

1. Ejercicios

1. Calcular

$$\int \int_D xy \, dx dy$$

siendo D la región plana

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}.$$

2. Calcular el volumen en el primer octante ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) comprendido entre los planos $z = 0, z = x + y + 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 16$.
3. Cambiar el orden de integración en la siguiente integral doble:

$$I = \int_0^3 dx \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) \, dy \quad (1)$$

4. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x + z = 6, z = 0$.
5. Calcular siendo el dominio D el rectángulo: $0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b$

$$\int \int_D \frac{y}{(x^2 + 1)^{3/2} (y^2 + 1)} \, dx \, dy. \quad (2)$$

6. Calcular

$$\int \int_D (x^2 - y) \, dx dy$$

siendo D la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^2, y = -x^2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

7. Calcular

$$\int \int_D xy \, dx dy$$

siendo D la región del primer cuadrante encerrada entre las parábolas $y^2 = x$ e $y = x^2$.

8. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloido

$$x^2 + y^2 = 2z \quad (3)$$

y el plano

$$x + y + z = 1. \quad (4)$$

9. Dada la integral

$$I = \int \int_D (2ax - x^2 - y^2)^{1/2} dx dy \quad (5)$$

hallar su expresión en un nuevo sistema de coordenadas (u, v) , definido por las expresiones

$$x = a + u \cos v; y = u \sin v. \quad (6)$$

Calcularla en el caso de que D sea el dominio interior a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0. \quad (7)$$

10. Considerar el sólido formado por la parte interior a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad (8)$$

y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Se pide:

- a) Plantear la integral doble en polares para calcular el volumen de dicho sólido.
- b) Calcular el volumen anterior.

11. Considerar el sólido formado por la parte interior a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad (9)$$

interior a los planos $x = y$, $x = -y$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

Se pide:

- a) Plantear la integral doble en polares para calcular el volumen de dicho sólido.
- b) Calcular el volumen anterior.

12. Considerar el sólido, en el primer octante ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$), limitado por los planos: $z = 8 + 2x + y$, $y = 3 - 2x$ e $y = x$.

- a) Plantear la integral doble que permite calcular el volumen de dicho sólido.
- b) Calcular el volumen de dicho sólido.

13. Considerar el cilindro

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, \quad (10)$$

limitado superiormente por la superficie

$$z = (x - 1)^2 + y^2 + 1, \quad (11)$$

e inferiormente por el plano $z = 0$.

Se pide:

- a) Plantear la integral doble, en coordenadas polares, que permite calcular el volumen del sólido anterior.
- b) Calcular dicho volumen.

14. Calcular la integral curvilínea

$$I_C = \int_C (x + y)dx + (y - x)dy \quad (12)$$

a lo largo de $x^2 + y^2 = 2ax$.

- a) Mediante la técnica habitual de calcular una integral curvilínea.
- b) Aplicando la fórmula de Green.