Geometría Analítica

Temas 4 y 5: Espacio Afín y Euclídeo Tridimensional

Cristina Solares

Universidad de Castilla-La Mancha

14 de octubre de 2024

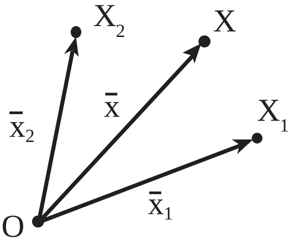
En Geometría analítica se manejan simultáneamente y casi sin diferenciar dos conjuntos diferentes: uno de puntos, que llamaremos E_3 y otro de vectores (el espacio vectorial de los vectores libres del plano), que denominaremos V_3.
Ambos conjuntos están relacionados mediante la aplicación

$$f : E_3 \times E_3 \to V_3$$

definida mediante:

$$f(O, X) = \overline{OX}, \tag{1}$$

es decir, que a cada pareja de puntos le hacemos corresponder el vector que los une en el sentido primero-segundo



```
function dibujaPunto3D(punto)
    plot3(punto(1), punto(2),punto(3),'.b','MarkerSize',10);
    grid on;
    axis equal;
    xlabel('Ejex');
    ylabel('Ejey');
    zlabel('Ejez');
end

%Ejemplo 1 (Dibujo punto con Matlab)
dibujaPunto3D([4,3,-1])
hold on
dibujaPunto3D([-1,2,-3])
```

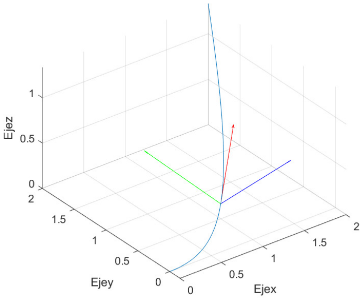
```
function dibujaVector3D(posicion,vector,color)
    quiver3(posicion(1), posicion(2),posicion(3),vector(1),vector(2),vector(3),
    grid on;
    axis equal;
    xlabel('Ejex');
    ylabel('Ejey');
    zlabel('Ejez');
end

%Ejemplo 2 (Dibujo vector con Matlab)
dibujaVector3D([4,3,-1],[-5,-1,-2],'b')
```

```
%Ejemplo 3 (Suma de vectores)
dibujaVector3D([0,0,0],[2,1,-3],'b')
hold on
dibujaVector3D([0,0,0],[1,-2,-1],'r')
dibujaVector3D([0,0,0],[2,1,-3]+[1,-2,-1],'g')
legend('u','v','u+v')
grid on
%Ejemplo 4 (Diferencia de vectores)
dibujaVector3D([0,0,0],[2,1,-3],'b')
hold on
dibujaVector3D([0,0,0],[1,-2,-1],'r')
dibujaVector3D([0,0,0],[2,1,-3]-[1,-2,-1],'g')
legend('u','v','u-v')
grid on
%Ejemplo 5 (Producto de un vector por un escalar)
dibujaVector3D([0,0,0],[2,1,-3],'b')
hold on
dibujaVector3D([0,0,0],2*[2,1,-3],'g--')
legend('u','2u')
grid on
```

```
%Ejemplo 6(Producto de un vector por un escalar)

dibujaVector3D([0,0,0],[2,1,-3],'b')
hold on
dibujaVector3D([0,0,0],(-2)*[2,1,-3],'g--')
legend('u','-2u')
grid on

%Ejemplo 7(Producto de un vector por un escalar)

dibujaVector3D([0,0,0],[2,1,-3],'b')
hold on
dibujaVector3D([0,0,0],(1/2)*[2,1,-3],'g--')
legend('u','-2u')
grid on
```

Dibuja la curva $\{x = u, y = u^2/2, z = u^3/6\}$ y tres vectores situados en el punto de la curva que se obtiene para $u = 1$.

```
  syms u real
curva=[u u^2/2 u^3/6];
fplot3(curva(1),curva(2),curva(3),[0,2]);
hold on
dibujaVector3D([1, 1/2, 1/6],[2/3, 2/3, 1/3],'r')
dibujaVector3D([1, 1/2, 1/6],[-2/3, 1/3, 2/3],'g')
dibujaVector3D([1, 1/2, 1/6],[1/3, -2/3, 2/3],'b')
```



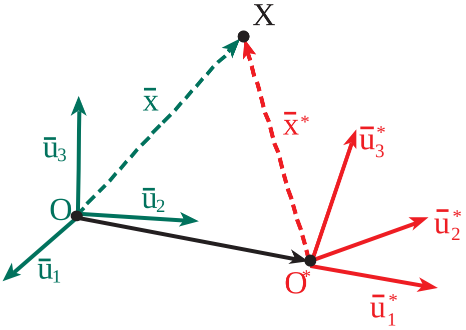
Definición (4.1 Sistema de Referencia en E_3)

El conjunto $\{O; \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\}$, constituido por un punto O, denominado origen y una base $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ de V_3, se denomina sistema de referencia en E_3.

