

**UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA**  
**GRADO EN INGENIERÍA CIVIL Y TERRITORIAL**



**INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA II**



Cristina Solares



<b>1</b>	<b>Curvas Planas</b> .....	<b>7</b>
<b>1.1</b>	<b>Introducción: Movimiento en dos dimensiones</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Definición de curva plana</b>	<b>9</b>
<b>1.3</b>	<b>Tangente y normal a una curva <math>\gamma</math></b>	<b>9</b>
1.3.1	Ecuación de la curva en explícitas .....	10
1.3.2	Ecuación de la curva en implícitas .....	11
1.3.3	Ecuación de la curva en paramétricas .....	11
<b>1.4</b>	<b>Orden y clase de una curva plana</b>	<b>11</b>
<b>1.5</b>	<b>Curvatura de una curva plana</b>	<b>12</b>
1.5.1	Expresiones de la curvatura .....	13
1.5.2	Expresiones del centro y radio de curvatura .....	14
<b>1.6</b>	<b>Curvas de transición</b>	<b>15</b>
1.6.1	Forma de la curva de transición .....	16
1.6.2	La Clotoide .....	16
<b>1.7</b>	<b>Curvas de rodadura</b>	<b>18</b>
1.7.1	Epicicloide .....	18
1.7.2	Cicloide .....	20
1.7.3	Hipocicloide .....	20
<b>1.8</b>	<b>Curvas de acuerdo vertical</b>	<b>21</b>
<b>1.9</b>	<b>Envolvente e involutas de una familia de curvas planas</b>	<b>21</b>
<b>1.10</b>	<b>Envolvente de un haz de curvas planas</b>	<b>22</b>
1.10.1	Cálculo de la envolvente de un haz de curvas planas .....	24
<b>1.11</b>	<b>Envolvente de una familia de curvas planas con dos parámetros vinculados</b>	<b>24</b>
<b>1.12</b>	<b>Evoluta de una curva plana</b>	<b>26</b>

<b>1.13</b>	<b>Asíntotas de curvas planas</b>	<b>27</b>
1.13.1	Tipos de asíntotas	27
<b>1.14</b>	<b>Posición relativa curva-asíntota</b>	<b>28</b>
<b>1.15</b>	<b>Determinación de las asíntotas</b>	<b>30</b>
<b>1.16</b>	<b>Ejercicios</b>	<b>33</b>
<b>2</b>	<b>Curvas alabeadas</b>	<b>35</b>
<b>2.1</b>	<b>Introducción</b>	<b>35</b>
<b>2.2</b>	<b>Movimiento en tres dimensiones</b>	<b>35</b>
<b>2.3</b>	<b>Curva alabeada: expresión analítica</b>	<b>35</b>
2.3.1	Expresión paramétrica	37
2.3.2	Expresión vectorial	37
2.3.3	Expresión implícita	37
2.3.4	Expresión explícita	38
2.3.5	Puntos regulares y singulares	38
2.3.6	Longitud de un arco de curva	38
<b>2.4</b>	<b>Versor y recta tangente. Plano normal.</b>	<b>38</b>
2.4.1	Recta tangente	39
2.4.2	Plano normal	39
<b>2.5</b>	<b>Plano osculador</b>	<b>40</b>
<b>2.6</b>	<b>Vector curvatura. Versor y recta normal principal.</b>	<b>41</b>
<b>2.7</b>	<b>Versor y recta binormal. Plano rectificante.</b>	<b>42</b>
<b>2.8</b>	<b>Torsión y radio de torsión</b>	<b>43</b>
2.8.1	Cálculo de la torsión	44
<b>2.9</b>	<b>Triedro y fórmulas de Frenet</b>	<b>45</b>
<b>2.10</b>	<b>Ejercicios</b>	<b>45</b>
<b>3</b>	<b>Funciones Reales de Varias Variables</b>	<b>49</b>
<b>3.1</b>	<b>Introducción</b>	<b>49</b>
3.1.1	Ejemplo montaña	49
3.1.2	Ejemplo temperatura de una barra de metal	51
3.1.3	Ejemplo altura de olas	54
<b>3.2</b>	<b>Funciones reales de varias variables</b>	<b>54</b>
<b>3.3</b>	<b>Límites de funciones de varias variables</b>	<b>56</b>
<b>3.4</b>	<b>Continuidad de funciones de varias variables</b>	<b>61</b>
<b>3.5</b>	<b>Introducción derivación</b>	<b>64</b>
<b>3.6</b>	<b>Derivadas Parciales</b>	<b>70</b>
3.6.1	Derivadas parciales de orden superior	71
<b>3.7</b>	<b>Diferencial de una función de varias variables</b>	<b>74</b>
<b>3.8</b>	<b>Derivación de funciones compuestas</b>	<b>76</b>
<b>3.9</b>	<b>3</b>	<b>78</b>
<b>3.10</b>	<b>Derivadas sucesivas de funciones compuestas</b>	<b>81</b>
<b>3.11</b>	<b>Diferenciales de orden superior</b>	<b>84</b>

