Instrumentos Matemáticos para la Ingeniería II

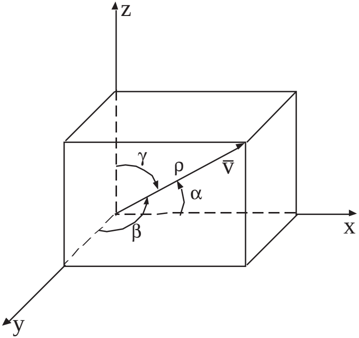
Tema 7: Área de una Superficie

Cristina Solares

Universidad de Castilla-La Mancha

16 de abril de 2024

Se puede determinar la dirección de un vector no nulo $\overline{v} = v_1\overline{i} + v_2\overline{j} + v_3\overline{k}$, por los ángulos α, β y γ que forma $\overline{v}$ con los ejes coordenados. Estos ángulos se llaman los `ángulos directores` de $\overline{v}$ y sus cosenos se llaman los `cosenos directores` de $\overline{v}$.



De donde se obtiene

$$\begin{aligned} v_1 &= \overline{v} \bullet \overline{i} = \|\overline{v}\| \; \|\overline{i}\| \cos\alpha, \\ v_2 &= \overline{v} \bullet \overline{j} = \|\overline{v}\| \; \|\overline{j}\| \cos\beta, \\ v_3 &= \overline{v} \bullet \overline{k} = \|\overline{v}\| \; \|\overline{k}\| \cos\gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Tomando $\rho = \|\overline{v}\|$,

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\rho}, \qquad \cos\beta = \frac{v_2}{\rho}, \qquad \cos\gamma = \frac{v_3}{\rho}, \tag{2}$$

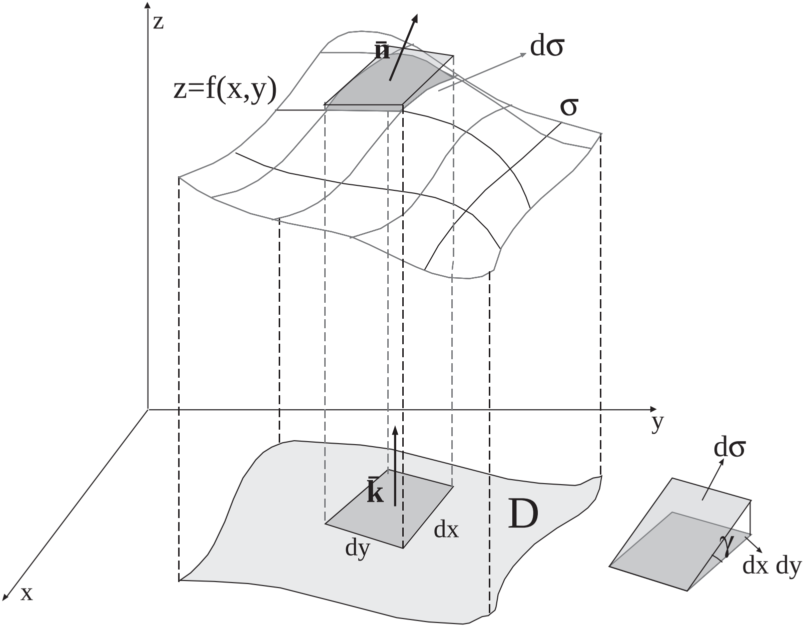
$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}. \tag{3}$$

La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P = (v_1, v_2, v_3)$ es

$$z - v_3 = \frac{\partial z}{\partial x}(P)(x - v_1) + \frac{\partial z}{\partial y}(P)(y - v_2), \tag{4}$$

el vector normal a dicho plano es $\pm\left(\frac{\partial z}{\partial x}(P), \frac{\partial z}{\partial y}(P), -1\right)$, según lo visto en la ecuación (3)

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x}(P))^2 + (\frac{\partial z}{\partial y}(P))^2}. \tag{5}$$


z
dσ
n̄
z=f(x,y)
σ
y
dσ
k̄
D
dx
dy
γ
dx dy
x

Consideremos la superficie $z = f(x, y)$ que se proyecta en el dominio D en el plano xy, tomamos una partición de dicho dominio de forma que cada rectángulo de la partición le corresponde un "parche" de superficie, estos parches son planos tangentes a la superficie. El área σ de la superficie se puede obtener como

