy, llevando sobre el eje Ox los diferentes valores de longitudes l y sobre el eje Oy los valores medidos de su resistencia *R.,* se podrán dibujar tantos puntos como medidas se hayan efectuado.

Según la expresión (1) deberíamos obtener puntos situados exactamente sobre una línea recta que pase por el origen de coordenadas. Los pequeños errores experimentales hacen que para cada valor de $x=l$, el valor de $y=R$ no sea exactamente el de la recta, pudiendo ser algo mayor o algo menor.

En general el problema que suele plantearse es el de que, conocidos los puntos, quiere calcularse la recta, en principio desconocida, que mejor se ajusta a estos puntos. Para ello la técnica estadística conocida como regresión lineal calcula la recta que hace mínima la suma de los cuadrados de las diferencias $(y_i - y_{r\,i})^2$ entre el valor medido y_i y el valor $y_{r\,i}$ que corresponde al punto de la recta en la x_i medida (ver figura 4). Se elevan estas diferencias al cuadrado para evitar que se contrarresten entre sí los errores positivos y los negativos.

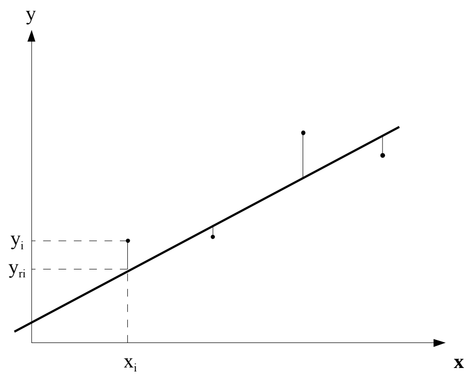

Figura 3.3 Regresión lineal.

Esta recta $y = a + bx$, que se ajusta así por mínimos cuadrados, se conoce como *recta de regresión*. Se puede demostrar que la pendiente *b* y la ordenada en el origen *a* tienen por expresión:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$a = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

Existen, en los ordenadores auxiliares del laboratorio, programas que permiten obtener los valores de *a* y de *b*.

Para realizar esta parte de la práctica debe procederse de la siguiente forma:

- Se medirá la longitud l_7 del último tramo (el 7º) de hilo con la regla una sola vez; con el palmer su diámetro D_7 y con el óhmetro su resistencia R_7.

- Se conectarán mediante un cable auxiliar los extremos finales del 6º tramo y del 7º. Se obtiene así un tramo de longitud mayor ($l_6 + l_7$) , en el que no se tendrá en cuenta la longitud del cable auxiliar ya su resistencia R_a es despreciable, al ser de un material mucho mejor conductor que el material que estamos estudiando.
  Se medirá l_6 y sumándole la anterior se obtiene la nueva longitud. No es necesario medir el diámetro puesto que es un tramo del mismo hilo que el anterior. Se medirá la resistencia ($R_6 + R_7$) entre el comienzo y el final del tramo.

- Se procederá de idéntica manera uniendo ahora el tramo 5º a los dos anteriores.

- Por último se repetirá el proceso añadiéndoles el tramo 4º.

- Se representarán los cuatro pares de valores (l_i , R_i) en unos ejes cartesianos que habrá que dibujar en una hoja de papel milimetrado, llevando sobre el eje horizontal las longitudes y sobre el vertical las resistencias. Deben tomarse las escalas correspondientes para que el gráfico sea lo mayor posible, ocupando cuanta mayor parte de la hoja mejor, a fin de que la precisión en la representación gráfica sea mayor. En cualquier caso deben escribirse en los extremos de cada eje la magnitud que se representa y su unidad correspondiente. Se marcarán en el eje las divisiones prudentes que ayuden a su interpretación.

- Se llevarán los valores numéricos de estas medidas a uno de los ordenadores, entrando en la opción "Recta de regresión".

- Con los resultados del ordenador (ordenada en el origen *a* y pendiente *b*) se dibujará en el gráfico anterior la recta de regresión. Para ello debe tomarse un valor arbitrario de l y calcular con la ecuación de la recta el valor de R correspondiente, dibujando este punto en el gráfico. Se repite para un segundo valor de l (conviene que los dos valores de l estén lo más alejados posible para ganar en precisión) y calculada su *R,* se dibuja también el nuevo punto. Uniendo ambos puntos se obtendrá la recta.

- Se comprobará que la pendiente de la recta dibujada (cociente entre la diferencia de coordenadas verticales de los puntos y la diferencia de sus coordenadas horizontales) coincide con la pendiente *b* dada por el ordenador, teniendo en cuenta las unidades correspondientes empleadas.

- Con el valor de la pendiente b de la recta se calculará el valor de la conductividad σ_1 que se deduce de la representación.

Ejemplo

Al introducir los datos experimentales en el programa de regresión y comparar con la representación gráfica se ha obtenido una recta de regresión cuya pendiente es

$$b = 18{,}315\ \Omega m^{-1}$$

El diámetro de los hilos es D = 0,4 mm, con lo que la sección de los mismos es

$$S = 1{,}26 \times 10^{-7}\ m^2$$

El valor de la conductividad obtenido a partir de la pendiente es

$$\sigma_1 = 4{,}345 \times 10^5\ \Omega^{-1} m^{-1} = 4{,}3 \times 10^5\ \Omega^{-1} m^{-1}$$

Nota: se ha tomado para el valor de la conductividad obtenido mediante la recta de regresión el mismo número de cifras que para el valor de σ calculado primeramente.

- Compruébese que este valor σ_1 es correcto, es decir, que, al compararlo con el valor de σ obtenido en el apartado 3.3.1, está comprendido dentro del intervalo de la incertidumbre calculado, es decir :

$$\sigma\text{-}U(\sigma) \leq \sigma_1 \leq \sigma + U(\sigma)$$

con lo que quedará comprobado que la conductividad es independiente de la longitud l (tiene el mismo valor para cualquier l) y que nuestro experimento ha sido correcto.

Ejemplo

En el caso de nuestros resultados experimentales

$$1{,}7\times 10^{5}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1} \le 4{,}3\times 10^{5}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1} \le 7{,}5\times 10^{5}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$$

Con lo que queda comprobada la consistencia experimental de las medidas realizadas.

3.3.3 La no dependencia de la conductividad con la sección

En esta parte de la práctica se repetirá el apartado 3.3.2, pero ahora con los cuatro primeros tramos, de secciones cada vez menores.

Los datos del tramo 1 ya se tienen (1ª parte de la práctica). En los tres siguientes se medirá, independientemente para cada uno de ellos, su longitud, su diámetro y su resistencia entre extremos.

- Se realizará una nueva representación gráfica, situando en el eje horizontal $1/D^2$ y en el vertical R.
- Con la ayuda del ordenador se obtendrán la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión, que después se dibujará en la representación.
- Del valor de la pendiente se obtendrá el valor de la conductividad σ_2.
- Se comprobará si el valor de σ_2 queda comprendido en el intervalo de incertidumbre obtenido en el apartado 3.3.1, es decir, si :

$$\sigma\text{-}U(\sigma) \le \sigma_2 \le \sigma + U(\sigma)$$

Ejemplo

A partir de los datos experimentales el valor obtenido esta vez para la conductividad es

$$\sigma_2 = 5{,}825\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1} = 5{,}8\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$$

Y nuevamente se observa que el valor obtenido a partir de la regresión lineal coincide, dentro del intervalo de incertidumbre, con el obtenido primeramente

$$1{,}7\times 10^{5}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1} \le 5{,}8\times 10^{5}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1} \le 7{,}5\times 10^{5}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$$