UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

GRADO EN INGENIERÍA CIVIL Y TERRITORIAL

INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA I

Cristina Solares

CIUDAD REAL, 2024

1. Los Números Reales.

1.1 Introducción

Aunque este capítulo está dedicado a los números reales, se introducen brevemente los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales e irracionales. Se trata sólo de dar una idea de cómo surge el proceso de generación de los números reales a partir de deficiencias operativas de los conjuntos anteriores.

1.2 El Conjunto de los Números Naturales $\mathbb{N}$

Intuitivamente el primer conjunto de números que a uno se le ocurre es el de los *números naturales*. Éste surge cuando uno se enfrenta al problema de contar. Sin embargo, la definición rigurosa de número natural no es trivial.

Definición 1.1 — Número natural. Una forma de introducir el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es mediante los conocidos **axiomas de Peano**:

1. El 1 es un número natural.
2. Todo número natural n tiene un sucesor, que se denota por $n^+ = n+1$.
3. El 1 no es sucesor de ningún número natural.
4. Si dos números naturales tienen el mismo sucesor, entonces son iguales
5. *Axioma de inducción*: Si se tiene un conjunto al que pertenece el 1, y en la hipótesis de que pertenezca el n, también pertenece su sucesor n^+, dicho conjunto es $\mathbb{N}$.

N Según la bibliografía se utiliza "sucesor" o "siguiente".

N Se considera el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

N Se utiliza la notación $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ en vez de una notación que haga referencia al siguiente o sucesor $\mathbb{N} = \{1,1^+,(1^+)^+,\dots\}$.

2. Los Números Complejos

2.1 Introducción

En el capítulo anterior se ha visto cómo los diferentes conjuntos de números: naturales, enteros y racionales, resultan insuficientes para resolver ciertos problemas. Por ello, se han ido ampliando a otros conjuntos capaces de resolverlos. En este capítulo se verá que el conjunto de los números reales tampoco es suficiente para resolver todos los problemas como, por ejemplo:

- Obtener la raíz de un número negativo. Ningún número real elevado al cuadrado da el número real -2.
- Resolver la siguiente ecuación polinómica, que no tiene solución en el conjunto de los números reales:
$$5x^2 + x + 1 = 0.$$
Ello quiere decir que ningún número real satisface la ecuación anterior.
- Obtener la potencia de exponente no entero de un número negativo: $(-3)^\pi$ no está definida.
- Calcular el logaritmo de un número negativo: $\log(-4)$ no está definido.

Por ello, es necesario recurrir a otro tipo de números que den solución a estos problemas.

De esta forma surgen los números complejos, que son definidos y analizadas sus propiedades en los apartados que siguen.

2.1.1 Aplicación

Una aplicación de los números complejos es el estudio de los circuitos de corriente alterna sinusoidal (ver Figura 2.1). Se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{llllll} (15-j8)I_1 & -10I_2 & -5I_3 & = & 0 \\ 10I_1 & -(18+j4)I_2 & +8I_3 & = & [5,30] \\ 5I_1 & +8I_2 & -(16+j4)I_3 & = & [10,0] \end{array}\right\} \longrightarrow I_1, I_2, I_3.$$

En la Figura 2.2 se muestran funciones senoidales.

3. Sucesiones de Números Reales

3.1 Introducción

Hay situaciones reales que se describen dando una lista de datos individuales. En este capítulo se introducen unas herramientas matemáticas llamadas sucesiones, que sirven para catalogar situaciones de este tipo. Se estudiará el caso particular de sucesiones de números reales y se verá cómo calcular el límite de las mismas.

■ **Ejemplo 3.1** La población de un país es de 55 millones y decrece a una tasa de 2.4 % por año. Escribir una expresión para calcular la población durante los primeros n años. ¿Cuál es la población después de 5 años?. Hallar la convergencia o divergencia de la sucesión de población.
Solución: La población después de n años es $55.000.000 \times (0.9760)^n$. El valor de dicha expresión para $n = 5$ es 48.709.000.

■ **MATLAB 3.1**
```
syms n
limit(55000000*(0.9760)^n,n,inf)
```

3.2 Sucesión de Números Reales

Definición 3.1 Sucesión de números reales Una sucesión de números reales es una aplicación de $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(n) = x_n$ es la imagen de $n \in \mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

Una sucesión de números reales se puede ver como una colección infinita de elementos $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ de forma que a cada elemento le corresponde una posición concreta. Dicha sucesión se se denota $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente $\{x_n\}$ (también se puede denotar como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Los elementos de una sucesión se pueden representar de forma genérica mediante una expresión en función de n que asocia a cada $n \in \mathbb{N}$ el elemento que ocupa la posición $n-$ésima de la sucesión. Dicha expresión es el término general de la sucesión.

