UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA
GRADO EN INGENIERÍA CIVIL Y TERRITORIAL

INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA II

Cristina Solares

1. Curvas Planas

1.1 Introducción: Movimiento en dos dimensiones

Supongamos que una partícula se mueve en el plano siguiendo la curva $\{x = 2t, y = 2 + \sin(t)\}$, que se puede expresar como

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

ó

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = 2t\,\mathbf{i} + (2 + \sin(t))\,\mathbf{j} = (2t, 2 + \sin(t))$$

siendo t el tiempo. La función $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \subset R \to R^2$ es una función vectorial con dominio en $[0, 2\pi]$.

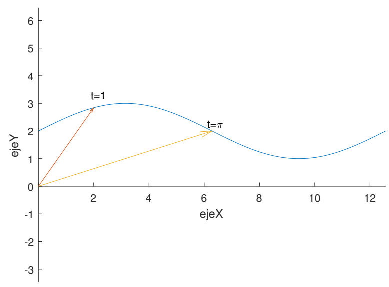

Figura 1.1: Movimiento en dos dimensiones.

La gráfica es la curva trazada por los extremos de los vectores $\mathbf{r}(t)$ (véase la Figura 1.1).

En el instante $t_1 = 1$ el vector de posición de la partícula es $\mathbf{r}_1 = (2, 2 + \sin(1))$ y en el instante $t_2 = \pi$ el vector de posición de la partícula es $\mathbf{r}_2 = (2\pi, 2)$. El cambio de posición (desplazamiento) es la variación del vector de posición

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

■ **Ejemplo 12.9** Hallar el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ a través del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ con $0 \leq z \leq 3$.

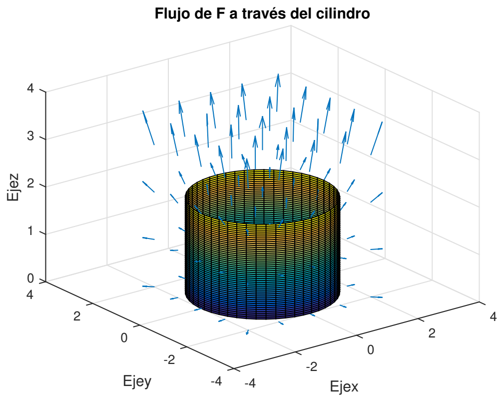

Figura 12.3: Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

```
%Dibujamos el cilindro x^2+y^2=4
syms theta z
fsurf(2*cos(theta),2*sin(theta),z,[0,2*pi,0,2])
xlabel('Eje x');ylabel('Eje y'),zlabel('Eje z');
hold on
%Dibujo el flujo de F a traves del cilindro
x=-2:1:2; y=-2:1:2; z=0:1:3;
[X,Y,Z] = meshgrid(x,y,z);
U=X.^3; V=Y.^3; W=Z.^3;
quiver3(X,Y,Z,U,V,W);
title('Flujo de F a traves del cilindro')
%Calculo el flujo en cilindricas
syms r z theta
3*int(int(int((r^2+z^2)*r,z,0,3),r,0,2),theta,0,2*pi)
```

12.4 Ejercicios

1. Calcular
$$\int\int\int_R z^2\, y\, e^x\, dx\, dy\, dz$$
donde R es el paralelepípedo definido como sigue
$$R = \{(x,y,z) \in R^3 / 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2,\ -1 \leq z \leq 1\}. \tag{12.9}$$
2. Hallar el volumen del tetraedro T limitado por la parte del plano $2x + y + 3z = 6$,en el primer octante.
3. Calcular
$$\int\int\int_S x\, dx\, dy\, dz$$
donde S es el sólido en el primer octante limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $2y + z = 4$.

4. Hallar el centro de masas del cubo unidad, supuesta la densidad en un punto (x,y,z) proporcional al cuadrado de su distancia al origen.
5. Un tetraedro sólido tiene vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y densidad constante $\rho = 6$. Hallar el centro de gravedad.
6. Hallar el volumen de la región sólida limitada inferiormente por el interior de la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
7. Hallar el volumen del sólido en el primer octante que está limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0$).
8. Hallar el volumen de la región sólida Q cortada de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ por el cilindro $r = 2\sin\theta$. Hallarlo en coordenadas cilíndricas.
9. Considerar el sólido limitado lateralmente por el cilindro $r = 2\sin\theta$, por abajo por el plano $z = 0$ y por arriba por el paraboloide $z = 4 - r^2$. Hallar su volumen.
10. Hallar $\int_S \overline{F} \cdot \overline{N}\, dS$ siendo S la superficie del tetraedro formado por el primer octante cortado por el plano $x + y + z = 1$ y $\overline{N}$ es el vector normal unitario hacia afuera.
11. Hallar $\int\int_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{N}\, dS$, siendo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, -5y, 4z)$, y $S = S_1 \cup S_2$ siendo $S_1 = \{(x,y,z) | x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) | z = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
12. Hallar $\int\int_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{N}\, dS$, siendo $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, 0, -z^2)$, y S la superficie formada por las cinco caras superiores del cubo unidad.
13. Hallar el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ a través de la cara lateral del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ con $0 \leq z \leq 2$.