Todo sistema de referencia en E_3 permite identificar cada punto de E_3 mediante sus correspondientes coordenadas.

Definición (4.2 Coordenadas de un punto de E_3)

La aplicación f_2 permite asociar a cada punto X de E_3 un vector $\overline{x}$ de V_3. Se llaman coordenadas de un punto $X \in E_3$ a las componente de su vector asociado $\overline{x} \in V_3$ respecto de la base $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$.



4.2.1 Cambio de Sistema de Referencia

Sean dos sistemas de referencia $\{O; \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\}$ y $\left\{O^*; \{\overline{u}_1^*, \overline{u}_2^*, \overline{u}_3^*\}\right\}$, donde (o_1, o_2, o_3) son las coordenadas de O^* respecto del primer sistema de referencia, y $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ y $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ son las componentes de los vectores $\overline{u}_1^*$, $\overline{u}_2^*$ y $\overline{u}_3^*$ respecto de la base $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$, respectivamente. Entonces, si (x_1, x_2, x_3) y (x_1^*, x_2^*, x_3^*) son las coordenadas del punto X, respecto de los sistemas de referencia 1 y 2, respectivamente, puesto que $\overline{OX} = \overline{OO^*} + \overline{O^*X}$se tiene:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & o_1 + x_1^*\alpha_1 + x_2^*\beta_1 + x_3^*\gamma_1 \\ x_2 & = & o_2 + x_1^*\alpha_2 + x_2^*\beta_2 + x_3^*\gamma_2 \\ x_3 & = & o_3 + x_1^*\alpha_3 + x_2^*\beta_3 + x_3^*\gamma_3, \end{array} \tag{2}$$

que en forma matricial puede escribirse:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & o_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & o_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & o_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

```
%Obtiene las coordenadas de un punto en un nuevo sistema de referencia.

function coordenadaspunto=cambiosistema(alpha1,alpha2,alpha3,beta1, ...
    beta2,beta3,o1,o2,o3,punto)
matriz=[alpha1 beta1 gamma1 o1;alpha2 beta2 gamma2 o2; ...
     alpha3 beta3 gamma3 o3;0 0 0 1];
coordenadaspunto=inv(matriz)*[punto(1) punto(2) punto(3) 1]';
end
```

Considérese el sistema de referencia $R = \{O; \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\}$. Un plano puede quedar determinado por tres puntos no alineados.
Sean estos P, Q y R, de coordenadas (p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3) y (r_1, r_2, r_3) respectivamente en el sistema de referencia dado y sean $\overline{p}$, $\overline{q}$ y $\overline{r}$, sus vectores de posición relativos al mismo.

Ecuación vectorial

Sea X un punto de dicho plano de coordenadas (x_1, x_2, x_3), y sea $\overline{x}$ su vector de posición,

$$\boxed{\overline{x} = \overline{p} + \lambda\,(\overline{q} - \overline{p}) + \mu\,(\overline{r} - \overline{p})} \qquad (4)$$

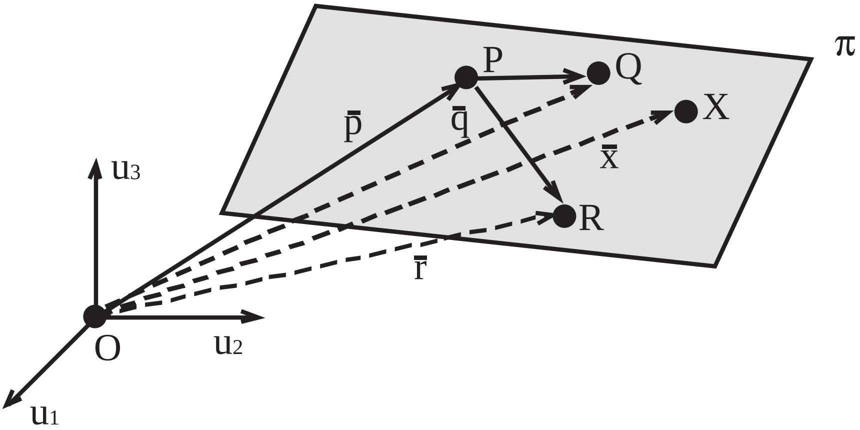
que es la condición que deben cumplir los vectores de posición de todos los puntos del plano determinado por los puntos P, Q y R. Los vectores $\overline{q} - \overline{p}$ y $\overline{r} - \overline{p}$ definen la dirección del plano.

