Entrega 3 (Parcial P2)
(3 de abril, 2020)

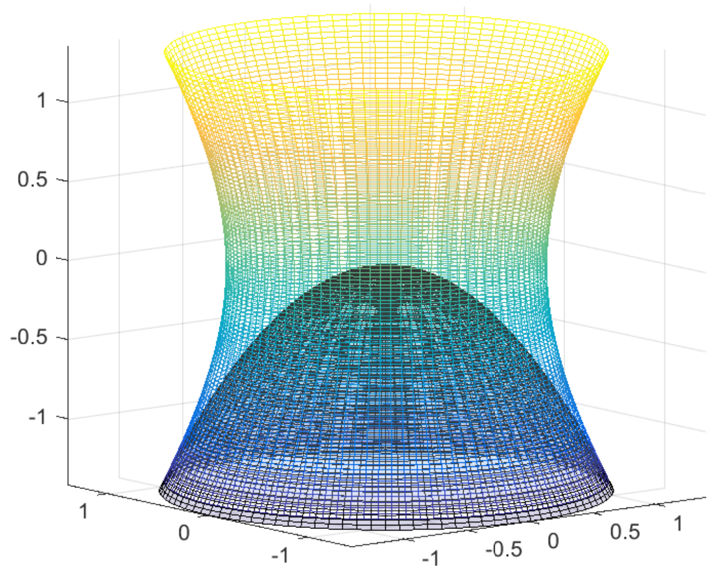

Figura 1: Gráfica del depósito

Se está diseñando un depósito de agua con las siguientes características (véase la Figura 1):

- **Pieza I**: El fondo del depósito es un paraboloide de ecuación

$$\sqrt{2}\, z + x^2 + y^2 = 0$$

  para $-\sqrt{2} \leq z \leq 0$

- **Pieza II**: El cerramiento exterior es un hiperboloide de una hoja de ecuación

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 = 2.$$

  para $-\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}$

Se quiere pintar el fondo del depósito y para ello es necesario calcular el área de la pieza I.

- La ecuación de la pieza I se puede escribir en paramétricas como

$$x = 2^{1/4}\ \cos(u)\ v, y = 2^{1/4}\ \sin(u)\ v,\ z = -v^2$$

  para $u \in [0, 2\pi]$ y $v \in [0, 2^{1/4}]$.

  Cuestión 1: Dibujar con Matlab el fondo del depósito (pieza I).

- La proyección de la pieza I sobre el plano xy (dominio de integración D_I) se puede obtener cortando la superficie $\sqrt{2}\, z + x^2 + y^2 = 0$ por el plano $z = -\sqrt{2}$.

  Cuestión 2: Dibujar con Matlab el dominio de integración D_I.

- Considérese la región cuadrada $R = \{(x,y),\ -1{,}5 \leq x \leq 1{,}5,\ -1{,}5 \leq y \leq 1{,}5\}$ que contiene el dominio D_I. Se realiza una partición P de la región cuadrada R en 36 subregiones cuadradas con longitud de lado 1/2. Para ello se procede como sigue: se divide el intervalo $[-1{,}5, 1{,}5]$ en 6 subintervalos con amplitud $\Delta x = 1/2$ en el eje OX y $\Delta y = 1/2$ en el eje OY. A continuación se dibujan los cuadrados resultantes de trazar líneas paralelas a los ejes coordenados con origen en los valores anteriores. En la Figura 2 se muestra la pieza I, el dominio de integración D_I y la partición P.

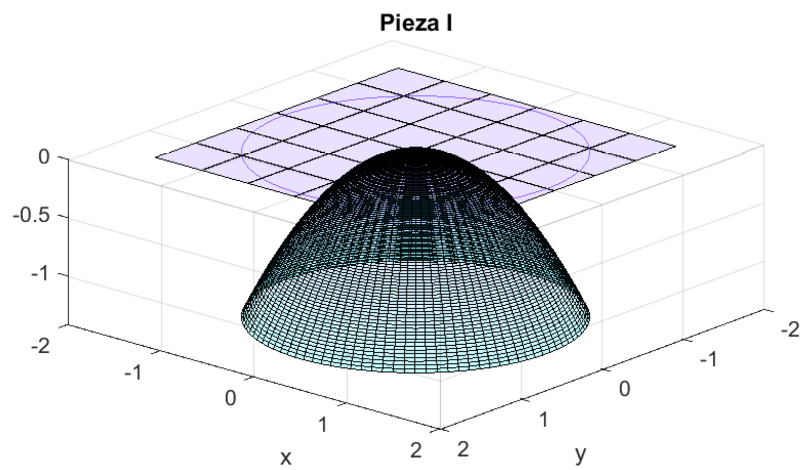

Figura 2: Pieza I, dominio de integración y partición P.