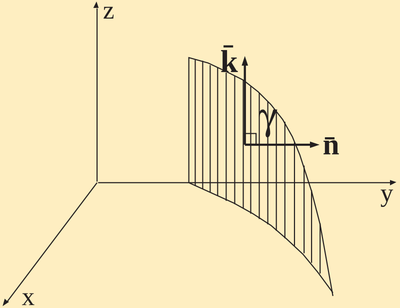
$$\sigma = \int\int_D d\sigma = \int\int_D \frac{dx\ dy}{|\cos\gamma|} = \int\int_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\ dx\ dy. \tag{6}$$

Nota

En la fórmula anterior, la relación entre la superficie y el dominio debe ser biunívoca. En la Figura, se puede observar que la proyección sobre el plano xy no es un dominio, es una curva, en este caso

$$d\sigma = \frac{dx\ dy}{\cos\gamma} = \frac{dx\ dy}{\cos 0} = \infty. \tag{7}$$

En este caso, hay que proyectar sobre otro plano, o calcular el área mediante una integral curvilínea.



Teorema (7.2 Área de una superficie)

Supongamos que la función $f(x,y)$ tiene derivadas parciales f_x y f_y continuas en una región D del plano xy. El área de la porción de la superficie $z = f(x,y)$ que está sobre la región D es

$$\sigma = \int\int_D \sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2}\, dx\, dy. \tag{8}$$

Nota

1. *Si proyectamos sobre el plano xy, el área de la superficie se puede calcular como*

$$\sigma = \int\int_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dx\, dy. \tag{9}$$

2. *Si proyectamos sobre el plano xz, el área de la superficie se puede calcular como*

$$\sigma = \int\int_{D_{xz}} \sqrt{1 + (y_x)^2 + (y_z)^2}\, dx\, dz. \tag{10}$$

3. *Si proyectamos sobre el plano yz, el área de la superficie se puede calcular como*

$$\sigma = \int\int_{D_{yz}} \sqrt{1 + (x_y)^2 + (x_z)^2}\, dy\, dz. \tag{11}$$

Nota

Si la superficie está dada en implícitas $F(x, y, z) = 0$ *con* $F_z \neq 0$*, entonces el vector normal es* $\pm(F_x, F_y, F_z)$ *y* $|cos\gamma| = \frac{|F_z|}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$*, el área de la superficie es*

$$\sigma = \int\int_{D_{xy}} \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|}\, dx\, dy, \tag{12}$$

siendo D_{xy} *la proyección de la superficie* σ *sobre el plano* OXY.

Nota

Si la superficie está dada en paramétricas $x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$ *para* $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$*, el área de la superficie es*

$$\sigma = \int\int_{D} \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right\| du\, dv, \tag{13}$$

siendo

$$\mathbf{S}(u, v) = x(u, v)\, \mathbf{i} + y(u, v)\, \mathbf{j} + z(u, v)\, \mathbf{k}.$$

Ej. 1 Dados, el paraboloide $x = y^2 + z^2$, el cilindro parabólico $x = 4y^2$, y el plano $x = 1$:

1.1 Hallar el área de la porción de superficie de paraboloide limitada por el cilindro y el plano.

1.2 Hallar el área de la porción de superficie de cilindro limitada por el paraboloide y el plano.

Ej. 2 Calcular el área de la superficie

$$3z = \sqrt{2}(x+y)^{3/2}, \tag{14}$$

interior al prisma $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 3$.

Ej. 3 Calcular el área de la superficie (plana),

$$z = 6 - x, \tag{15}$$

limitada por los cilindros $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x}$ situada en el primer octante $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$.

Ej. 4 Plantear el área del cilindro $y = \sqrt{x}$, limitado por $z = 0$ y $z = 6 - x$.

4.1 Como una integral curvilínea.

4.2 Como una integral doble.

Ej. 5 Calcular el área de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ con $z \geq 0$.

Ej. 6 Plantear el área de la superficie de ecuaciones paramétricas $x = u,\ y = v,\ z = 1 - u^2$ con $u, v \geq 0$ y $u + v \leq 1$.

Ej. 7 Hallar el área de la superficie de ecuaciones paramétricas $x = \cos u\ \cos v,\ y = \cos u\ \sin v,\ z = \sin u$ con $0 \leq u \leq \pi/4,\ 0 \leq v \leq u$.