Ecuaciones paramétricas

La ecuación (4) es equivalente a las tres ecuaciones escalares siguientes, llamadas ecuaciones paramétricas del plano

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x_1 = p_1 + \lambda(q_1 - p_1) + \mu(r_1 - p_1) \\ x_2 = p_2 + \lambda(q_2 - p_2) + \mu(r_2 - p_2) \\ x_3 = p_3 + \lambda(q_3 - p_3) + \mu(r_3 - p_3). \end{array}\right\}} \qquad (5)$$

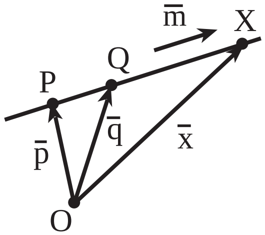
Para hallar puntos del plano determinado por las ecuaciones paramétricas (5) bastaría con dar valores reales a los parémetros λ y μ.


π
P
Q
X
R
p̄
q̄
x̄
r̄
u3
u2
u1
O

Se ha visto que para que los puntos P, Q, R y S sean coplanarios, o lo que es lo mismo, para que el punto S pertenezca al plano determinado por los puntos P, Q y R, se tiene que verificar, según (4), que el vector $\overline{s} - \overline{p}$ sea combinación lineal de los vectores $\overline{q} - \overline{p}$ y $\overline{r} - \overline{p}$ lo que se puede expresar algebraicamente mediante la condición:

$$\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \\ s_1 - p_1 & s_2 - p_2 & s_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Considérese la recta determinada por dos puntos P y Q de coordenadas (p_1, p_2, p_3) y (q_1, q_2, q_3) respectivamente, en el sistema de referencia $R = \{O; \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\}$.



Ecuación vectorial de la recta Sea $X \equiv (x_1, x_2, x_3)$, un punto de dicha recta.

$$\boxed{\overline{x} = \overline{p} + \lambda\,(\overline{q} - \overline{p})} \tag{7}$$

que es la ecuación vectorial de la recta determinada por los puntos P y Q, siendo el vector $\overline{m} = \overline{q} - \overline{p}$ el que define la dirección de la recta.

Ecuaciones paramétricas de la recta De la Expresión (7), escribiendo la igualdad de coordenadas de los dos primeros miembros de la ecuación resulta

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \lambda(q_1 - p_1) \\ x_2 &= p_2 + \lambda(q_2 - p_2) \\ x_3 &= p_3 + \lambda(q_3 - p_3) \end{aligned}\right\}} \tag{8}$$

que es la ecuación paramétrica de la recta. El parámetro es λ, que al cambiar genera los diferentes puntos de la recta.

Ecuaciones clásica y continua de la recta Eliminando el parámetro λ de (8), , es decir, despejando λ en una de ellas y sustituyendo en la otra, resulta

$$\boxed{\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{x_3 - p_3}{q_3 - p_3}} \tag{9}$$

que es la forma clásica de la ecuación de la recta. La ecuación anterior expresa el paralelismo de los vectores $\overline{PX}$ y $\overline{PQ}$.

Llamando $a = q_1 - p_1$, $b = q_2 - p_2$ y $c = q_3 - p_3$, la Ecuación (8) se convierte en

$$\boxed{\frac{x_1 - p_1}{a} = \frac{x_2 - p_2}{b} = \frac{x_3 - p_3}{c},} \tag{10}$$

que es la ecuación en forma continua de la recta. La ecuación anterior expresa el paralelismo de los vectores $\overline{PX}$ y $\overline{m} \equiv (a, b, c)$.

```
%Recta que pasa por dos puntos P y Q.
function recta3D(P,Q)
    syms t
    v=Q-P;
    x = P(1) + t*v(1);
    fprintf('x=%s \n',x);
    y=P(2) + t*v(2);
    fprintf('y=%s \n',y);
    z=P(3) + t*v(3);
    fprintf('z=%s \n',z);
    fig=fplot3(x,y,z)
    axis equal;
    xlabel('Ejex');
    ylabel('Ejey');
    zlabel('Ejez');
end
```

Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P = (4, 2, -1)$ y $Q = (0, 2, 3)$.

```
recta3D([4,2,-1],[0,2,3])
```

Sean

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ x_2 = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ x_3 = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right\} \tag{11}$$

las ecuaciones paramétricas del plano π que pasa por el punto $P \equiv (p_1, p_2, p_3)$ y cuya variedad de dirección es la engendrada por los vectores (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3). Sea X un punto del plano de coordenadas (x_1, x_2, x_3), el sistema lineal anterior en λ y μ tiene que ser compatible y determinado, luego

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 - p_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 - p_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Desarrollando el determinante se obtiene

$$(x_1 - p_1)(u_2 v_3 - u_3 v_2) + (x_2 - p_2)(u_3 v_1 - u_1 v_3) + (x_3 - p_3)(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0 \tag{13}$$

haciendo $a = u_2 v_3 - u_3 v_2$, $b = u_3 v_1 - u_1 v_3$, $c = u_1 v_2 - u_2 v_1$ y $d = -p_1 a - p_2 b - p_3 c$, se puede poner como

$$\boxed{a x_1 + b x_2 + c x_3 + d = 0} \tag{14}$$

que es la ecuación general del plano y donde a, b, c y d son números reales no simultáneamente nulos. El vector (a, b, c) es normal al plano.

```
%Ecuacion general de un plano que pasa por tres puntos P, Q, R
function plano3D(P,Q,R)
    syms x y z
    u=Q-P;
    v=R-P;
    ecu=det([x-P(1) y-P(2) z-P(3); ...
        u(1) u(2) u(3);v(1) v(2) v(3)]);
    fprintf('%s %c %d \n',ecu,'=',0);
    syms t s
    fsurf(P(1)+t*u(1)+s*v(1),P(2)+t*u(2)+s*v(2), ...
        P(3)+t*u(3)+s*v(3));
    axis equal;
    xlabel('Ejex');
    ylabel('Ejey');
    zlabel('Ejez');
end
```

Hallar la ecuación general del plano que pasa por los puntos $P = (3, 1, -2)$, $Q = (-1, 2, 4)$ y $R = (2, -1, 1)$

```
plano3D([3,1,-2],[-1,2,4],[2,-1,1])
```

Dibujar en una misma gráfica la curva $\{x = u, y = u^2/2, z = u^3/6\}$ para $u \in [0, 2]$, el vector $(1/3, -2/3, 2/3)$ (con módulo 1) situado en el el punto de la curva que se obtiene para $u = 1$, y el plano perpendicular a dicho vector, cuyas ecuaciones paramétricas son $\{x = u, y = v, z = (-u + 2 * v + (1/3))/2\}$. Se trata de las ecuaciones paramétricas del plano con ecuación general $x - 2y + 2z - (1/3) = 0$.

```
 syms u v real
%Curva
curva=[u u^2/2 u^3/6];
fplot3(curva(1),curva(2),curva(3),[0,2]);
hold on
%Vector
dibujaVector3D([1, 1/2, 1/6],[1/3, -2/3, 2/3],'b')
%Plano
planoosc=[u,v,(-u+2*v+(1/3))/2];
fmesh(planoosc(1),planoosc(2),planoosc(3),[1,1.4,0.5,1])
```

Definición (5.1Producto escalar)

Sea el conjunto V_3 de los vectores libres del espacio. Se llama producto escalar a una aplicación $f : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$ tal que verifica las siguientes propiedades:

1. **Simetría:**
$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = f(\overline{x}_2, \overline{x}_1); \qquad \forall \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in V_3.$$

2. **Bilinealidad:**
$$\begin{array}{rcl} f(\overline{x}_1, \overline{x}_2 + \overline{x}_3) & = & f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + f(\overline{x}_1, \overline{x}_3); \\ f(\overline{x}_1 + \overline{x}_2, \overline{x}_3) & = & f(\overline{x}_1, \overline{x}_3) + f(\overline{x}_2, \overline{x}_3); \qquad \forall \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3 \in V_3. \end{array}$$

3. **Homotecia:**
$$\lambda f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = f(\lambda \overline{x}_1, \overline{x}_2) = f(\overline{x}_1, \lambda \overline{x}_2); \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. **Positividad:**
$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_1) \geq 0 \qquad \forall \overline{x}_1 \neq 0 \in V_3.$$

El producto escalar es una forma bilineal simétrica, y su forma cuadrática asocida es definida positiva.
El producto escalar se denota por $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \overline{x}_1 \bullet \overline{x}_2$.

