Ejercicio: Integrales Dobles
(20 de marzo, 2018)

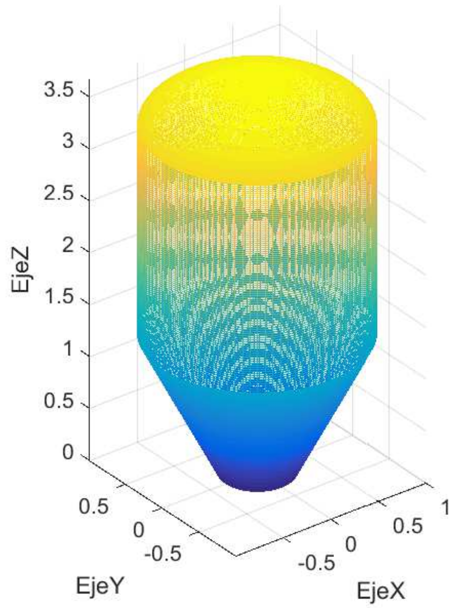

Figura 1: Gráfica del silo

Se está predimensionando un silo de chapa metálica, cuya superficie es un sólido de revolución formado por tres piezas soldadas (véase la Figura 1):

- **Pieza I**: la pieza superior (“tapa”del silo) es medio elipsoide de revolución de radio 1 y altura $1/3$.
- **Pieza II**:la pieza intermedia es un cilindro vertical de sección circular de altura 2 y radio 1.
- **Pieza III**:la pieza inferior es un tronco de cono de revolución de altura $4/3$, y radios de las secciones circulares superior e inferior 1 y $1/3$ respectivamente, alojando ésta última la válvula de vaciado de fondo.

Dibujar de forma esquemática cada una de las piezas, apoyándolas en el plano XY.
Sol: El código del dibujo se puede encontrar en el fichero SiloEjercicioClase.m

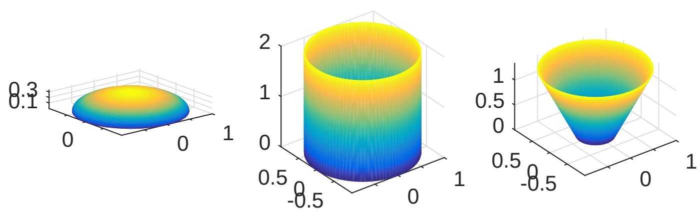

Figura 2: Gráfica con las tres piezas del Silo.

Para calcular el volumen del silo, vamos a calcular el volumen de cada pieza y sumar todos los volúmenes.

1. La ecuación de la pieza I es

$$x^2 + y^2 + 9z^2 = 1$$

para $0 \leq z \leq 1/3$. La siguiente integral nos permite calcular su volumen

$$4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{9}} dx\, dy = 2\pi/9 = 0{,}6981.$$

- La proyección de la pieza I sobre el plano xy ($z = 0$) es el dominio de integración D_I. Dibujar la proyección y escribir la ecuación de la curva que encierra el dominio D_I.
Sol: El dominio de integración es el interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. A continuación se muestra el código de Matlab para dibujarlo junto con un cuadrado que lo contiene.

```
syms x y
ezplot(x^2+y^2-1,[-2,2,-2,2]);
axis equal
hold on
rectangle('Position',[-1 -1 2 2]);
axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
```

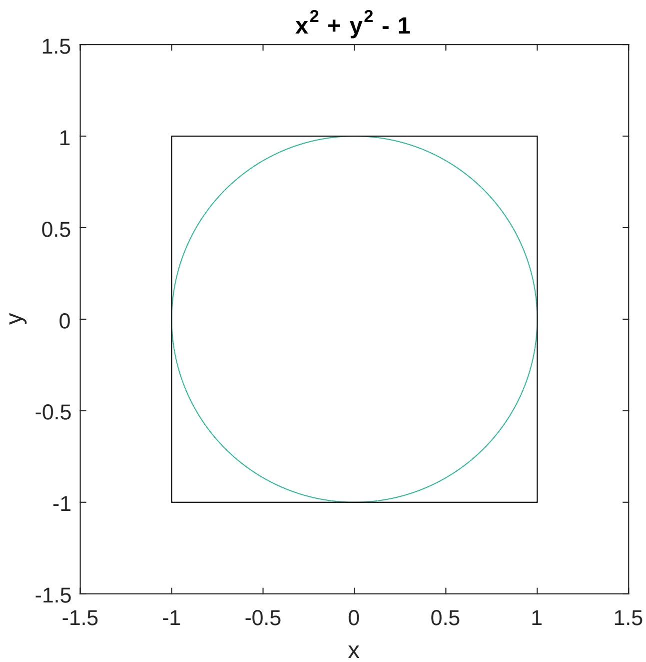

Figura 3: Dominio de proyección de la pieza I y cuadrado que lo contiene.

