Instrumentos Matemáticos para la Ingeniería II

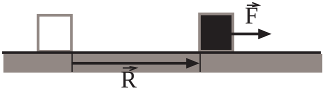
Tema 5: Integrales Curvilíneas

Cristina Solares

Universidad de Castilla-La Mancha

15 de marzo de 2024

Considérese un cuerpo que sufre un desplazamiento de magnitud R en línea recta. Mientras el cuerpo se mueve, una fuerza constante de magnitud F (módulo del vector fuerza $\overline{F}$) actúa sobre él en la dirección del desplazamiento.

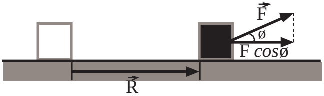


Se define el trabajo realizado por la fuerza como

$$W = F\ R. \tag{1}$$

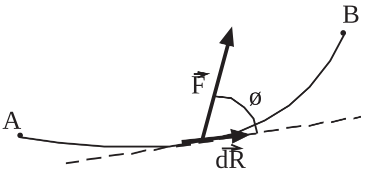
En el caso de que la fuerza y el desplazamiento tengan diferente dirección se toma la componente de $\overline{F}$ en la dirección de $\overline{R}$ ($F\cos\phi$, donde ϕ es el ángulo que forman los dos vectores) y se define el trabajo como el producto de esta componente y la magnitud del desplazamiento. Se está suponiendo que F y ϕ son constantes durante el desplazamiento. Utilizando la definición de producto escalar podemos escribir la fórmula como

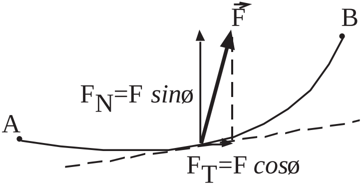
$$W = \overline{F} \bullet \overline{R}. \tag{2}$$



Es interesante estudiar situaciones en las que una fuerza varía en magnitud, dirección o ambas cosas y además el cuerpo el cuerpo sigue una trayectoria curva para ir desde A a B. En este caso se define el trabajo

$$W = \int_A^B F \cos\phi \, dR = \int_A^B \overline{F} \bullet \overline{dR} = \int_C \overline{F} \bullet \overline{dR} \tag{3}$$





Nota

El trabajo se puede calcular como

$$\int_C \overline{F} \bullet \overline{dR} = \int_C \overline{F} \bullet \frac{d\overline{R}}{dt}\, dt = \int_C \overline{F} \bullet \frac{d\overline{R}}{ds}\, ds = \int_C \overline{F} \bullet \overline{T}\, ds.$$

Teorema (Propiedades de las integrales curvilíneas)

Las integrales curvilíneas verifican las siguientes propiedades:

1. **Regla del múltiplo constante:**

$$\int_C k\ f\ dx = k \int_C f\ dx,\ \ k \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

2. **Regla de la suma:**

$$\int_C (f_1 + f_2)\ dx = \int_C f_1\ dx + \int_C f_2\ dx. \tag{5}$$

3. **Regla de la dirección opuesta:**

$$\int_{-C} f\ dx = -\int_C f\ dx. \tag{6}$$

donde $-C$ designa a la misma curva C recorrida en sentido opuesto.

4. **Regla de la subdivisión:**

$$\int_C f\ dx = \int_{C_1} f\ dx + \int_{C_2} f\ dx \tag{7}$$

donde C está subdividida en subarcos C_1 y C_2 con $C = C_1 \cup C_2$ con $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Esta propiedad se generaliza a un número finito de subdivisiones.

Consideremos un alambre delgado de densidad variable. Suponemos que el alambre tiene la forma de la curva C, sea $\rho(x, y, z)$ la densidad (masa por unidad de longitud) en un punto cualquiera del alambre. Para un punto (x_i, y_i, z_i) de un segmento pequeño del alambre Δs_i el producto $\rho(x, y, z)\,\Delta s_i$ es una aproximación de la masa m_i de este segmento. Tomando la suma de tales productos en una partición de C y haciendo el límite de esta suma cuando $\|\Delta s\| \to 0$ se obtiene que la masa del cable se puede calcular

$$\lim_{\|\Delta s\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x, y, z)\,\Delta s_i = \int_C \rho(x, y, z)ds. \tag{8}$$

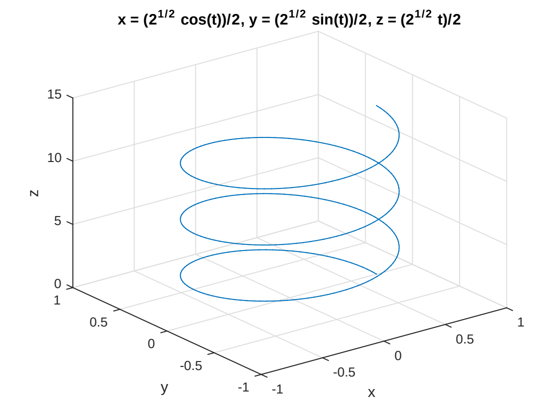
Ejemplo

Hallar la masa de un muelle con forma de hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})$$

con $0 \leq t \leq 6\pi$, *siendo la densidad del alambre* $\rho(x, y, z) = 1 + z$.

