

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA
GRADO EN MATEMÁTICAS



CÁLCULO I



Cristina Solares

1	Conceptos previos	11
1.1	Conceptos básicos de lógica y demostraciones	11
1.1.1	Demostraciones	11
1.2	Conceptos básicos de teoría de conjuntos	12
1.2.1	Operaciones con conjuntos	13
1.3	Relaciones binarias	14
1.3.1	Relaciones de equivalencia	14
1.3.2	Relación de orden	15
1.4	Concepto de Función	17
2	Los Números Reales.	21
2.1	Introducción	21
2.2	Estructura de Cuerpo	21
2.3	El Conjunto de los Números Naturales \mathbb{N}	22
2.3.1	Método de Inducción Matemática	22
2.3.2	Operaciones algebraicas en \mathbb{N}	22
2.4	El Conjunto de los Números Enteros \mathbb{Z}	23
2.4.1	Operaciones algebraicas en \mathbb{Z}	24
2.5	El Conjunto de los Números Racionales \mathbb{Q}	24
2.5.1	Operaciones algebraicas en \mathbb{Q}	25
2.6	Los Números Reales \mathbb{R}	26
2.6.1	Axiomática de los números reales	26
2.6.2	Propiedad arquimediana	27
2.6.3	Densidad de \mathbb{Q}	27
2.6.4	Representación Geométrica de los Números Reales	27

2.7	Los Números Irracionales	27
2.8	Intervalos en \mathbb{R}	28
2.8.1	Intervalos acotados	28
2.8.2	Intervalos no acotados	29
2.9	Valor Absoluto de un Número Real.	29
2.10	Cardinalidad de conjuntos	31
2.11	Entorno de un Número Real	31
2.12	Conjuntos Abiertos y Conjuntos Cerrados en \mathbb{R}	32
2.13	Cotas y Extremos de un Subconjunto de \mathbb{R}	33
2.14	Inecuaciones	34
2.14.1	Desigualdades con factores	34
2.14.2	Desigualdades con valor absoluto	34
	Ejercicios	35
3	Funciones reales de variable real	37
3.1	Introducción	37
3.2	Funciones Reales de Variable Real	37
3.2.1	Operaciones con funciones	40
3.2.2	Funciones positivas y negativas	42
3.2.3	Funciones acotadas	44
3.2.4	Funciones monótonas	46
3.2.5	Funciones pares e impares	48
3.2.6	Función periódica	49
3.2.7	Composición de funciones	50
3.2.8	Función inversa	50
	Ejercicios	55
4	Funciones Elementales (Parte I)	59
4.1	Función potencial	59
4.1.1	Función potencial entera	59
4.1.2	Función potencial con exponente entero negativo	60
4.1.3	Función potencial con exponente racional $1/n$, n entero positivo	61
4.2	Funciones polinómicas	61
4.3	Funciones racionales	64
	Ejercicios	66
5	Funciones Elementales (parte II)	67
5.1	Función Exponencial	67
5.1.1	Introducción funciones exponenciales	67
5.1.2	La Función Exponencial	67
5.1.3	Propiedades de las funciones exponenciales	72
5.1.4	El Número e	72
5.2	Función Logarítmica	74
5.2.1	Propiedades de la Función Logarítmica	77

	5
5.3 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	78
Ejercicios	80
6 Funciones Elementales (parte III).	83
6.1 Funciones Circulares	83
6.1.1 Introducción	83
6.1.2 Las funciones seno y coseno	83
6.1.3 La función tangente	85
6.1.4 Funciones cotangente, secante y cosecante	86
6.2 Funciones Circulares Inversas	89
6.2.1 Función arcoseno	89
6.2.2 Función arcocoseno	90
6.2.3 Función arcotangente	91
6.3 Funciones Hiperbólicas	91
6.4 Funciones hiperbólicas inversas	94
Ejercicios	97
7 Sucesiones de Números Reales	99
7.1 Introducción	99
7.2 Sucesión de Números Reales	99
7.3 Operaciones con sucesiones	100
7.4 Sucesiones Monótonas y Acotadas	101
7.5 Límite de una Sucesión de Números Reales	102
7.6 Propiedades de las Sucesiones Convergentes	104
7.7 Propiedades de las Sucesiones Divergentes	105
7.8 Propiedades de los Infinitésimos e Infinitos	105
7.9 Casos Indeterminados	106
7.10 Límite de una Expresión Racional	106
7.11 Límite de una Expresión Irracional	108
7.12 Criterios de Convergencia	108
7.12.1 Criterio de Convergencia de Cauchy	108
7.12.2 Criterio de Stolz	108
7.12.3 Límite de la media aritmética	109
7.12.4 Límite de la Media Geométrica	109
7.12.5 Comparación de los criterios del cociente y la raíz.	110
7.12.6 Otras propiedades de los límites de sucesiones	110
7.13 Sucesiones equivalentes	111
7.13.1 Límites de la forma ∞^0 y 0^0	112
7.13.2 Límites de la forma 1^∞	113
7.14 Sucesiones recurrentes	113
Ejercicios	115

