Ejercicio Integrales Dobles
(13 de abril, 2023)

Se está diseñando un depósito de agua con las siguientes características (véase la Figura 1):

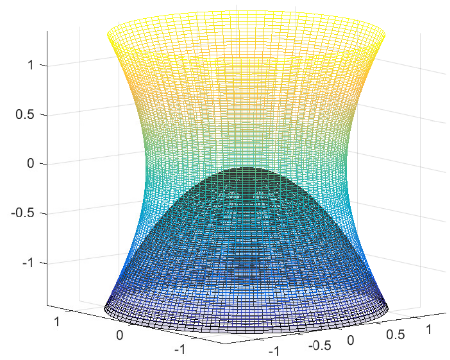

Figura 1: Gráfica del depósito

- **Pieza I**: El fondo del depósito es un paraboloide de ecuación

$$\sqrt{2}\, z + x^2 + y^2 = 0$$

para $-\sqrt{2} \le z \le 0$

- **Pieza II**: El cerramiento exterior es un hiperboloide de una hoja de ecuación

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 = 2.$$

para $-\sqrt{2} \le z \le \sqrt{2}$

El agua queda almacenada dentro de la pieza II y por encima de la pieza I. Las cotas máxima y mínima del depósito son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, respectivamente.

1. Se quiere pintar el fondo del depósito y para ello es necesario calcular el área de la pieza I.

   - La ecuación de la pieza I se puede escribir en paramétricas como

   $$x = 2^{1/4}\ \cos(u)\ v, y = 2^{1/4}\ \sin(u)\ v,\ z = -v^2$$

   para $u \in [0, 2\pi]$ y $v \in [0, 2^{1/4}]$.

   Cuestión 1: Dibujar con Matlab el fondo del depósito (pieza I).

```
syms u v
fsurf(2^(1/4)*cos(u)*v,2^(1/4)*sin(u)*v,-v^2,[0,2*pi,0,2^(1/4)])
```

   - La proyección de la pieza I sobre el plano xy (dominio de integración D_I) se puede obtener cortando la superficie $\sqrt{2}\, z + x^2 + y^2 = 0$ por el plano $z = -\sqrt{2}$.

   Cuestión 2: Dibujar con Matlab el dominio de integración D_I.

```
syms x y
fimplicit(x^2+y^2-2,[-4 4 -4 4])
axis equal
```

   Cuestión 3: Resolver con Matlab la integral doble en coordenadas polares para calcular el área de la pieza I.

```
z=-(x^2+y^2)/sqrt(2);
integrando=simplify(sqrt(1+diff(z,x)^2+diff(z,y)^2))
syms r t
4*int(int(sqrt(1+2*r^2)*r,r,0,sqrt(2)),t,0,pi/2)
```

2. Para calcular el volumen de agua que se puede almacenar dentro del depósito, calculamos el volumen del cerramiento exterior (pieza II) y le restamos el volumen del fondo (pieza I).

   - Para calcular el volumen del cerramiento exterior, proyectamos la superficie del hiperboloide $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$ sobre el plano xz (cortando con $y = 0$) y obtenemos un dominio de integración D_h delimitado por la hipérbola

     $$x^2 - \frac{z^2}{2} = 1 \tag{1}$$

     para z comprendido entre los valores $-\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}$.

     Cuestión 4: Plantear la integral doble para calcular el volumen de la pieza II y resolverla con Matlab.

     ```
     syms x z
     8*int(int(sqrt(1+(z^2/2)-x^2),x,0,sqrt(1+(z^2/2))),z,0,sqrt(2))
     ```

   - Para calcular el volumen del fondo del depósito, proyectamos la superficie del paraboloide sobre el plano xy y obtenemos el dominio de integración D_p delimitado por la curva $x^2 + y^2 = 2$. La siguiente integral que permite calcular el volumen del fondo del depósito (pieza I)

     $$4 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (\sqrt{2} - \frac{(x^2 + y^2)}{\sqrt{2}}) \, dx \, dy.$$

     Cuestión 5: Resolver con Matlab la integral que permite calcular el volumen del fondo del depósito.

     ```
     syms x y
     4*int(int(sqrt(2)-((x^2+y^2)/sqrt(2)),y,0,sqrt(2-x^2)),x,0,sqrt(2))
     ```