# 1. Ejercicios

1. Un objeto se mueve en el campo de fuerzas

$$F(x,y) = y^2\ \bar{i} + 2(x+1)y\ \bar{j}, \tag{1}$$

en sentido contrario a las agujas del reloj, desde el punto $(2,0)$, sobre el camino elíptico $x^2 + 4y^2 = 4$, hasta $(-2,0)$ y luego vuelve al $(2,0)$ moviéndose sobre el eje $x$. ¿Cuál es el trabajo realizado por el campo de fuerzas sobre el objeto?
**Solución**: $I = 0$.

2. Sean los cilindros de ecuaciones

$$(C1)\ x^2 + y^2 = 1;\ (C2)\ z = 1 - x^2 \tag{2}$$

y sea la integral curvilínea

$$\int_C z\ dy/(1-y)^{1/2}. \tag{3}$$

Calcular la integral $I_C$ partiendo del punto $A(1,0,0)$ y llegando al punto $B(0,1,1)$, siguiendo la curva definida por la intersección de los cilindros $C_1$ y $C_2$.
**Solución**: $I = 16/15$.

```
syms x y z t real
F=[0,z/(1-y)^(1/2),0];
R=[cos(t),sin(t),1-cos(t)^2];
f=subs(F,{x,y,z},{R(1),R(2),R(3)});
%Integrando
p=simplify(dot(f,diff(R,t)));
%Calculamos la integral
I=int(p,t,0,pi/2)
```

3. Calcular $\int_C ydx - xdy$ a lo largo de la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. La curva $\gamma_1$ es la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ que une los puntos $(4,0)$ y $(0,3)$. La curva $\gamma_2$ es el segmento de recta que une los puntos $(0,3)$ y $(4,0)$.
**Solución**: $I = 12 - 6\pi$.

4. Calcular la integral curvilínea

$$I = \int_\gamma (2x^2 + 2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy + 3y^2)dy, \tag{4}$$

   *a*) a lo largo de la curva $C$, de ecuación paramétrica

$$x = R\ \cos t;\ \ y = R\ \sin t. \tag{5}$$

   **Solución**: $I = 0$.

*b*) a lo largo de la curva

$$y = 2x/(1 + x^n) \tag{6}$$

siendo $n \in N$, entre los puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 1)$.

5. Sean los puntos $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ y $C(1, 2)$, y sea la integral curvilínea

$$I = \int_\gamma \frac{(\lambda x - y)(\lambda + 1)dx + (x - \lambda y)(\lambda - 1)dy}{xy}. \tag{7}$$

   *a*) Obtener los valores de $\lambda$ que hacen que $I_{ACB}$ sea igual a $I_{AB}$ ($AC$, $CB$ y $AB$ son segmentos rectilíneos).

   *b*) Ver si alguno de los valores de $\lambda$, obtenidos anteriormente, hacen que la integral sea independiente del camino (siempre que dicho camino no corte a los ejes $x = 0$, $y = 0$).

6. Hallar el área de la superficie lateral del trazo de cilindro circular

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{8}$$

situado entre el plano $xy$ y la superficie $f(x, y) = 1 - y^2$.
**Solución**: $I = 12\pi$.

7. Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$F(x, y, z) = x\,\bar{i} - xy\,\bar{j} + z^2\,\bar{k} \tag{9}$$

para mover una partícula a lo largo de la hélice dada por

$$r(t) = \cos t\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j} + t\,\bar{k}, \tag{10}$$

desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta $(-1, 0, 3\pi)$.
**Solución**: $I = 9\pi^3 - \frac{2}{3}$.

```
F=[x,-x*y,z^2];
R=[cos(t),sin(t),t];
f=subs(F,{x,y,z},{R(1),R(2),R(3)});
%Integrando
p=simplify(dot(f,diff(R,t)));
%Calculamos la integral
I=int(p,t,0,3*pi)
```

8. Consideremos un tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $z = (\frac{b}{a})(a - x - y)$ con $b > a > 0$, de modo que su base es un triángulo isósceles que tiene vértices en el origen y en los puntos $(a, 0, 0)$ y $(0, a, 0)$, y su altura es $b$ (teatro). El escenario es circular y ocupa la región del plano $xy$ dada por $\{(x, y)/x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ en donde $r < \sqrt{3}a/2$. Calcular el área de dicho escenario.
**Solución**: $\frac{b}{a}(\frac{a\pi r}{2} - 2r^2)$

9. El tejado de un edificio tiene una altura sobre el suelo dada por

$$z = 20 + \frac{1}{4}x, \tag{11}$$

y una de las paredes sigue un camino dado por

$$y = x^{3/2}. \tag{12}$$

Hallar el área de la superficie de la pared si $0 \leq x \leq 40$.