■ **Ejemplo 3.2 — Sucesión.** El término general de la sucesión $\{x_n\} = -3, 3, -3, 3, -3, \dots$ viene

4. Funciones reales de variable real

4.1 Introducción

Es frecuente oir expresiones como las siguientes:

- La factura mensual del agua está en función de los metros cúbicos gastados.
- El precio del billete de ferrocarril depende de la distancia a que se encuentre el lugar a donde vamos.

Estas frases hacen referencia a una dependencia entre determinadas magnitudes, y es en este sentido en el que se va a definir el concepto matemático de función.

4.2 Funciones Reales de Variable Real

N Una función $f : X \longrightarrow Y$ es real si $Y \subset \mathbb{R}$ (podemos considerar $Y = \mathbb{R}$) y es de variable real si $X \subset \mathbb{R}$.

A lo largo del tema consideraremos la siguiente definición.

Definición 4.1 — Función real de variable real. Una función real de variable real $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rlcl} f: & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & y = f(x). \end{array}$$

1. El elemento $f(x)$ se denomina imagen de x.
2. Se dice que y es función de x y se escribe $y = f(x)$.
3. El dominio de f, se denota $Dom(f)$, es el conjunto de los números reales x para los cuales tiene sentido $f(x)$. A lo largo del tema supondremos que $Dom(f) = A$.
4. El conjunto de todos los valores imagen de elementos de A

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x)/x \in A\} \subset \mathbb{R},$$

se llama rango, imagen o recorrido de la función f y se denota $Im(f)$. Entonces $Im(f)$ es el conjunto de números reales y para los que existe $x \in A$ con $y = f(x)$.

5. Límites y Continuidad de Funciones

5.1 Límites de Funciones

El límite sirve para estudiar la tendencia de una función cuando su variable se aproxima a un cierto valor.

■ **Ejemplo 5.1** La función de posición

$$s(t) = -4.9t^2 + 200$$

da la altura (en metros) de un objeto que cae desde 200 m de altura (ver Figura 5.1). Calcular el límite

$$\lim_{t \to 4} \frac{s(t) - s(4)}{t - 4} = -39.2$$

que da la velocidad del objeto cuando $t = 4$.

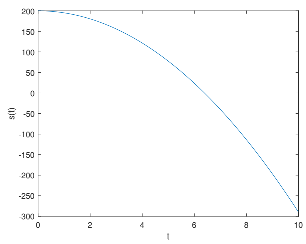


Figura 5.1: Gráfica de la función $s(t) = -4.9t^2 + 200$.

■ **MATLAB 5.1**

```
syms t
s(t)=-4.9*t^2+200;
```

6. Cálculo Diferencial.

6.1 Movimiento a lo largo de una línea recta.

Un vehículo se mueve, sobre una pista recta, a una velocidad constante de $v(t) = 20km/h$. La distancia recorrida por el vehículo después de 1 h es 20 km y después de 2 h son 40 km.

¿Cuál es la distancia recorrida por el vehículo, $s = f(t)$, después de t horas?.

La distancia recorrida por el vehículo, $s = f(t)$, después de t horas es $f(t) = t\ v(t) = 20\ t$ (ver Figura 6.1).

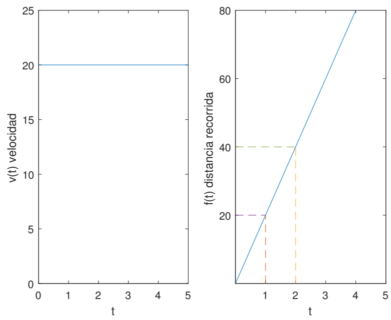


Figura 6.1: Velocidad y distancia recorrida por un vehículo.

Si estudiamos el desplazamiento del vehículo en el intervalo de tiempo $t \in [1,2]$, vemos que en $t = 1$ el el vehículo ha recorrido $20km$ y en el instante $t = 2$ el vehículo ha recorrido $40km$.

¿Cuál es el incremento del tiempo?. ¿Cuál es el incremento del desplazamiento?.

El incremento del tiempo es $\Delta t = 2 - 1 = 1$ y el incremento del desplazamiento $\Delta f = f(2) - f(1)$ en dicho intervalo, es de $20km$.

7. Cálculo de Primitivas

7.1 Primitiva e Integral Indefinida

Definición 7.1 — Función primitiva. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real donde I es un intervalo. Se denomina primitiva de f a cualquier función $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ real de variable real, derivable en todo $x \in I$ y que cumple

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I. \tag{7.1}$$

Teorema 7.1 — Unicidad de primitiva. Dada $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$, cualquier otra primitiva G(x) es de la forma

$$G(x) = F(x) + C$$

siendo C una constante.