Cuestión 3: ¿Qué significa geométricamente el valor $\Delta x \Delta y$ en la partición anterior P.?

- Considérese el cuadrado con vértices $(1/2,0)$, $(1/2,1/2)$, $(1,0)$ y $(1,1/2)$ en la partición P. El vértice inferior izquierdo de dicho cuadrado es $(1/2,0)$.

Cuestión 4: Calcular la ecuación del plano tangente al paraboloide en el punto $(1/2, 0, -1/(4\sqrt{2}))$

En la Figura 3, se muestra la porción del plano tangente que se proyecta en el cuadrado de vértices $(1/2,0)$, $(1/2,1/2)$, $(1,0)$ y $(1,1/2)$.

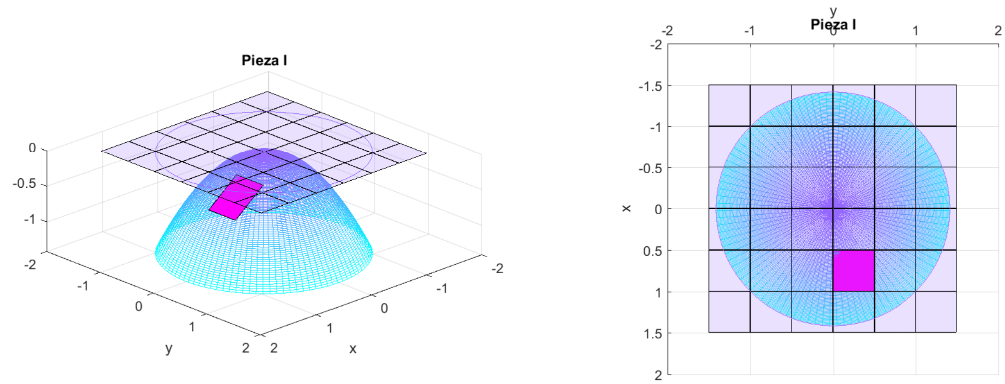

Figura 3: Porción de plano tangente que se utiliza en la aproximación

- Sea $z = f(x,y) = -\frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{2}}$ la ecuación en explícitas de la pieza I.

  Cuestión 5: Definir con Matlab la siguiente función $g(x,y)$.

  La función se define como $g(x,y) = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}$ si (x,y) está dentro del dominio de integración y 0 si (x,y) está fuera. Se definirá $g(x,y)$ como una función que admite como argumento dos vectores x e y.

```
function z=g(x,y)
for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
        if ((x(i,j)^2+y(i,j)^2)<=2)
            z(i,j)=real(sqrt(1+2*(x(i,j)^2)+2*(y(i,j)^2)));
        else
            z(i,j)=real(0);
        end
    end
end
end
```

  La función anterior se definirá en un fichero llamado **g.m** que se guardará en nuestra carpeta de trabajo.

  Cuestión 6: ¿Qué significa geométricamente $g(1/2,0)\Delta x\Delta y$?

- Para simplificar los cálculos, vamos a considerar la parte de la pieza I que se proyecta en el primer cuadrante. Nos quedamos con los cuadrados de la partición P que se encuentran en el primer cuadrante. En cada cuadrado R_i consideramos el vértice inferior izquierdo (x_i, y_i). Si dicho vértice se encuentra dentro del dominio, entonces calculamos el área de la porción de plano tangente a la superficie que se proyecta en el cuadrado R_i. Se suman las áreas de todas las porciones de plano tangente y se multiplica el resultado por 4. El valor que se obtiene es una aproximación del área de la superficie.

```
% Rectangulo a<=x<=b, c<=y<=d
a=0;
b=1.5;
c=0;
d=1.5;
% Particion
n=3;
dx = (b-a)/n; dy = (d-c)/n;
p = a : dx : b-dx;
q = c : dy : d-dy;
[P,Q] = meshgrid(p,q);
Z = g(P,Q);
% Valor aproximado del area
valoraproximado=4*sum(sum(Z))*dx*dy
```

El valor exacto del área de la pieza I es 10,6608.

Cuestión 7: ¿Qué valor aproximado se obtiene tomando n=6 y n=50 en la partición P?

- Se define la integral de Riemann para calcular el área como

$$\int\int_{D_I} \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\, dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x(x_i,y_i)^2 + f_y(x_i,y_i)^2}\, \Delta A, \text{ siendo } \Delta A = \Delta x \Delta y$$

y $z = f(x,y)$ la superficie cuyo área se está calculando.

$\boxed{\textbf{Cuestión 8}: \text{Plantear la integral doble para calcular el área de la pieza I.}}$

Cuestión 9: Realizar un c.v. a coordenadas polares en la integral anterior.

Cuestión 10: Resolver la integral anterior con Matlab.