

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA
GRADO EN INGENIERÍA CIVIL Y TERRITORIAL



INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA II



Cristina Solares

1	Curvas Planas	7
1.1	Introducción: Movimiento en dos dimensiones	7
1.2	Definición de curva plana	9
1.3	Tangente y normal a una curva γ	9
1.3.1	Ecuación de la curva en explícitas	10
1.3.2	Ecuación de la curva en implícitas	11
1.3.3	Ecuación de la curva en paramétricas	11
1.4	Orden y clase de una curva plana	11
1.5	Curvatura de una curva plana	12
1.5.1	Expresiones de la curvatura	13
1.5.2	Expresiones del centro y radio de curvatura	14
1.6	Curvas de transición	15
1.6.1	Forma de la curva de transición	16
1.6.2	La Clotoide	16
1.7	Curvas de rodadura	18
1.7.1	Epicloide	18
1.7.2	Cicloide	20
1.7.3	Hipocicloide	20
1.8	Curvas de acuerdo vertical	21
1.9	Envolvente e involutas de una familia de curvas planas	21
1.10	Envolvente de un haz de curvas planas	22
1.10.1	Cálculo de la envolvente de un haz de curvas planas	24
1.11	Envolvente de una familia de curvas planas con dos parámetros vinculados	24
1.12	Evoluta de una curva plana	26

1.13	Asíntotas de curvas planas	27
1.13.1	Tipos de asíntotas	27
1.14	Posición relativa curva-asíntota	28
1.15	Determinación de las asíntotas	30
1.16	Ejercicios	33
2	Curvas alabeadas	35
2.1	Introducción	35
2.2	Movimiento en tres dimensiones	35
2.3	Curva alabeada: expresión analítica	35
2.3.1	Expresión paramétrica	37
2.3.2	Expresión vectorial	37
2.3.3	Expresión implícita	37
2.3.4	Expresión explícita	38
2.3.5	Puntos regulares y singulares	38
2.3.6	Longitud de un arco de curva	38
2.4	Versor y recta tangente. Plano normal.	38
2.4.1	Recta tangente	39
2.4.2	Plano normal	39
2.5	Plano osculador	40
2.6	Vector curvatura. Versor y recta normal principal.	41
2.7	Versor y recta binormal. Plano rectificante.	42
2.8	Torsión y radio de torsión	43
2.8.1	Cálculo de la torsión	44
2.9	Triedro y fórmulas de Frenet	45
2.10	Ejercicios	45
3	Funciones Reales de Varias Variables	49
3.1	Introducción	49
3.1.1	Ejemplo montaña	49
3.1.2	Ejemplo temperatura de una barra de metal	51
3.1.3	Ejemplo altura de olas	54
3.2	Funciones reales de varias variables	54
3.3	Límites de funciones de varias variables	56
3.4	Continuidad de funciones de varias variables	61
3.5	Introducción derivación	64
3.6	Derivadas Parciales	70
3.6.1	Derivadas parciales de orden superior	71
3.7	Diferencial de una función de varias variables	74
3.8	Derivación de funciones compuestas	76
3.9	3	78
3.10	Derivadas sucesivas de funciones compuestas	81
3.11	Diferenciales de orden superior	84

3.12	Derivadas de funciones implícitas	86
3.13	Funciones implícitas definidas por un sistema de ecuaciones	87
3.14	Derivadas direccionales y gradiente	88
3.15	Ejercicios	95
4	Extremos de funciones de varias variables	101
4.1	Extremos relativos de funciones de varias variables	101
4.2	Diferencial de una función	101
4.2.1	Localización de los extremos relativos de una función de dos variables	104
4.3	Ejercicios	115
5	Extremos condicionados	117
5.1	Introducción	117
5.2	Cálculo de extremos condicionados	121
5.2.1	Condiciones de optimalidad: suficiencia y convexidad	122
5.3	Ejercicios	126
6	Superficies	127
6.1	Ecuaciones de superficies	127
6.2	Coordenadas curvilíneas de Gauss	128
6.3	Transformaciones	128
6.4	Tangentes y planos tangentes	129
6.4.1	Expresión analítica del plano tangente	129
6.5	Versor normal a la superficie	131
6.6	Contorno aparente. Cono y cilindro circunscritos.	132
6.7	Generación de superficies	132
6.7.1	Superficies cónicas	133
6.7.2	Superficies cilíndricas	133
6.8	Superficies de revolución	133
6.9	Superficies conoides	135
6.10	Superficies de traslación	135
6.11	Superficies helicoidales	136
6.12	Ejercicios	137
7	Integrales Curvilíneas	139
7.1	Trabajo	139
7.2	Energía Potencial	141
7.3	Definición de integral curvilínea	142
7.4	Aplicación: Masa de un alambre	143
7.5	Integrales curvilíneas de campos vectoriales	144
7.6	Cálculo del trabajo mediante integrales curvilíneas	149
7.7	Campos vectoriales conservativos	151