Definición 7.2 — Integral indefinida. Se denomina integral indefinida de $f(x)$ al conjunto de todas sus funciones primitivas y se denota

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

siendo C una constante.

7.2 Propiedades de las integrales indefinidas

Proposición 7.1 Sean $f, g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales de variable real, y $k \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Propiedad aditiva del integrando.**
   La integral indefinida de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de las integrales

8. Integración de Funciones Racionales

8.1 Introducción

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$ de grados n y m, respectivamente, una integral se dice que es racional si se puede expresar de la forma

$$\int R(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx. \tag{8.1}$$

En este capítulo se estudiará el procedimiento para descomponer una integral racional en suma de otras integrales que son inmediatas de calcular.

8.2 El Numerador $P(x)$ es de Grado Igual o Superior al del Denominador $Q(x)$

Dada una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde el grado del numerador es igual o superior al del denominador, si se efectúa el cociente

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{8.2}$$

siendo $C(x)$ el cociente, $R(x)$ el resto y grado de $R(x)$ menor que el de $Q(x)$, la integral queda:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx. \tag{8.3}$$

La integral $\int C(x)dx$ es inmediata y la integral $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ con grado del numerador menor que el del denominador, se resuelve en la siguiente sección.

9. Integración de Funciones Irracionales

En este capítulo se se verán métodos para transformar integrales irracionales en racionales, facilitando así su cálculo.

Toda función racional es integrable mediante funciones elementales. No ocurre lo mismo con las funciones irracionales, ya que en general, sus primitivas no pueden expresarse mediante las funciones que se manejan en la matemática elemental. Sin embargo hay algunos casos en que tal expresión es posible. A continuación se citan algunos.

9.0.1 Integrales del tipo $\int R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{u}{v}})\, dx$,

Considerar la integral del tipo

$$I = \int R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{u}{v}})\, dx, \tag{9.1}$$

donde $R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{u}{v}})$ es una función racional, y $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \ldots \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$. Tomando, $\mu = m.c.m(n, q, \ldots, v)$, se tiene que para ciertos $m', p', u' \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{\mu} \quad , \quad \frac{p}{q} = \frac{p'}{\mu} \quad y \quad \frac{u}{v} = \frac{u'}{\mu}.$$

Realizando el cambio de variable

$$x = t^{\mu} \quad , \quad dx = \mu t^{\mu-1}, \tag{9.2}$$

la integral de la Expresión (9.1) se transforma en:

$$I = \int R(x^{\frac{m'}{\mu}}, x^{\frac{p'}{\mu}}, \ldots, x^{\frac{u'}{\mu}})\, dx = \int R(t^{m'}, t^{p'}, \ldots, t^{u'}) \mu t^{\mu-1}\, dt, \tag{9.3}$$

que es una integral de tipo racional.

10. Integración de Funciones Trascendentes

10.1 Introducción

En general, las integrales de funciones trascendentes no se pueden expresar mediante funciones elementales. Sin embargo alguna de estas integrales se pueden transformar en funciones racionales usando los cambios adecuados.

10.2 Integrales de Tipo Racional en Funciones Exponenciales

Considerar integrales de la forma

$$I = \int R(a^x)\, dx, \tag{10.1}$$

donde R es racional.
Haciendo el cambio de variable $a^x = t \Longrightarrow x = \log_a t \Longrightarrow dx = \dfrac{\log_a e}{t}$, y sustituyendo en (10.4), se tiene

$$I = \int R(a^x)\, dx = \log_a e \int \frac{R(t)}{t}\, dt, \tag{10.2}$$

que es racional en t. Este procedimiento es generalizable a toda integral de la forma

$$I = \int R(f(x))\, dx, \tag{10.3}$$

donde R sea racional y la función inversa de $f(x)$, $\phi(x)$, admita derivada racional, porque en ese caso,

$$f(x) = t \Longrightarrow x = \phi(t) \Longrightarrow dx = \phi'(t)\, dt. \tag{10.4}$$

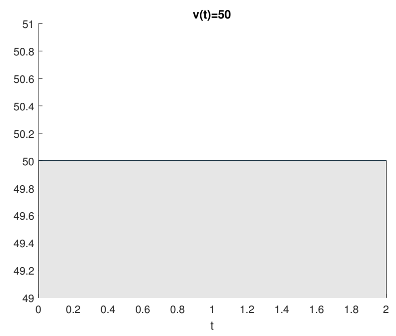
Sustituyendo en (10.3), se tiene una expresión de la forma:

$$I = \int R(f(x))\, dx = \int R(t)\phi'(t)\, dx, \tag{10.5}$$

que es racional.