Ejemplo



Ejemplo

```
syms t real
R=(1/sqrt(2))*[cos(t),sin(t),t];
%Dibujo curva de forma simbólica
fplot3(R(1),R(2),R(3),[0,6*pi]);%
Densidad
rho=1+(t/sqrt(2));
%Integrando
J=diff(R,t);
ds=simplify(sqrt(dot(J,J)));
p=rho*ds;
%Calculamos la integral
I=int(p,t,0,6*pi)
%Dibujo curva de forma numérica
t=linspace(0,6*pi,100);
x=(1/sqrt(2)).*cos(t);
y=(1/sqrt(2)).*sin(t);
z=(1/sqrt(2)).*t;
plot3(x,y,z)
grid on
```

Sea $\overline{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\ \overline{i} + g(x,y,z)\ \overline{j} + h(x,y,z)\ \overline{k}$ un campo vectorial y sea C la curva definida en paramétricas como

$$\overline{R}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k},\ \ t_1 < t < t_2. \tag{9}$$

Utilizando la notación $d\overline{R} = dx\ \overline{i} + dy\ \overline{j} + dz\ \overline{k}$, se designa la integral de $\overline{F}$ sobre C por

$$\begin{aligned} \int_C F \bullet d\overline{R} &= \int_C f(x,y,z)\ dx + g(x,y,z)\ dy + h(x,y,z)\ dz \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [f(x(t),y(t),z(t))\ \frac{dx}{dt} + g(x(t),y(t),z(t))\ \frac{dy}{dt} + \\ &\quad h(x(t),y(t),z(t))\ \frac{dz}{dt}]\ dt. \end{aligned} \tag{10}$$

Ejemplo

Calcular la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$ *a lo largo de la curva* C *dada por* $(x(t), y(t), z(t)) = (t^2, 2t, t)$ *para* $0 \leq t \leq 1$.

```
syms x y z t real
F=[y^2-z^2,2*y*z,-x^2];R=[t^2,2*t,t];
f=subs(F,{x,y,z},{R(1),R(2),R(3)});
%Integrando
p=simplify(dot(f,diff(R,t)));
%Calculamos la integral
I=int(p,t,0,1)
```

Ejemplo

Sea $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2, x^2y)$. *Calcular la integral* $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ *entre los puntos* $(0, 0)$ *y* $(2, 4)$ *siguiendo el segmento de recta que une dichos puntos.*

```
syms x y z t real
F=[x*y^2,x^2*y]; R=[t,2*t];
f=subs(F,{x,y},{R(1),R(2)});
%Integrando
p=simplify(dot(f,diff(R,t)));
%Calculamos la integral
I=int(p,t,0,2)
```

Ejemplo

Calcular la integral curvilínea

$$\int_C x\, y\, dx + (x^2 - y^2)\, dy$$

a lo largo de

1. *Circunferencia de centro el origen y radio 1.*
2. *Parábola $y^2 = x$ entre los puntos $A(1,-1)$ y $B(1,1)$.*
3. *Cuadrado de vértices $A(1,-1)$, $B(1,2)$, $C(-2,2)$ y $D(-2,-1)$.*
4. *Triángulo de vértices $A(1,-1)$, $B(1,1)$ y $C(-1,-1)$.*

Definición (6.4 Campo vectorial conservativo)

Un campo vectorial $\overline{F}$ se llama conservativo en una región D si se le puede representar en D como el gradiente de una función continuamente diferenciable U, a la que se llama el potencial escalar de $\overline{F}$, $\overline{F} = \nabla U$.

