Geometría Analítica

Tema 1: Geometría Afín y Euclídea en el Plano

Cristina Solares

Universidad de Castilla-La Mancha

29 de septiembre de 2022

En Geometría analítica se manejan simultáneamente y casi sin diferenciar dos conjuntos: uno de puntos, que llamaremos E_2 y otro de vectores, que denominaremos V_2 (vectores libres del plano).
Ambos conjuntos están relacionados mediante la aplicación

$$f : E_2 \times E_2 \to V_2$$

definida mediante:

$$f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}, \tag{1}$$

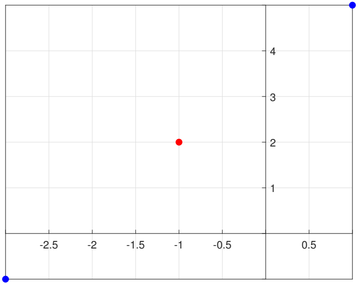
es decir, que a cada pareja de puntos le hacemos corresponder el vector que los une en el sentido primero-segundo.

Hallar el punto medio del segmento AB, donde $A = (1, 5)$ y $B = (-3, -1)$.
Sol: El punto medio es $(-1, 2)$.

```
A=[1,5];
B=[-3,-1];
%Punto medio
C=(A+B)/2
% Dibujamos A y B
plot([A(1) B(1)],[A(2) B(2)],'.b','MarkerSize',20)
hold on
% Dibujamos el punto medio
plot(C(1),C(2),'.r','MarkerSize',20)
grid on
```

Si queremos cambiar el origen de coordenadas:

```
ax = gca;
ax.XAxisLocation ='origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
```



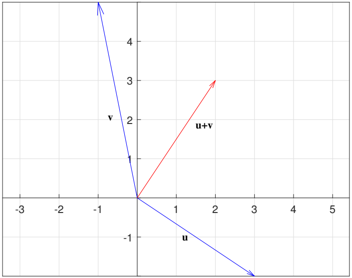
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
2
3
4

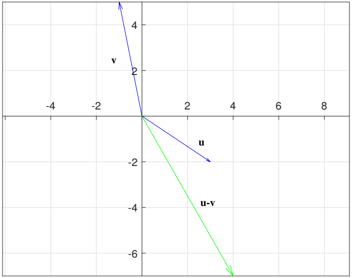
Dados los vectores $u = 3i - 2j$ y $v = -i + 5j$, representar gráficamente: u, v, $u + v$, $u - v$.

```
u=[3 -2];v=[-1 5];
%Dibujo vectores u,v
dibujaVector2D([0,0],u,'b')
hold on
dibujaVector2D([0,0],v,'b')
%Dibujo vector u+v
dibujaVector2D([0,0],u+v,'r')
%Dibujo vector u-v
dibujaVector2D([0,0],u-v,'g')
hold off
```

El programa para dibujar vectores es:

```
%Dibuja un vector (vector con dos coordenadas) en la
%posicion (vector con dos coordenadas) que se especifica.

function dibujaVector2D(posicion,vector,color)
    quiver(posicion(1), posicion(2),vector(1),vector(2),0,color);
    grid on;
    axis equal;
end
```

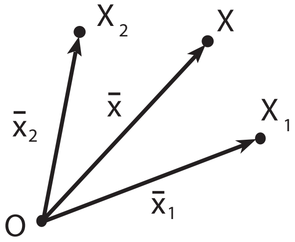

v
u+v
u
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
4
3
2
1
-1


v
u
u-v
-4
-2
2
4
6
8
4
2
-2
-4
-6

Definición (Sistema de Referencia en E_2)

El conjunto $\{O; \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}\}$, constituido por un punto O, denominado origen y una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de V_2, se denomina sistema de referencia en E_2.

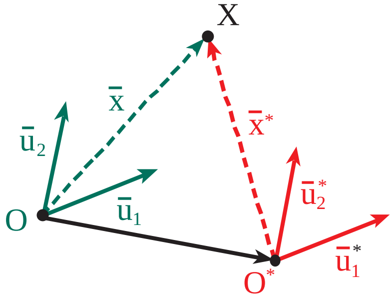
A todo punto X en E_2 le podemos asociar un único vector libre, el $\overrightarrow{OX}$. Dicho vector libre se llama vector de posición del punto X.