11. Integral Definida

11.1 Movimiento a lo largo de una línea recta



■ **Ejemplo 11.1** Supongamos que un vehículo se mueve con velocidad $50km/h$ durante 2 horas, a lo largo de una línea recta.

¿Cuál es la distancia recorrida por el vehículo?

La distancia recorrida por el vehículo coincide con el área del rectángulo anterior.

■ **Ejemplo 11.2** Un vehículo se mueve a lo largo de una trayectoria recta con una velocidad

$$v(t) = 10m/s + (2.0m/s^2)t - \frac{1}{2}(0.10m/s^3)t^2.$$

Consideremos la función $v(t) = 10 + 2.0t - \frac{1}{2}0.10t^2$ en el intervalo $0 \leq t \leq 30$. Dicho intervalo se ha subividido en $n = 6$ subintervalos de amplitud $\Delta t = 5$. Se puede observar que la velocidad cambia en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (la amplitud del subintervalo es $\Delta t_i = 5$, para $i = 1, \ldots, 6$). En cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ se ha considerado su punto medio c_i y se ha aproximado la velocidad en el mismo como $v(c_i)$.

12. Aplicaciones de la Integral

12.1 Cálculo de Áreas Planas

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo compacto $[a,b]$.

- El cálculo del área de la región del plano limitada por el eje x y un arco de curva dada mediante su ecuación cartesiana explícita $y = f(x)$, con $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, y las rectas $x = a$ y $x = b$ conduce al concepto de integral definida:

$$A = \int_a^b f(x)dx. \tag{12.1}$$

- Si la función $f(x) \leq 0$ en $[a,b]$, el área del trapezoide limitado por $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ es

$$A = -\int_a^b f(x)dx. \tag{12.2}$$

- Si la función $f(x)$ cambia de signo un número finito de veces en el segmento $[a,b]$, entonces se puede descomponer la integral a lo largo de dicho segmento, en la suma de integrales en los segmentos parciales, de forma que dicha integral es positiva donde $f(x) \geq 0$ y negativa en otro caso.

■ **Ejemplo 12.1 — Integral.** La integral de la función $f(x) = \sin x$ (ver Figura 12.2), en el intervalo $[0,2\pi]$ es

$$I = \int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos 0 = 0. \tag{12.3}$$

En la Figura se puede observar que $f(x) > 0$ para $x \in [0,\pi]$ y $f(x) < 0$ para $x \in [\pi,2\pi]$ y que en estos intervalos el área delimitada por $f(x)$ es la misma.

■ **Ejemplo 12.2** Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ y el eje OX, desde $x = 0$ hasta $x = b$ con $b \in [0,\pi/2]$. Calcular el área cuando $b = \pi/2$.

13. Series de Números Reales

13.1 Introducción

Definición 13.1 — Serie de números reales. Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida como

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{13.1}$$

El par de sucesiones $(\{a_n\}, \{S_n\})$ se denomina serie de números reales.
La serie de números reales se representa como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{13.2}$$

13.2 Carácter de una serie

Definición 13.2 — Serie convergente. Se dice que una serie es convergente con suma $S \in \mathbb{R}$ si la sucesión $\{S_n\}$ de sumas parciales tiene límite finito S y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S. \tag{13.3}$$

■ **Ejemplo 13.1 — Serie convergente.** En el siguiente ejemplo se estudiará la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{13.4}$$

En primer lugar se construye la sucesión de sumas parciales

$$\{S_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \right\}, \tag{13.5}$$

14. Series de Potencias

14.1 Series de potencias

Definición 14.1 — Serie de potencias. Una serie funcional de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots \tag{14.1}$$

se llama una serie de potencias en $(x-c)$. Los números $a_0, a_1, \dots$ se llaman coeficientes de la serie de potencias, y estudiaremos sólo el caso en que los coeficientes, x y c son números reales.

Teorema 14.1 — Convergencia de una serie de potencias. Dada una serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-c)^k$ se verifica una y sólo una de las siguientes propiedades:

a) La serie converge para todo x.
b) La serie converge solamente para $x = c$.
c) La serie converge absolutamente para x perteneciente a un intervalo abierto $(c-R, c+R)$ y no es convergente para $|x-c| > R$.
Para los extremos del intervalo hay que estudiar la serie en cada uno de ellos.

Definición 14.2 — Radio de convergencia. El número R que aparece en el Teorema 14.1 se denomina radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-c)^k$.

Definición 14.3 — Intervalo de convergencia absoluta. El intervalo $(c-R, c+R)$ que aparece en el Teorema 14.1 se denomina intervalo de convergencia absoluta de la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-c)^k$.

Se puede usar el criterio generalizado del cociente o de la raíz para demostrar que el campo de