Definición (5.3 Norma de un vector)

Se llama norma de un vector $\overline{x}$ y se denota $||\overline{x}||$ a la raíz cuadrada del producto escalar de dicho vector por sí mismo, es decir:

$$||\overline{x}|| = \sqrt{\overline{x} \bullet \overline{x}}.$$

Definición (5.5 Ángulo de dos vectores)

Dados dos vectores $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_2$ cualesquiera de V_3, se dice que ambos vectores forman un ángulo θ sii

$$\cos\theta = \frac{\overline{x}_1 \bullet \overline{x}_2}{|\overline{x}_1||\overline{x}_2|}. \tag{15}$$

Definición (5.6Base ortonormal o métrica)

Si los vectores básicos son de norma unidad y perpendiculares dos a dos, es decir, $||\overline{u}_1|| = ||\overline{u}_2|| = ||\overline{u}_3|| = 1$ y $\overline{u}_1 \bullet \overline{u}_2 = 0$, $\overline{u}_1 \bullet \overline{u}_3 = 0$ y $\overline{u}_2 \bullet \overline{u}_3 = 0$ se dice que la base es ortonormal o métrica.

Nota

En el caso particular de una base métrica, la expresión del producto escalar es:

$$\overline{x} \bullet \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{16}$$

Hallar el ángulo que forman los vectores $u = (1, 1, 4)$ y $v = (-1, 2, 2)$.

```
%Angulo que forman los vectores u y v
u=[1,1,4];
v=[-1,2,2];
%Radianes
acos(dot(u,v)/(norm(u)*norm(v)))
%Grados
acosd(dot(u,v)/(norm(u)*norm(v)))
```

Hallar la proyección del vector $v = (2, 3, 4])$ sobre el vector $u = (1, 1, 0)$.

```
v=[2,3,4];
u=[1,1,0];
%Vector proyeccion w
w=(dot(v,u)/norm(u)^2)*u
%Dibujamos los tres vectores v,u,w
dibujaVector3D([0,0,0],v,'b')
hold on
dibujaVector3D([0,0,0],u,'r')
dibujaVector3D([0,0,0],w,'g--')
grid off
axis off
box off
```

Hallar la proyección del vector $v = (2, 3, 4)$ sobre el vector $u = (1, -1, 0)$.

```
v=[2,3,4];
u=[1,-1,0];
%Vector proyeccion w
w=(dot(v,u)/norm(u)^2)*u
%Dibujamos los tres vectores v,u,w
dibujaVector3D([0,0,0],v,'b')
hold on
dibujaVector3D([0,0,0],u,'r')
dibujaVector3D([0,0,0],w,'g--')
grid off
axis off
box off
```

Comprobar que los vectores $u = (1, -2, 3)$ y $v = (4, 5, 2)$ son ortogonales

```
u=[1,-2,3];
v=[4,5,2];
dot(u,v)
%Dibujo los vectores u y v con origen en el (0,0,0)
dibujaVector3D([0,0,0],u,'b')
hold on
dibujaVector3D([0,0,0],v,'r')
```

Definición (5.2 Producto Vectorial)

Sea el conjunto V_3 de los vectores libres del espacio Se llama producto vectorial a una aplicación $f : V_3 \times V_3 \to V_3$ tal que verifica las siguientes propiedades:

1. $$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = -f(\overline{x}_2, \overline{x}_1); \qquad \forall \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in V_3.$$

2. $$\lambda f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = f(\lambda \overline{x}_1, \overline{x}_2) = f(\overline{x}_1, \lambda \overline{x}_2); \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. $$\begin{aligned} f(\overline{x}_1, \overline{x}_2 + \overline{x}_3) &= f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + f(\overline{x}_1, \overline{x}_3); \\ f(\overline{x}_1, \overline{x}_2 + \overline{x}_3) &= f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + f(\overline{x}_1, \overline{x}_3); \qquad \forall \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3 \in V_3. \end{aligned}$$

4. *Si $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = 0$ siendo $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_2$ no nulos, entonces los vectores $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_2$ son paralelos.*

Las propiedades 2 y 3 muestran que el producto escalar es una forma bilineal, y la propiedad 1, muestra que dicha aplicación es antisimétrica o alternada.