Todo sistema de referencia en E_2 permite identificar cada punto X mediante sus correspondientes coordenadas.

Definición (Coordenadas de un punto de E_2)

Se llaman coordenadas de un punto $X \in E_2$ a las componentes de su vector asociado $\vec{x} \in V_2$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.



Sean dos sistemas de referencia $\{O; \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}\}$ y $\left\{O^*; \{\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*\}\right\}$, donde (o_1, o_2) son las coordenadas de O^* respecto del primer sistema de referencia, y (α_1, α_2) y (β_1, β_2) son las componentes de los vectores $\vec{u}_1^*$ y $\vec{u}_2^*$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, respectivamente. Entonces, si (x_1, x_2) y (x_1^*, x_2^*) son las coordenadas del punto X, respecto de los sistemas de referencia 1 y 2, respectivamente, puesto que $\vec{OX} = O\vec{O}^* + O^{\vec{*}}X$ se tiene:

$$\begin{aligned} x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 &= o_1\vec{u}_1 + o_2\vec{u}_2 + x_1^*\vec{u}_1^* + x_2^*\vec{u}_2^* \\ &= o_1\vec{u}_1 + o_2\vec{u}_2 + x_1^*(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) + x_2^*(\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2) \\ &= (o_1 + x_1^*\alpha_1 + x_2^*\beta_1)\vec{u}_1 + (o_2 + x_1^*\alpha_2 + x_2^*\beta_2)\vec{u}_2, \end{aligned} \tag{2}$$

lo que da las componentes del vector $\vec{OX}$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de dos formas diferentes (la primera y la última). Por lo que, teniendo en cuenta que las coordenadas de un punto son únicas, resulta:

$$\begin{aligned} x_1 &= o_1 + x_1^*\alpha_1 + x_2^*\beta_1 \\ x_2 &= o_2 + x_1^*\alpha_2 + x_2^*\beta_2, \end{aligned} \tag{3}$$

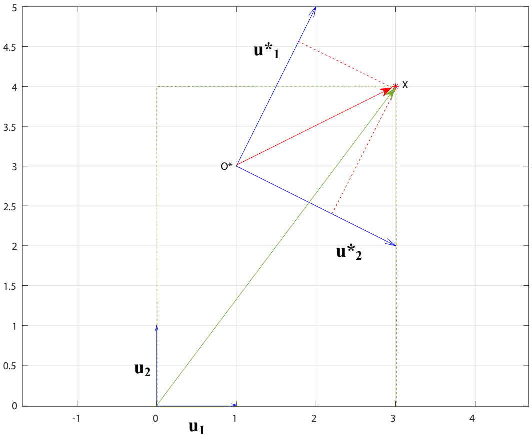
que en forma matricial puede escribirse:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & o_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & o_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ 1 \end{pmatrix}} \tag{4}$$

que da las coordenadas (x_1, x_2) del punto X en el viejo sistema de referencia $\{O; \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}\}$ en función de sus coordenadas (x_1^*, x_2^*) en el nuevo sistema $\left\{O^*; \{\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*\}\right\}$ y de las coordenadas del nuevo origen O^*, respecto al viejo sistema.

1. Considerar el sistema de referencia $R \equiv \{O = (0,0); \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (0,1)\}\}$ y el punto X con coordenadas $(3,4)$ en el sistema R. Calcular las coordenadas de X en el nuevo sistema de referencia $R^* \equiv \{O^*; \{\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*\}\}$ donde $\vec{u}_1^* = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$, $\vec{u}_2^* = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ y O^* tiene coordenadas $(1,3)$ en R. Representar los sistemas gráficamente y el punto X.
   Sol. $X = (4/5, 3/5)$.
2. Considerar el sistema de referencia $R \equiv \{O = (0,0); \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (0,1)\}\}$ y el punto X con coordenadas $(5,2)$ en el sistema R. Calcular las coordenadas de X en el nuevo sistema de referencia $R^* \equiv \{O^*; \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}\}$ donde O^* tiene coordenadas $(4,-3)$ en R. Representar los sistemas gráficamente y el punto X.
   Sol. $X = (1,5)$.
3. Hallar la ecuación de la curva $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 7$ cuando se traslada el origen de coordenadas al punto $(2,-1)$.
   Sol. $2(x')^2 + 3(y')^2 = 18$.