- Determinar los valores mínimo y máximo de x e y dentro del dominio de integración. Mostrar en el mismo dibujo: un cuadrado R centrado en el $(0, 0)$ y con longitud de sus lados 2; el dominio D_I enmarcado dentro de región cuadrada R .
Sol: Los valores mínimo y máximo son -1 y 1, respectivamente. En la sección anterior se muestra el dominio y la región R que lo contiene.

- Realizar una partición P_1 de la región cuadrada $R = \{(x, y)/ - 1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$ en 4 subregiones cuadradas $R_{ij}, i = 1, 2; j = 1, 2$ con longitud de lado 1. Para ello procedemos como sigue: dividir el intervalo $[-1, 1]$ en 2 subintervalos con amplitud $\Delta x = 1$ en el eje OX y $\Delta y = 1$ en el eje OY; dibujar los cuadrados resultantes de trazar líneas paralelas a los ejes coordenados con origen en los valores anteriores. ¿Qué significa geométricamente el valor $\Delta x \Delta y$.?
Sol: $\Delta x \Delta y$ es el área de cada rectángulo de la partición.

- Realizar una partición P_2 de la región cuadrada $R = \{(x, y)/ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$ en 16 subregiones cuadradas $R_{ij}, i = 1, \ldots, 4; j = 1, \ldots, 4$ con longitud de lado 1/2. Dibujar en un mismo gráfico el dominio de integración D_I y la región R subdividida en subregiones. ¿Cuánto vale Δx y Δy para cada uno de los cuadrados anteriores?

  Sol: $\Delta x = 1/2$ y $\Delta y = 1/2$.

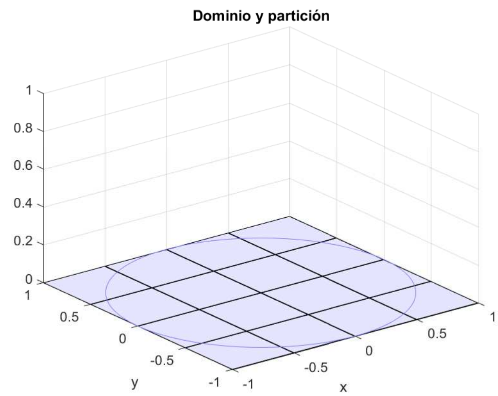

Figura 4: Partición P_2 en la pieza I.

- Consideremos el cuadrado R_{33} con vértices $(0, 0)$, $(1/2, 0)$, $(1/2, 1/2)$ y $(0, 1/2)$ en la partición P_2. El punto medio de dicho cuadrado es $(1/4, 1/4)$. Obtener el valor de la altura del elipsoide en dicho punto, es decir, calcular $f(1/4, 1/4)$ siendo $f(x, y) = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{9}}$. ¿Qué significa geométricamente $f(1/4, 1/4)\Delta x \Delta y$?
  Sol: $f(1/4, 1/4) = 0{,}3118$ y $f(1/4, 1/4)\Delta x\Delta y$=0.0780 es volumen del prisma con área de la base $\Delta x \Delta y$ y altura $f(1/4, 1/4)$.
- Consideremos una función $F(x, y)$ que coincide con $f(x, y)$ dentro del dominio D_I y que vale cero fuera del mismo,

$$F(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1 - x^2 - y^2}{9}} & \text{si } x^2 + y^2 <= 1 \\ & \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Dicha función $F(x, y)$ está definida en el programa FPiezaI.m de Matlab. A continuación, se muestra el valor de $F(x, y)$ en los puntos medios de cada uno de los rectángulos en las particiones P_1 y P_2.