8	Límite de Funciones	119
8.1	Límites de Funciones	119
8.2	Límite finito en un punto	120
8.2.1	Propiedades de los límites	123
8.2.2	Límites laterales	124
8.2.3	Límite finito cuando la variable tiende a infinito	126
8.3	Funciones Divergentes	128
8.4	Indeterminaciones	131
8.5	Equivalencias entre infinitésimos e infinitos	132
8.6	Asíntotas	133
	Ejercicios	136
9	Continuidad de Funciones	141
9.1	Introducción	141
9.2	Función continua en un punto	142
9.3	Discontinuidades	144
9.3.1	Prolongación por continuidad	148
9.4	Propiedades de las funciones continuas	149
9.5	Continuidad lateral	150
9.6	Funciones continuas en un conjunto	151
9.6.1	Propiedades de la continuidad en un intervalo	152
	Ejercicios	154
10	Cálculo Diferencial.	157
10.1	Movimiento a lo largo de una línea recta.	157
10.1.1	Cociente incremental.	158
10.1.2	Derivada	159
10.2	Derivada de una función en un punto	160
10.3	Derivada de una función en un conjunto	162
10.4	Interpretación Geométrica	164
10.5	Derivadas laterales	166
10.6	Derivadas de orden superior	168
10.7	Tabla de funciones derivada	171
10.8	Teoremas de derivación	172
10.9	Aplicación al cálculo de límites	179
10.10	Diferencial en un punto	180
10.11	Desarrollo de Taylor	181
10.12	Extremos absolutos	184
10.13	Convexidad y concavidad	185
10.14	Extremos relativos	188
10.14.1	Representación gráfica de una función	191
	Ejercicios	194

11	Integral Definida	199
11.1	Movimiento a lo largo de una línea recta	199
11.2	Particiones de un intervalo compacto	200
11.3	Sumas inferiores y superiores	202
11.4	La integral como límite de sumas	204
11.5	Sumas de Riemann. Integral como límite de sumas de Riemann	206
11.6	Ejemplos de funciones que son integrables	207
11.7	Propiedades de la Integral Definida	208
11.8	Teorema fundamental del cálculo	211
11.9	Regla de Barrow	211
11.10	Integración por Cambio de Variable	213
11.11	Integración por Partes	213
11.12	Cálculo de Áreas Planas	213
11.13	Ejercicios	216
12	Cálculo de Primitivas	221
12.1	Primitiva e Integral Indefinida	221
12.2	Propiedades de las integrales indefinidas	221
12.3	Integración Inmediata	222
12.3.1	Tipo Potencial	222
12.3.2	Tipo Exponencial	222
12.3.3	Tipo Logarítmico	222
12.3.4	Tipo seno, coseno y tangente	223
12.3.5	Tipo arco seno, arco coseno y arco tangente	223
12.3.6	Tipo argumento seno, coseno y tangente hiperbólico	224
12.3.7	Tipo seno, coseno y tangente hiperbólico	224
12.4	Integración por Cambio de Variable	225
12.5	Integración por Partes	226
12.6	Integración por reducción	227
	Ejercicios	228
13	Integración de Funciones Racionales	231
13.1	Introducción	231
13.2	El Numerador $P(x)$ es de Grado Igual o Superior al del Denominador $Q(x)$	231
13.3	Descomposición de $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en Fracciones Simples	232
13.3.1	Unicidad de la Descomposición	232
13.3.2	Determinación de los Coeficientes	232
13.4	Integración en el Caso en que no Existan Raíces Imaginarias Múltiples	233
13.5	Integración en el Caso de Raíces Imaginarias Múltiples	235
13.6	Método de Hermite	237
	Ejercicios	239