Hallar el producto vectorial de los vectores $u = (3, 1, 2)$ y $v = (-2, 2, 5)$.

```
u=[3,1,2];
v=[-2,2,5];
%Producto vectorial de u y v
w=cross(u,v)
%Dibujamos los tres vectores u,v,w
dibujaVector3D([0,0,0],u,'b')
hold on
dibujaVector3D([0,0,0],v,'r')
dibujaVector3D([0,0,0],w,'g')
grid off
axis off
box off
```

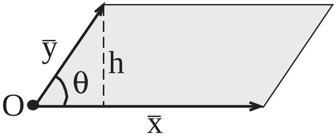


Figura: Ilustración del área del paralelogramo.

El producto vectorial de dos vectores $\overline{x}$ e $\overline{y}$ pertenecientes a V_3, se denota $\overline{x} \wedge \overline{y}$, y es otro vector que cumple:

1. $|\overline{x} \wedge \overline{y}| = |\overline{x}|\ |\overline{y}| \sin\theta$ donde $\overline{x}$ e $\overline{y}$ forman un ángulo θ. Esta condición da una interpretación geométrica del producto vectorial de dos vectores $\overline{x}$ e $\overline{y}$: Si se considera el paralelogramo de lados $\overline{OX} = \overline{x}$ y $\overline{OY} = \overline{y}$, la altura h de dicho paralelogramo es $h = |\overline{y}| \sin\theta$, luego $|\overline{x} \wedge \overline{y}|$ es el área de dicho paralelogramo.
2. Su dirección es perpendicular a las de $\overline{x}$ e $\overline{y}$.
3. Su sentido es tal que la orientación determinada en E_3, por la terna $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x} \wedge \overline{y}$, sea la misma que la determinada por los vectores $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ que se han elegido como básicos.

Considérese el sistema de referencia ortonormal $\{O; \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\}$, es decir $\|u_i\| = 1,\ i = 1, 2, 3,\ \overline{u}_i \wedge \overline{u}_i = 0,\ i = 1, 2, 3,\ \overline{u}_1 \wedge \overline{u}_2 = \overline{u}_3,\ \overline{u}_2 \wedge \overline{u}_3 = \overline{u}_1,\ \overline{u}_3 \wedge \overline{u}_1 = \overline{u}_2.$
Dados $X, Y \in E_3$, sean sus coordenadas en el sistema de referencia considerado (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) respectivamente. En virtud de las propiedades (1), (2) y (3) se cumple

$$\begin{array}{l} \overline{x} \wedge \overline{y} = (x_1\overline{u}_1 + x_2\overline{u}_2 + x_3\overline{u}_3) \wedge (y_1\overline{u}_1 + y_2\overline{u}_2 + y_3\overline{u}_3) = \\ (x_2y_3 - x_3y_2)\overline{u}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\overline{u}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\overline{u}_3 \end{array} \tag{17}$$

que se puede expresar como

$$\overline{x} \wedge \overline{y} = \begin{vmatrix} \overline{u}_1 & \overline{u}_2 & \overline{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

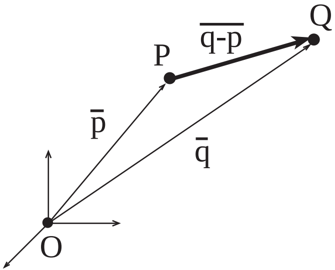
Teorema (5.2 Distancia inducida por una norma)

Sea $(V_3, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado. La aplicación $d : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = ||\overline{x} - \overline{y}|| \tag{19}$$

es una distancia.

5.4.1 Distancia entre dos Puntos



$$d(P, Q) = d(\overline{OP}, \overline{OQ}) = ||\overline{OQ} - \overline{OP}|| = ||\overline{PQ}|| = \sqrt{\overline{PQ} \bullet \overline{PQ}} \tag{20}$$

Si el sistema de referencia es ortonormal resulta

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}. \tag{21}$$

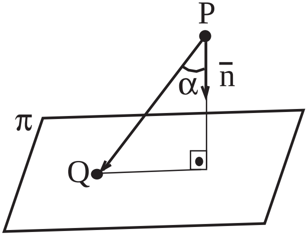
```
% %Programa que calcula la distancia entre dos puntos P y Q
function dist=distancia3D(P,Q)
dist=sqrt((Q(1)-P(1))^2+(Q(2)-P(2))^2+(Q(3)-P(3))^2);
end
```

Hallar la distancia del punto $P = (1, -2, 5)$ al punto $Q = (-3, 6, 4)$.

```
distancia3D([1,-2,5],[-3,6,4])
```