Supongamos que queremos calcular $\int_\gamma f(x,y)dx + g(x,y)dy$ entre los puntos A y B. Si existe $U(x,y)$ tal que $\overline{F} = \nabla U$, entonces

$$\begin{array}{lllllll} dU & = & f(x,y) & dx & + & g(x,y) & dy \\ dU & = & U_x & dx & + & U_y & dy. \end{array} \tag{11}$$

Integrando la expresión dU obtenemos

$$\int d(U(x,y)) = U(x,y) + C. \tag{12}$$

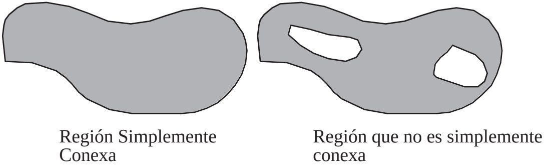
Entonces

$$\int_A^B f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_A^B U_x \; dx + U_y \; dy = \int_A^B d(U(x,y)) = \tag{13}$$

$$= [U(x,y) + C]_A^B = U(x_B, y_B) - U(x_A, y_A). \tag{14}$$

Definición (Conjunto simplemente conexo)

Una región $D \in \mathbb{R}^2$ se llama simplemente conexa si para toda curva simple cerrada contenida en D, el recinto encerrado por dicha curva también está contenido en D.



Teorema

Sea $\overline{F}(x,y) = f(x,y)\,\overline{i} + g(x,y)\,\overline{j}$ un campo vectorial donde f y g tienen derivadas parciales primeras continuas en una región D abierta y simplemente conexa. Entonces, $\overline{F}(x,y)$ es conservativo en D si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{15}$$

para todo punto de D.

Teorema

Sea $\overline{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\,\overline{i} + g(x,y,z)\,\overline{j} + h(x,y,z)\,\overline{k}$ *un campo vectorial donde* f*,* g *y* h *tienen derivadas parciales primeras continuas en una región* D *abierta y simplemente conexa. Entonces,* $\overline{F}(x,y,z)$ *es conservativo en* D *si y sólo si*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \tag{16}$$

para todo punto de D*.*

Teorema

Sea $\overline{F}$ *un campo vectorial conservativo en una región* D *y sea* U *una función potencial escalar de* $\overline{F}$*, es decir, tal que* $\nabla U = \overline{F}$*.*
Entonces, si C *es una curva contenida en* D*, con punto inicial* A *y punto final* B*, se tiene*

$$\int_C \overline{F} \bullet d\overline{R} = U(B) - U(A). \tag{17}$$

Por tanto, la integral $\int_C \overline{F} \bullet d\overline{R}$ *es independiente del camino.*

Ejemplo

Sea la forma diferencial $(3*x*y^2 - x^2)\,dx + (-1 + 6*y^2 + 3*x^2*y)\,dy$. *¿Admite función potencial?.*

```
syms x y real
f=3*x*y^2-x^2;g=-1+6*y^2+3*x^2*y;
%Existencia de función potencial
diff(f,y)-diff(g,x)
```

En caso afirmativo, hállese dicha función potencial.

```
%Calculamos la función potencial
I1=int(f,x)
phi=int(g-diff(I1,y),y)
U=simplify(I1+phi)
```

Ejemplo

Sea la forma diferencial $(e^x y^2 + 3x^2 y)\,dx + (2ye^x + x^3)\,dy$. *¿Admite función potencial?. En caso afirmativo, hállese dicha función potencial.*

Ejemplo

Sea la forma diferencial $(2xyz)\,dx + (x^2 z + 2ye^z)\,dy + (x^2 y + y^2 e^z)\,dz$. *¿Admite función potencial?. En caso afirmativo, hállese dicha función potencial.*

Ejemplo

Dado el campo de fuerzas

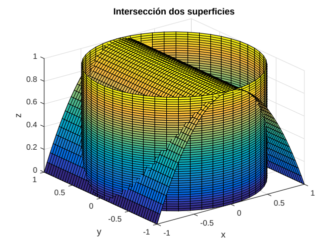
$$\mathbf{F}(x,y) = (y^3+1)\,\mathbf{i} + (3\,x\,y^2+1)\,\mathbf{j}.$$

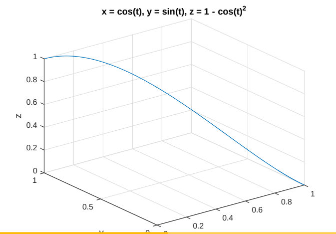
Se pide:

1. *Hallar el trabajo realizado al mover un objeto desde el punto* $(0,0)$ *al* $(2,0)$ *a lo largo de la semicircunferencia* $(x-1)^2+y^2=1$ *con* $y \geq 0$.
2. *Hallar el trabajo realizado al mover el objeto a lo largo de la circunferencia completa.*
3. *¿Es* **F** *conservativo? Justificar la respuesta. Hallar la función potencial* $U(x,y)$.

Ejemplo

Calcular la integral curvilínea del campo $\mathbf{F} = (0, z/(1-y)^{(1/2)}, 0)$ *a lo largo de la curva* C *que va del punto* $A(1,0,0)$ *al punto* $B(0,1,1)$ *siguiendo la curva intersección de los cilindros* $\{x^2 + y^2 = 1,\ z = 1 - x^2\}$.