14	Integración de Funciones Irracionales	241
14.0.1	Integrales del tipo $\int R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{u}{v}}) dx$,	241
14.0.2	Integrales tipo $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{u}{v}}\right) dx$,	242
14.0.3	Integrales binomias	243
14.0.4	Integrales tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ por racionalización	244
	Ejercicios	246
15	Integración de Funciones Trascendentes	249
15.1	Introducción	249
15.2	Integrales de Tipo Racional en Funciones Exponenciales	249
15.3	Integrales de Funciones Trigonómicas	250
15.3.1	Integrales del tipo $\int R(\sin x, \cos x) dx$, donde R es racional	250
15.3.2	Casos particulares sencillos	251
15.3.3	Integrales tipo $\int \sin^m x \cos^n x dx$ con $m, n \in \mathbb{Z}$	252
15.3.4	Resolución con cambio de variable	252
15.3.5	Resolución por reducción	252
15.3.6	Integrales $\int \sin^2 x dx$ y $\int \cos^2 x dx$	254
15.3.7	Integrales tipo $\int \sin^m x, \int \cos^n x dx$, con $m, n \in \mathbb{N}$	255
15.3.8	Integración de productos de senos y cosenos	255
15.3.9	Integrales tipo $\int P(x, a^x, \sin mx, \dots, \cos px, \dots) dx$, donde P es un polinomio	257
15.4	Integración de Funciones Hiperbólicas	258
15.4.1	Integrales del tipo $\int R(\sinh x, \cosh x) dx$	258
15.4.2	Casos particulares sencillos	259
15.4.3	Aplicación a la integración de irracionales	260
15.5	Aplicación al cálculo de funciones irracionales	261
	Ejercicios	262
16	Integrales Impropias	265
16.1	Generalización del Concepto de Integral para Intervalos Infinitos	265
16.2	Generalización del Concepto de Integral para funciones no acotadas	266
16.3	Ejercicios	267
17	Aplicaciones de la Integral	269
17.1	Cálculo de Áreas Planas	269
17.2	Longitud de una catenaria	271
17.3	Rectificación de Curvas Planas	272
17.4	Longitud de una catenaria	273
17.5	Rectificación de Curvas Planas	273
17.6	Longitud del Arco Gateway	274

17.7	Volumen de un silo	274
17.8	Volumen de un Cuerpo de Revolución (discos)	275
17.9	Volumen de un silo	277
17.10	Volumen de un Cuerpo de Revolución (discos)	277
17.11	Volumen de un depósito de agua	277
17.12	Área de un silo	278
17.13	Área de una Superficie de Revolución	279
17.14	Área de un silo	281
17.15	Área de un silo	281
17.16	Área de un depósito de agua	282
	Ejercicios	283
18	Series de Números Reales	293
18.1	Introducción	293
18.2	Carácter de una serie	293
18.2.1	Propiedades de las series	295
18.3	Series geométricas	296
18.4	Criterio de divergencia	296
18.5	Series telescópicas	297
18.6	Series de términos positivos	297
18.7	p -Series	298
18.8	Comparación de series	298
18.9	Criterios del cociente, la raíz y Raabe	300
18.10	Series alternadas, convergencia condicional y absoluta	302
	Ejercicios	305

1. Conceptos previos

1.1 Conceptos básicos de lógica y demostraciones

En las Tablas 1.1 y 1.2, se muestra el significado de las implicaciones y los cuantificadores lógicos.

Implicaciones	
$A \Rightarrow B$ A y B proposiciones	Suponiendo que A es cierto, entonces B es cierto A implica B no B implica no A A es una condición suficiente para B B es una condición necesaria para A
Ejemplo Si $a, b \in \mathbb{Z}$ son pares $\Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$ es par En el ejemplo anterior la implicación \Leftarrow no es cierta. Un contraejemplo es considerar $a = 1$ y $b = 3$.	
$A \Leftrightarrow B$ A y B proposiciones	A es cierto si y solo si B es cierto A es condición necesaria y suficiente para B B es condición necesaria y suficiente para A
Ejemplo Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $ a \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$	

Tabla 1.1: Implicaciones.

1.1.1 Demostraciones

- Para demostrar $A \Leftrightarrow B$ tenemos que demostrar $A \Rightarrow B$ y $B \Rightarrow A$.
- Reducción al absurdo: Si queremos demostrar que una proposición es cierta, suponemos que no lo es y mediante razonamientos lógicos llegamos a una contradicción. Vamos a

```
datosy=subs(sn,n,datosx);% Calculamos sn en todos los valores de n
plot(datosx,datosy,'or')% Dibujamos la sucesión sn.
%Dibujamos el término general de la serie
figure(2)
datosx=1:1:100;% Definimos los valores enteros de k
datosy=subs(ak,k,datosx);% Calculamos ak en todos los valores de k
plot(datosx,datosy,'or')% Dibujamos la sucesión ak.
```

Bibliografía utilizada:

1. A. García y otros . Cálculo I. Teoría y problemas de análisis matemático en una variable. Ed. CLAGSA. (1998).
2. J. de Burgos. Cálculo infinitesimal de una variable. Ed. McGraw-Hill. (2007).