Sea el plano π dado por su ecuación general $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ y el punto P de coordenadas (p_1, p_2, p_3). Considérese un punto Q del plano π, por ejemplo el $(-D/A, 0, 0)$ (donde se ha supuesto que $A \neq 0$).
La distancia del punto P al plano π es el valor absoluto del producto escalar del vector $\overline{PQ}$ por el versor (vector unitario) normal $\overline{n}$ al plano π. Por tanto, se tiene

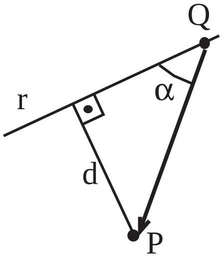
$$d(P,\pi) = \left|(-D/A - p_1, -p_2, -p_3) \bullet \frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| = \left|\frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \tag{22}$$



```
% Programa que calcula la distancia de un punto P a un plano.
% El plano ax+by+cz+d=0 se da como a,b,c,d
function dist=distancia3D(P,a,b,c,d)
    syms x y z
    expr=a*x+b*y+c*z+d;
    dist=abs(subs(expr,[x y z],P))/norm([a,b,c]);
end
```

Hallar la distancia del punto $P = (1, 4, 2)$ al plano $8x - y + 4z - 3 = 0$.

```
distancia3D([1,4,2],8,-1,4,-3)
```



Sea la recta r de ecuación

$$\frac{x_1 - q_1}{a} = \frac{x_2 - q_2}{b} = \frac{x_3 - q_3}{c} \qquad (23)$$

donde $Q \equiv (q_1, q_2, q_3)$ es un punto perteneciente a r y $\overline{v} \equiv (a, b, c)$ es un vector de la dirección de la recta. Sea el punto P de coordenadas (p_1, p_2, p_3), se quiere calcular la distancia d de P a la recta r.

Se cumple,

$$\sin\alpha = \frac{d}{|\overline{QP}|} \Longrightarrow d = |\overline{QP}| \sin\alpha = |\overline{QP}| \frac{|\overline{QP} \wedge \overline{v}|}{|\overline{QP}||\overline{v}|} \qquad (24)$$

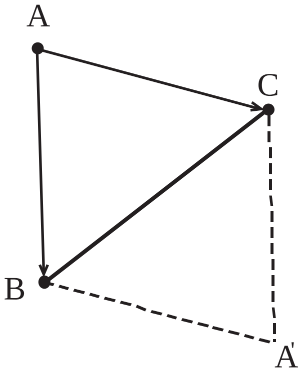
luego se tiene que

$$d = \frac{|\overline{QP} \wedge \overline{v}|}{|\overline{v}|}. \qquad (25)$$

```
% % Programa que calcula la distancia de un punto P a una recta.
% % La recta se da con un punto Q y un vector v
function dist=distancia3D(P,Q,v)
dist=norm(cross((Q-P),v))/norm(v);
end
```

Hallar la distancia del punto $P = (5, 1, 3)$ a la recta $\{x = 3, y = 7 + t, z = 1 + t\}$.

```
distancia3D([5,1,3],[3,7,1],[0,1,1])
```



El área de un triángulo de vértices $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ será la mitad del área del paralelogramo de vértices A, B, C y A',

$$A = \frac{1}{2}|\overline{AB} \wedge \overline{AC}|. \tag{26}$$

Hallar el área del triángulo con vértices $A = (-1, 3, 5)$, $B = (-1, 1, 2)$ y $C = (2, -3, 6)$.

```
%Puntos
A=[-1,3,5];
B=[-1,1,2];
C=[2,-3,6];
%Vectores
u=B-A;
v=C-A;
%Area
(1/2)*norm(cross(u,v))
sym((1/2)*norm(cross(u,v)))
```

Sean las rectas

$$r \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \frac{x_3 - a_3}{u_3} \tag{27}$$

y

$$s \equiv \frac{x_1 - b_1}{v_1} = \frac{x_2 - b_2}{v_2} = \frac{x_3 - b_3}{v_3} \tag{28}$$

el ángulo que forman dichas rectas es el ángulo θ que forman sus vectores directores $\overline{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$ y $\overline{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$, este ángulo cumple que

$$\cos\theta = \frac{|\overline{u} \bullet \overline{v}|}{|\overline{u}||\overline{v}|} = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \tag{29}$$

$$\sin\theta = \frac{|\overline{u} \wedge \overline{v}|}{|\overline{u}||\overline{v}|} = \frac{(u_1 v_2 - v_1 u_2)^2 + (u_3 v_1 - v_3 u_1)^2 + (u_2 v_3 - v_2 u_3)^2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}. \tag{30}$$