Ejemplo

```
%Dibujo las superficies x^2+y^1=1, z=1-x^2 en una misma figura
syms u v
sup1=fsurf(cos(u),sin(u),v,[0,2*pi,0,1]);
hold on
sup2=fsurf(u,v,1-u^2,[-1,1,-1,1]);
title('Intersección dos superficies');
%Dibujo la curva intersección de las superficies x^2+y^1=1, z=1-x^2
syms t
curv=fplot3(cos(t),sin(t),1-cos(t)^2,[0,pi/2])
%Calculamos la integral curvilínea
syms x y z t real
F=[0,z/(1-y)^(1/2),0];
R=[cos(t),sin(t),1-cos(t)^2];
f=subs(F,{x,y,z},{R(1),R(2),R(3)});
%Integrando
p=simplify(dot(f,diff(R,t)));
%Calculamos la integral
I=int(p,t,0,pi/2)
```

Ejemplo

Un objeto se mueve en el campo de fuerzas $\mathbf{F} = (y^2, 2(x+1)y)$*, en el sentido contrario a las agujas del reloj, desde el punto* $(2,0)$ *hasta el punto* $(-2,0)$ *sobre el camino elíptico* $x^2 + 4y^2 = 4$ *y luego vuelve al punto* $(2,0)$ *moviéndose sobre el eje* OX*. ¿Cuál es el trabajo realizado por el campo de fuerzas sobre el objeto?*
La elipse se puede parametrizar como $x = 2\cos t,\ y = \sin t$ *con* $t \in [0,\pi]$*. La recta se puede parametrizar como* $x = t,\ y = 0$ *con* $t \in [-2,2]$.

```
syms x y z t real
F=[y^2,2*(x+1)*y];
R1=[2*cos(t),sin(t)];
f1=subs(F,{x,y},{R1(1),R1(2)});
R2=[t,0*t];
f2=subs(F,{x,y},{R2(1),R2(2)});
%Integrando
p1=simplify(dot(f1,diff(R1,t)));
p2=simplify(dot(f2,diff(R2,t)));
%Calculamos la integral
I=int(p1,t,0,pi)+int(p2,t,-2,2)
```

Se puede comprobar que el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ *es conservativo.*

Ejemplo

Plantear la integral curvilínea

$$\int_C (x+2)\ dx + 3\ z\ dy + y^2\ dz$$

siendo C la curva dada como intersección de las superficies

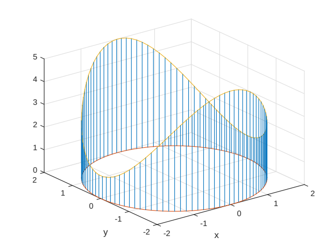
$$\left\{ \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{1/4} + \frac{y^2}{1/2} = 1(cilindro), \quad z = x - 1(plano) \right\}.$$

Consideremos la curva C en el plano xy. Si $z = f(x, y)$ representa una superficie S situada sobre C, entonces la superficie lateral está formada por todos los puntos (x, y, z) situados por debajo de S y directamente en la vertical de C.
Se puede hallar el área de esta pared vertical calculando la integral curvilínea

$$\int_C f(x, y)\, ds. \tag{18}$$

Ejemplo

Considérese una pieza con base circular modelada por la función vectorial $\mathbf{R}(t) = (2cost\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j})$. *Su altura viene dada por la función* $z = 1 + y^2$. *Representar la pieza. Hallar el área lateral de dicha pieza.*



Ejemplo

```
%Dibujamos la pared de forma numérica
t=linspace(0,2*pi,100);
x=2.*cos(t);y=2.*sin(t);z=1+4.*sin(t).^2;
stem3(x,y,z,'marker','none')
box off
xlabel('x');ylabel('y')
hold on
plot(x,y)
plot3(x,y,z)
%Calculamos la integral curvilínea
clear
syms t
R=[2*cos(t),2*sin(t)];z=1+4*sin(t)^2;
%Integrando
J=diff(R,t);
ds=simplify(sqrt(dot(J,J)));
p=z*ds;
%Calculamos la integral
I=int(p,t,0,2*pi)
```

Ejemplo

Consideremos un tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $z = \frac{b}{a}(a - x - y)$ con $b > a > 0$, de modo que su base es un triángulo isósceles que tiene vértices en el origen y en los puntos $(a, 0, 0)$ y $(0, a, 0)$, y su altura es b (teatro). El escenario es circular y ocupa la región del plano xy dada por $\{(x, y)/x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ en donde $r < \sqrt{3}a/2$. Calcular el área de dicho escenario.