3.12	Derivadas de funciones implícitas	86
3.13	Funciones implícitas definidas por un sistema de ecuaciones	87
3.14	Derivadas direccionales y gradiente	88
3.15	Ejercicios	95
<b>4</b>	<b>Extremos de funciones de varias variables</b>	<b>101</b>
4.1	Extremos relativos de funciones de varias variables	101
4.2	Diferencial de una función	101
4.2.1	Localización de los extremos relativos de una función de dos variables . . . .	104
4.3	Ejercicios	115
<b>5</b>	<b>Extremos condicionados</b>	<b>117</b>
5.1	Introducción	117
5.2	Cálculo de extremos condicionados	121
5.2.1	Condiciones de optimalidad: suficiencia y convexidad . . . . .	122
5.3	Ejercicios	126
<b>6</b>	<b>Superficies</b>	<b>127</b>
6.1	Ecuaciones de superficies	127
6.2	Coordenadas curvilíneas de Gauss	128
6.3	Transformaciones	128
6.4	Tangentes y planos tangentes	129
6.4.1	Expresión analítica del plano tangente . . . . .	129
6.5	Versor normal a la superficie	131
6.6	Contorno aparente. Cono y cilindro circunscritos.	132
6.7	Generación de superficies	132
6.7.1	Superficies cónicas . . . . .	133
6.7.2	Superficies cilíndricas . . . . .	133
6.8	Superficies de revolución	133
6.9	Superficies conoides	135
6.10	Superficies de traslación	135
6.11	Superficies helicoidales	136
6.12	Ejercicios	137
<b>7</b>	<b>Integrales Curvilíneas</b>	<b>139</b>
7.1	Trabajo	139
7.2	Energía Potencial	141
7.3	Definición de integral curvilínea	142
7.4	Aplicación: Masa de un alambre	143
7.5	Integrales curvilíneas de campos vectoriales	144
7.6	Cálculo del trabajo mediante integrales curvilíneas	149
7.7	Campos vectoriales conservativos	151

7.8	Aplicación: Cálculo del área de una pared vertical	159
7.9	Ejercicios	160
<b>8</b>	<b>Integrales Dobles</b> .....	<b>163</b>
8.1	Introducción	163
8.2	Integración sobre rectángulos	172
8.3	Integrales iteradas	174
8.4	Integrales dobles sobre regiones no rectangulares	175
8.5	Cambio de variable	178
8.6	Aplicaciones de las integrales dobles	178
8.7	Teorema de Green	179
8.8	Propiedades de un campo vectorial: divergencia y rotacional	180
8.9	Forma alternativa del teorema de Green	181
8.10	Ejercicios	182
<b>9</b>	<b>Integrales Dobles: Rotacional y divergencia de un campo en <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>185</b>
9.1	Producto escalar	185
9.2	Proyecciones	185
9.3	Teorema de Green	186
9.4	Propiedades de un campo vectorial: divergencia y rotacional	186
9.5	Rotación de un campo en $\mathbb{R}^2$	188
9.6	La divergencia de un campo vectorial	191
9.7	Forma alternativa del teorema de Green	192
<b>10</b>	<b>Área de una Superficie</b> .....	<b>193</b>
10.1	Cosenos directores	193
10.2	Área de una superficie	194
10.3	Ejercicios	197
<b>11</b>	<b>Integral de Superficie</b> .....	<b>199</b>
11.1	Integral de superficie	199
11.2	Teorema de Stokes	201
11.3	Aplicaciones	202
11.4	Ejercicios	205
<b>12</b>	<b>Integrales Triples</b> .....	<b>207</b>
12.1	Concepto de Integral Triple	207
12.2	Cambio de variable	208
12.3	Teorema de Gauss o de la Divergencia	210
12.4	Ejercicios	211

# 1. Curvas Planas

## 1.1 Introducción: Movimiento en dos dimensiones

Supongamos que una partícula se mueve en el plano siguiendo la curva  $\{x = 2t, y = 2 + \sin(t)\}$ , que se puede expresar como

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j}$$

ó

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = 2t \mathbf{i} + (2 + \sin(t)) \mathbf{j} = (2t, 2 + \sin(t))$$

siendo  $t$  el tiempo. La función  $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una función vectorial con dominio en  $[0, 2\pi]$ .