A continuación se representa los sistemas de referencia y el punto X en el ejercicio 1;



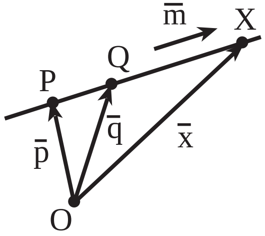
Programa que calcula las coordenadas de un punto dado, en un nuevo sistema de referencia:

```
%Obtiene las coordenadas de un punto en un nuevo sistema de referencia.
%Se pasa como argumento los valores que aparecen en la matriz de cambio de
%sistema y las coordenadas iniciales del punto.
%Los valores de alpha1,alpha2,beta1,beta2,o1,o2 son numeros reales
%y el punto se pasa como un vector con dos coordenadas

function coordenadaspunto=cambiosistema(alpha1,alpha2,beta1,beta2,o1,o2,punto)
    matriz=[alpha1 beta1 o1;alpha2 beta2 o2;0 0 1];
    coordenadaspunto=inv(matriz)*[punto(1) punto(2) 1]';
end
```

En la línea de comandos

```
%Calculamos las nuevas coordenadas del punto (3,4)
cambiosistema(1,2,2,-1,1,3,[3,4])
```

Se llama ecuación vectorial de la recta en el plano afín E_2 a la relación que deben satisfacer los vectores de posición de los puntos de la recta de forma tal que todos ellos y sólo ellos, la satisfagan.
Considérese la figura, en la que se muestra una recta y tres puntos sobre ella, dos fijos P, Q y uno genérico X.



Se tiene:

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX} = \vec{OP} + \lambda \ \vec{PQ} = \vec{OP} + \lambda \left(\vec{OQ} - \vec{OP} \right) \quad (5)$$

de donde se deduce que

$$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + \lambda \ \ (\vec{q} - \vec{p}) = \vec{p} + \lambda \ \ \vec{m},} \quad (6)$$

que es la ecuación vectorial de la recta, siendo el vector $\vec{m} \equiv \vec{q} - \vec{p}$ el que define la dirección de la recta (vector director de la recta).

De la Expresión (6), escribiendo la igualdad de coordenadas de los dos primeros miembros de la ecuación resulta

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_1 & = & p_1 + \lambda(q_1 - p_1) \\ x_2 & = & p_2 + \lambda(q_2 - p_2) \end{array}} \tag{7}$$

que es la ecuación paramétrica de la recta. El parámetro es λ, que al cambiar de valor genera los diferentes puntos de la recta. Para $\lambda = 0$ se obtiene el punto P, para $\lambda = 1$ se obtiene el punto Q, para $\lambda > 0$ se obtienen los puntos de la recta que están situados al mismo lado de P que Q, y para $\lambda < 0$, los que están a diferente lado que Q.

Eliminando el parámetro λ de (7), es decir, despejando λ en una de ellas y sustituyendo en la otra, resulta

$$\boxed{\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2},} \tag{8}$$

que es la forma clásica de la ecuación de la recta. Ésta ecuación expresa el paralelismo de los vectores $\vec{PX}$ y $\vec{PQ}$.
Llamando $a = q_1 - p_1$ y $b = q_2 - p_2$, la Ecuación (8) se convierte en

$$\boxed{\frac{x_1 - p_1}{a} = \frac{x_2 - p_2}{b},} \tag{9}$$

que es la ecuación en forma continua de la recta. Ésta ecuación expresa el paralelismo de los vectores $\vec{PX}$ y $\vec{m}$.