R_{ij}	1	2
1	$F(-1/2, -1/2) = 0{,}2357$	$F(-1/2, 1/2) = 0{,}2357$
2	$F(1/2, -1/2) = 0{,}2357$	$F(1/2, 1/2) = 0{,}2357$

Cuadro 1: Valor de F en cada punto medio de la partición P_1

R_{ij}	1	2	3	4
1	$F(-3/4, -3/4) = 0$	$F(-1/4, -3/4) = 0{,}2041$	$F(1/4, -3/4) = 0{,}2041$	$F(3/4, -3/4) = 0$
2	$F(-3/4, -1/4) = 0{,}2041$	$F(-1/4, -1/4) = 0{,}3118$	$F(1/4, -1/4) = 0{,}3118$	$F(3/4, -1/4) = 0{,}2041$
3	$F(-3/4, 1/4) = 0{,}2041$	$F(-1/4, 1/4) = 0{,}3118$	$F(1/4, 1/4) = 0{,}3118$	$F(3/4, 1/4) = 0{,}2041$
4	$F(-3/4, 3/4) = 0$	$F(-1/4, 3/4) = 0{,}2041$	$F(1/4, 3/4) = 0{,}2041$	$F(3/4, 3/4) = 0$

Cuadro 2: Valor de F en cada punto medio de la partición P_2

- Considerar la partición P_1 y calcular la suma de los volúmenes de los prismas con área de la base $\Delta A = \Delta x \Delta y = 1$ y altura dada por $F(x^*_{ij}, y^*_{ij})$ en cada punto medio (x^*_{ij}, y^*_{ij}) de los cuadrados. Considerar la partición P_2 y calcular la suma de los volúmenes de los prismas con área de la base $\Delta A = \Delta x \Delta y = 0{,}25$ y altura dada por $F(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ en cada punto medio (x_{ij}^*, y_{ij}^*) de los cuadrados. Comparar los valores obtenidos con el valor exacto de la integral doble.

Sol: En el caso de la partición P_1 el valor aproximado es 0.9428 y el código de Matlab para calcularlo es

```
a=-1;
b=1;
c=-1;
d=1;
n=2;
m=2;
dx = (b-a)/n; dy = (d-c)/m;
p = a +0.5*dx: dx : b-0.5*dx;
q = c +0.5*dy: dy : d-0.5*dy;
[P,Q] = meshgrid(p,q);
Z = FPiezaI(P,Q);
valoraproximado=sum(sum(Z))*dx*dy
```

Si en el código anterior ponemos $n = m = 4$ se obtiene el valor aproximado para la partición P_2 y es 0.7201. En la siguiente figura se muestran los prismas que se han calculado a partir de la partición P_2 y los que se obtendrían si consideramos $n = m = 20$.

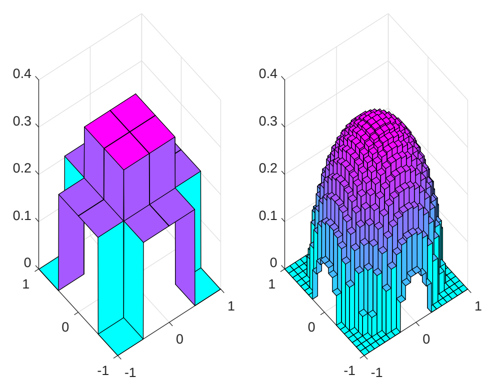

Figura 5: Prismas que se utilizan en la aproximación del volumen de la Pieza I.

- Se define la integral de Riemmann como

$$\int\int_{D_I} f(x,y)dxdy = \int\int_R F(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A, \text{ siendo } \Delta A = \Delta x \Delta y.$$

- Para escribir los límites de integración en la integral $\int\int_{D_I} f(x,y)dxdy$, vamos a recorrer (por simetría) la parte del dominio D_I que se encuentra en el primer cuadrante. Para ello tomamos un y fijo $(0 \le y \le 1)$ y trazamos una línea paralela al eje OX y que recorre todo el dominio de integración, ¿cuál es el intervalo de variación de la variable x?
Sol: El intervalo de variación es $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$. Véase la Figura 6.

- La siguiente integral representa el volumen encerrado por el elipsoide

$$\int\int_{D_I} f(x,y)dxdy = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{9}}dx\, dy.$$

```
syms x y
4*int(int(sqrt((1-x^2-y^2)/9),x,0,sqrt(1-y^2)),y,0,1)
```

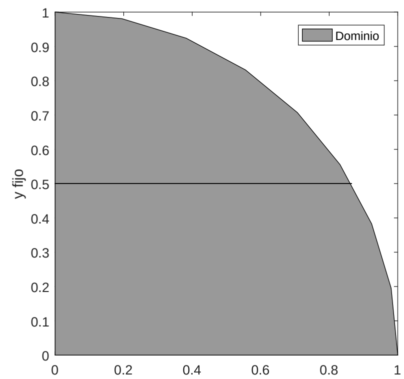

Figura 6: Dominio de integración de la pieza I.