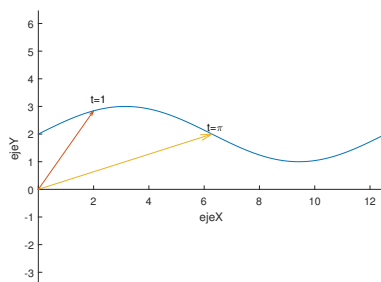


Figura 1.1: Movimiento en dos dimensiones.

La gráfica es la curva trazada por los extremos de los vectores  $\mathbf{r}(t)$  (véase la Figura 1.1).

En el instante  $t_1 = 1$  el vector de posición de la partícula es  $\mathbf{r}_1 = (2, 2 + \sin(1))$  y en el instante  $t_2 = \pi$  el vector de posición de la partícula es  $\mathbf{r}_2 = (2\pi, 2)$ . El cambio de posición (desplazamiento) es la variación del vector de posición

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

■ **Ejemplo 12.9** Hallar el flujo del campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$  a través del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 4$  con  $0 \leq z \leq 3$ .

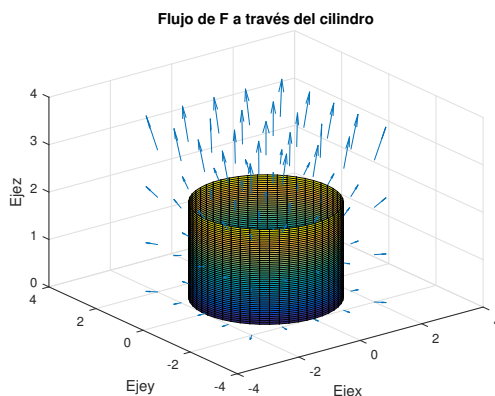


Figura 12.3: Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

```
%Dibujamos el cilindro x^2+y^2=4
syms theta z
fsurf(2*cos(theta),2*sin(theta),z,[0,2*pi,0,2])
xlabel('Eje x');ylabel('Eje y'),zlabel('Eje z');
hold on
%Dibujo el flujo de F a traves del cilindro
x=-2:1:2; y=-2:1:2; z=0:1:3;
[X,Y,Z] = meshgrid(x,y,z);
U=X.^3; V=Y.^3; W=Z.^3;
quiver3(X,Y,Z,U,V,W);
title('Flujo de F a traves del cilindro')
%Calculo el flujo en cilindricas
syms r z theta
3*int(int(int((r^2+z^2)*r,z,0,3),r,0,2),theta,0,2*pi)
```

## 12.4 Ejercicios

1. Calcular

$$\int \int \int_R z^2 y e^x dx dy dz$$

donde  $R$  es el paralelepípedo definido como sigue

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 1\}. \quad (12.9)$$

2. Hallar el volumen del tetraedro  $T$  limitado por la parte del plano  $2x + y + 3z = 6$ , en el primer octante.  
3. Calcular

$$\int \int \int_S x dx dy dz$$

donde  $S$  es el sólido en el primer octante limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  y el plano  $2y + z = 4$ .



4. Hallar el centro de masas del cubo unidad, supuesta la densidad en un punto  $(x, y, z)$  proporcional al cuadrado de su distancia al origen.
5. Un tetraedro sólido tiene vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  y densidad constante  $\rho = 6$ . Hallar el centro de gravedad.
6. Hallar el volumen de la región sólida limitada inferiormente por el interior de la hoja superior del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  y superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .
7. Hallar el volumen del sólido en el primer octante que está limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$ , el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y el plano  $z = 0$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ).
8. Hallar el volumen de la región sólida  $Q$  cortada de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  por el cilindro  $r = 2 \sin \theta$ . Hallarlo en coordenadas cilíndricas.
9. Considerar el sólido limitado lateralmente por el cilindro  $r = 2 \sin \theta$ , por abajo por el plano  $z = 0$  y por arriba por el paraboloides  $z = 4 - r^2$ . Hallar su volumen.
10. Hallar  $\int_S \bar{F} \cdot \bar{N} dS$  siendo  $S$  la superficie del tetraedro formado por el primer octante cortado por el plano  $x + y + z = 1$  y  $\bar{N}$  es el vector normal unitario hacia afuera.
11. Hallar  $\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ , siendo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -5y, 4z)$ , y  $S = S_1 \cup S_2$  siendo  $S_1 = \{(x, y, z) | x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  y  $S_2 = \{(x, y, z) | z = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .
12. Hallar  $\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ , siendo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, 0, -z^2)$ , y  $S$  la superficie formada por las cinco caras superiores del cubo unidad.
13. Hallar el flujo del campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$  a través de la cara lateral del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 4$  con  $0 \leq z \leq 2$ .