La condición de perpendicularidad de las rectas r y s será $\theta = \pi/2 \Longrightarrow cos\theta = 0$,

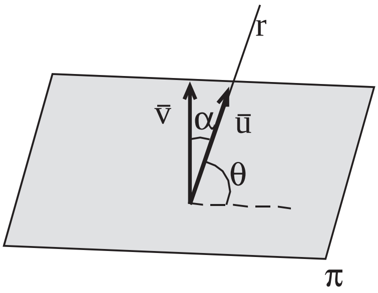
$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0 \tag{31}$$

y la de paralelismo será $\theta = 0 \Longrightarrow sin\theta = 0$

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}. \tag{32}$$

Hallar el coseno del ángulo que forman las rectas
$r_1 \equiv \{x = 2\lambda + 1, y = 3\lambda + 1, z = 4\lambda + 1\}$ y
$r_2 \equiv \{3x - 2y + 3 = 0, 4x - 2z + 4 = 0\}$. **Sol:** Son paralelas.

```
v1=[2 3 4];
 v2=cross([3 -2 0],[4 0 -2]);
cosalpha=dot(v1,v2)/(norm(v1)*norm(v2))
```



Dado el plano π de ecuación

$$\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \tag{33}$$

y la recta r de ecuación

$$r \equiv \frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \frac{x_3 - a_3}{u_3}. \tag{34}$$

El ángulo θ que la recta forma con el plano es el ángulo formado por dicha recta con su proyección ortogonal sobre el plano, el cual es complementario del ángulo que forma la recta y su perpendicular al plano, el cual es complementario del ángulo α que forma la recta y una perpendicular al plano, $\alpha = \pi/2 - \theta$, sean $\overline{v} = (a, b, c)$ normal al plano y $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vector de la dirección de la recta, se tiene

$$\sin\theta = \cos\alpha = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{u}||\overline{v}|} = \frac{u_1 a + u_2 b + u_3 c}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{35}$$

$$\cos\theta = \sin\alpha = \frac{|\overline{u} \wedge \overline{v}|}{|\overline{u}||\overline{v}|} = \frac{(u_1 b - a u_2)^2 + (u_3 a - c u_1)^2 + (u_2 c - b u_3)^2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{36}$$

La condición de perpendicularidad entre recta y plano es $\overline{v} = \lambda\,\overline{u}$, es decir,

$$\frac{a}{u_1} = \frac{b}{u_2} = \frac{c}{u_3} \tag{37}$$

y la condición de paralelismo es $\cos\alpha = 0$,

$$u_1 a + u_2 b + u_3 c = 0. \tag{38}$$

Hallar el ángulo que forman la recta AB siendo $A(1,0,2)$ y $B(-1,-2,6)$, con el plano definido por el punto $P(1,-3,8)$ y la recta $\{x = z+1, y = z-1\}$.

```
A=[1 0 2];B=[-1 -2 6];
vectorrecta=B-A;
P=[1 -3 8];
Q=[1 -1 0];
vectorplano1=Q-P;
vectorplano2=[1 1 1];
normalplano=cross(vectorplano1,vectorplano2);
%angulo
asin(abs(dot(vectorrecta,normalplano))/(norm(vectorrecta)*norm(normalplano)))
```

Dados los planos

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ \pi_2 \equiv a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases} \tag{39}$$

el ángulo θ que forman es igual o suplementario al que forman sus vectores normales $\overline{u} \equiv (a, b, c)$ y $\overline{v} = (a', b', c')$, por lo que resulta:

$$\cos\theta = \frac{|\overline{u} \bullet \overline{v}|}{|\overline{u}||\overline{v}|} = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{(a')^2+(b')^2+(c')^2}} \tag{40}$$

$$\sin\theta = \frac{|\overline{u} \wedge \overline{v}|}{|\overline{u}||\overline{v}|} = \frac{(ab'-a'b)^2 + (a'c-ac')^2 + (bc'-b'c)^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}. \tag{41}$$

Luego la condición de perpendicularidad de ambos planos es

$$aa' + bb' + cc' = 0 \tag{42}$$

y la condición de paralelismo es

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}. \tag{43}$$

Hallar el ángulo que forman los planos $5x - 14y + 2z - 8 = 0$ y $10x - 11y + 2z + 15 = 0$.

```
n1=[5 -14 2];
n2=[10 -11 2];
alpha=acos(dot(n1,n2)/(norm(n1)*norm(n2)));
alpha
```