- Dado y fijo, ¿qué interpretación geométrica tiene la integral simple $A(y) = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{9}}dx$?.
  Sol: Es el área de una sección del sólido.
- ¿Qué interpretación geométrica tiene la integral

$$\int_0^1 A(y)dy,$$

  siendo $A(y) = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{9}}dx$?
  Sol: Es el volúmen del sólido.

2. La ecuación de la pieza intermedia II es

$$x^2 + y^2 = 1$$

para $0 \leq z \leq 2$. La siguiente integral nos permite calcular su volumen

$$4 \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{1-y^2}dz\ dy = 2\pi = 6{,}2832.$$

- La proyección de la pieza II sobre el plano yz $(x = 0)$ es el dominio de integración D_{II}, dibujar dicho dominio.

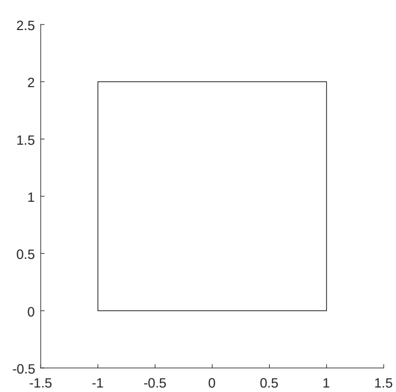

Figura 7: Dominio de integración Pieza II.

- Por simetría del dominio de integración D_{II} y de la superficie del cilindro, vamos a considerar la parte de la pieza II con $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ y su proyección en el plano YZ que está definida por la región rectangular $R = \{(y, z),\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\}$. Se pide: Realizar una partición de la región rectangular R subdividiendo el intervalo $[0, 1]$ del eje OY en subintervalos con amplitud $dy = 0{,}2$ y el intervalo $[0, 2]$ del eje OZ en subintervalos de amplitud $dz = 0{,}5$; dibujar el rectángulo R y la partición en subregiones rectangulares. ¿Qué significa geométricamente $dydz$?.

Sol: $dydz$ es el área de cada rectángulo de la partición.

- Escribir en la siguiente tabla el valor de $x = g(y, z) = \sqrt{1 - y^2}$ en el punto medio (y^*_{ij}, z^*_{ij}) de cada uno rectángulos anteriores.

R_{ij}	1	2	3	4
1	$g(0'1, 0'25) = 0{,}9950$	$g(0'1, 0'75) = 0{,}9950$	$g(0'1, 1'25) = 0{,}9950$	$g(0'1, 1'75) = 0{,}9950$
2	$g(0'3, 0'25) = 0{,}9539$	$g(0'3, 0'75) = 0{,}9539$	$g(0'3, 1'25) = 0{,}9539$	$g(0'3, 1'75) = 0{,}9539$
3	$g(0'5, 0'25) = 0{,}8660$	$g(0'5, 0'75) = 0{,}8660$	$g(0'5, 1'25) = 0{,}8660$	$g(0'5, 1'75) = 0{,}8660$
4	$g(0'7, 0'25) = 0{,}7141$	$g(0'7, 0'75) = 0{,}7141$	$g(0'7, 1'25) = 0{,}7141$	$g(0'7, 1'75) = 0{,}7141$
5	$g(0'9, 0'25) = 0{,}4359$	$g(0'9, 0'75) = 0{,}4359$	$g(0'9, 1'25) = 0{,}4359$	$g(0'9, 1'75) = 0{,}4359$

  Calcular la suma de los volúmenes de los prismas con área de la base $\Delta A = dydz$ y altura dada por $g(y^*_{ij}, z^*_{ij})$. Multiplicar el resultado obtenido por 4 y compararlo con el valor exacto de la integral.
  Sol: El valor exacto de la integral es 6.2832 y el valor aproximado es 6.3440. En la Figura 9 se muestran lo prismas que se utilizan para la aproximación en el caso de considerar 400 subrectángulos en la partición y el valor aproximado de la integral en ese caso es 6.2909.