7.8	Aplicación:Cálculo del área de una pared vertical	159
7.9	Ejercicios	160
8	Integrales Dobles	163
8.1	Introducción	163
8.2	Integración sobre rectángulos	172
8.3	Integrales iteradas	174
8.4	Integrales dobles sobre regiones no rectangulares	175
8.5	Cambio de variable	178
8.6	Aplicaciones de las integrales dobles	178
8.7	Teorema de Green	179
8.8	Propiedades de un campo vectorial: divergencia y rotacional	180
8.9	Forma alternativa del teorema de Green	181
8.10	Ejercicios	182
9	Integrales Dobles: Rotacional y divergencia de un campo en \mathbb{R}^2	185
9.1	Producto escalar	185
9.2	Proyecciones	185
9.3	Teorema de Green	186
9.4	Propiedades de un campo vectorial: divergencia y rotacional	186
9.5	Rotación de un campo en \mathbb{R}^2	188
9.6	La divergencia de un campo vectorial	191
9.7	Forma alternativa del teorema de Green	192
10	Área de una Superficie	193
10.1	Cosenos directores	193
10.2	Área de una superficie	194
10.3	Ejercicios	197
11	Integral de Superficie	199
11.1	Integral de superficie	199
11.2	Teorema de Stokes	201
11.3	Aplicaciones	202
11.4	Ejercicios	205
12	Integrales Triples	207
12.1	Concepto de Integral Triple	207
12.2	Cambio de variable	208
12.3	Teorema de Gauss o de la Divergencia	210
12.4	Ejercicios	211

1. Curvas Planas

1.1 Introducción: Movimiento en dos dimensiones

Supongamos que una partícula se mueve en el plano siguiendo la curva $\{x = 2t, y = 2 + \sin(t)\}$, que se puede expresar como

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j}$$

ó

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = 2t \mathbf{i} + (2 + \sin(t)) \mathbf{j} = (2t, 2 + \sin(t))$$

siendo t el tiempo. La función $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función vectorial con dominio en $[0, 2\pi]$.

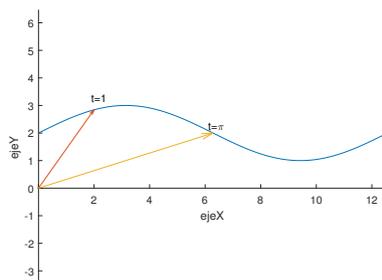


Figura 1.1: Movimiento en dos dimensiones.

La gráfica es la curva trazada por los extremos de los vectores $\mathbf{r}(t)$ (véase la Figura 1.1).

En el instante $t_1 = 1$ el vector de posición de la partícula es $\mathbf{r}_1 = (2, 2 + \sin(1))$ y en el instante $t_2 = \pi$ el vector de posición de la partícula es $\mathbf{r}_2 = (2\pi, 2)$. El cambio de posición (desplazamiento) es la variación del vector de posición

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

■ **Ejemplo 12.9** Hallar el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ a través del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ con $0 \leq z \leq 3$.

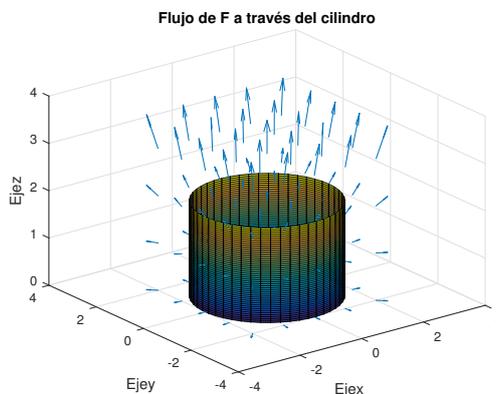


Figura 12.3: Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

```
%Dibujamos el cilindro x^2+y^2=4
syms theta z
fsurf(2*cos(theta),2*sin(theta),z,[0,2*pi,0,2])
xlabel('Eje x');ylabel('Eje y'),zlabel('Eje z');
hold on
%Dibujo el flujo de F a traves del cilindro
x=-2:1:2; y=-2:1:2; z=0:1:3;
[X,Y,Z] = meshgrid(x,y,z);
U=X.^3; V=Y.^3; W=Z.^3;
quiver3(X,Y,Z,U,V,W);
title('Flujo de F a traves del cilindro')
%Calculo el flujo en cilindricas
syms r z theta
3*int(int(int((r^2+z^2)*r,z,0,3),r,0,2),theta,0,2*pi)
```

12.4 Ejercicios

1. Calcular

$$\int \int \int_R z^2 y e^x dx dy dz$$

donde R es el paralelepípedo definido como sigue

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 1\}. \quad (12.9)$$

2. Hallar el volumen del tetraedro T limitado por la parte del plano $2x + y + 3z = 6$, en el primer octante.
3. Calcular

$$\int \int \int_S x dx dy dz$$

donde S es el sólido en el primer octante limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $2y + z = 4$.

4. Hallar el centro de masas del cubo unidad, supuesta la densidad en un punto (x, y, z) proporcional al cuadrado de su distancia al origen.
5. Un tetraedro sólido tiene vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y densidad constante $\rho = 6$. Hallar el centro de gravedad.
6. Hallar el volumen de la región sólida limitada inferiormente por el interior de la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
7. Hallar el volumen del sólido en el primer octante que está limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0$).
8. Hallar el volumen de la región sólida Q cortada de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ por el cilindro $r = 2 \sin \theta$. Hallarlo en coordenadas cilíndricas.
9. Considerar el sólido limitado lateralmente por el cilindro $r = 2 \sin \theta$, por abajo por el plano $z = 0$ y por arriba por el paraboloides $z = 4 - r^2$. Hallar su volumen.
10. Hallar $\int_S \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{N}} dS$ siendo S la superficie del tetraedro formado por el primer octante cortado por el plano $x + y + z = 1$ y $\bar{\mathbf{N}}$ es el vector normal unitario hacia afuera.
11. Hallar $\int \int_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS$, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -5y, 4z)$, y $S = S_1 \cup S_2$ siendo $S_1 = \{(x, y, z) | x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) | z = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
12. Hallar $\int \int_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS$, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, 0, -z^2)$, y S la superficie formada por las cinco caras superiores del cubo unidad.
13. Hallar el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ a través de la cara lateral del cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ con $0 \leq z \leq 2$.