- Se define la integral de Riemmann como

$$\int\int_{D_{II}} g(y, z) dydz = 4 * \int\int_{R} g(y, z) dydz = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(y^*_{ij}, z^*_{ij}) \Delta A, \text{ siendo } \Delta A = dydz.$$

- Para escribir los límites de integración, vamos a recorrer con líneas verticales la parte del dominio D_{II} que se encuentra en el primer cuadrante. Para ello tomamos un y fijo $(0 \leq y \leq 1)$ y trazamos una línea paralela al eje OZ que recorre todo el dominio de integración, ¿cuál es el intervalo de variación de la variable z?
  Sol: El intervalo de variación es $0 \leq z \leq 2$

- Otra opción es recorrer el dominio con líneas horizontales. Para ello podemos tomar un z fijo $(0 \leq z \leq 2)$ y trazar una línea paralela al eje OY que recorre todo el dominio de integración. En este caso el intervalo de variación de la y es $0 \leq y \leq 1$. Dibujar la parte del dominio D_{II} que se encuentra en el primer cuadrante y recorrerlo con líneas horizontales.
  Sol: En la siguiente figura se muestra cómo recorrer el dominio con líneas horizontales y verticales.

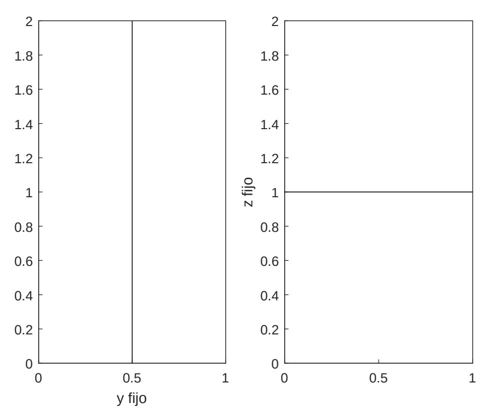

Figura 8: Dominio de integración Pieza II.

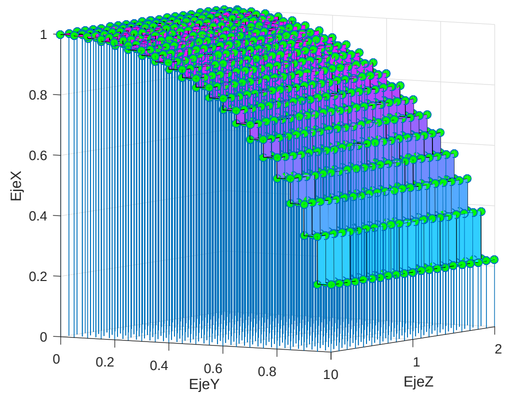

Figura 9: Prismas que se utilizan en la aproximación del volumen de la Pieza II.

- Las siguientes integrales representan el volumen de la pieza II

$$4\int_0^1\int_0^2 \sqrt{1-y^2}dz\; dy = 4\int_0^2\int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy\; dz.$$

- ¿Qué representa la integral

$$\int_0^1\int_0^2 dz\; dy?.$$

Sol: El área del rectángulo $0 \leq y \leq 1,\; 0 \leq z \leq 2$.

3. La ecuación de la pieza III (pieza inferior) es

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$$

para $0 \leq z \leq (4/3)$.

- Proyectar la superficie sobre el plano xz $(y = 0)$. Dibujar el dominio de integración.

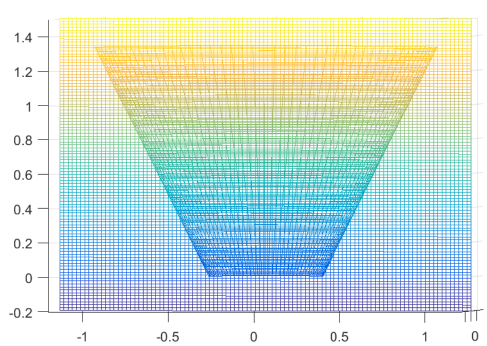

Figura 10: Dominio de integración Pieza III.

- Si tomamos un valor fijo de la z entre 0 y $4/3$, determinar el intervalo de variación de x para recorrer el dominio con líneas horizontales.
Sol: El intervalo de variación es $0 \leq x \leq \frac{z}{2} + \frac{1}{3}$.
- Plantear la integral doble que nos permite calcular el volumen de la pieza inferior.
Sol: El valor exacto es 2.0168.

```
syms x z
4*int(int(sqrt(-x^2+((z/2)+(1/3))^2),x,0,(z/2)+(1/3)),z,0,4/3)
```