Consideremos el sistema de referencia $R \equiv \{O = (0,0); \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (0,1)\}\}$:

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4,1)$ y $(-2,3)$ en forma vectorial, paramétrica y continua.
2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,-3)$ y $(5,4)$ en forma vectorial, paramétrica y continua.

Programa que dibuja una recta que pasa por dos puntos y calcula sus ecuaciones paramétricas:

```
%Calcula las ecuaciones parametricas de la recta que pasa por los puntos P y Q
%Dibuja la recta en el intervalo [tmin,tmax] siendo t el parametro
function recta2D(P,Q,intervalo)
    syms t
    v=Q-P;
    x = P(1) + t*v(1);
    fprintf('x=%s \n',x);
    y=P(2) + t*v(2);
    fprintf('y=%s \n',y);
    fig=fplot(x,y,intervalo);
    axis equal;
end
```

En la línea de comandos se escribe:

```
recta2D([4,1],[-2,3],[-2,2])
```

Quitando denominadores en (9) y llamando $A = b$ y $B = -a$ se obtiene la denominada ecuación general de la recta:

$$\boxed{Ax_1 + Bx_2 + C = 0,} \tag{10}$$

donde $C = ap_2 - bp_1$ es una constante.
Despejando ahora x_2, resulta la ecuación explícita de la recta:

$$\boxed{x_2 = \alpha x_1 + \beta,} \tag{11}$$

donde $\alpha = -A/B$ y $\beta = -C/B$.
Nótese que esto sólo puede hacerse si $B \neq 0$.
Si estamos en el sistema de referencia $R \equiv \{O = (0,0); \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (0,1)\}\}$, el valor de α es la pendiente y β es la ordenada en el origen $O = (0,0)$.

Consideremos el sistema de referencia $R \equiv \{O = (0,0); \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (0,1)\}\}$:

1. Hallar la ecuación de la recta con pendiente 2 y ordenada al origen 5.
2. Dibujar la recta $2x - 3y - 6 = 0$.
3. Hallar la ecuación de la recta que es (a) paralela y (b) perpendicular a $3x + 2y - 5 = 0$ en el punto $(3,1)$.

Programa que dibuja una recta dada por su ecuación general:

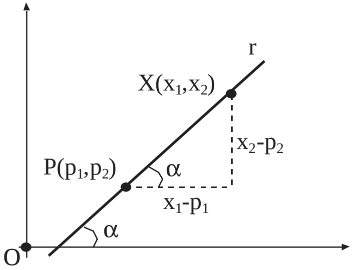
```
%Programa para dibujar la recta ax+by+c=0.
%Se pasa como argumento los valores de a,b,c.

function recta2D(a,b,c)
    syms x y
    r=a*x+b*y+c;
    fig=fimplicit(r);
    axis equal
end
```

En la linea de comandos se escribe:

```
recta2D(2,-3,-6)
```

Consideremos el sistema de referencia $R \equiv \{O = (0,0); \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (0,1)\}\}$.
Sea la recta r que pasa por el punto $P = (p_1, p_2)$ y que tiene una pendiente igual a m.
Dado otro punto cualquiera $X(x_1, x_2)$ sobre r, donde $p_1 \neq x_1$, la pendiente de la recta es $m = \tan\alpha = \frac{x_2 - p_2}{x_1 - p_1}$, de donde se obtiene la ecuación de la recta

$$\boxed{x_2 - p_2 = m(x_1 - p_1).} \tag{12}$$



Consideremos el sistema de referencia $R \equiv \{O = (0,0); \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (0,1)\}\}$:

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2,-3)$ y tiene pendiente $1/2$.
2. Hallar la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto $(3,-2)$.

Programa que calcula y dibuja la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada:

```
%Calcula y dibuja la recta que pasa por el punto P con pendiente lambda
%Dibuja la recta en los intervalos dados como [xmin,xmax,ymin,ymax]
function recta2D(P,lambda,intervalo)
    syms x y
    ecu=(y-P(2))-lambda*(x-P(1));
    fprintf('%s %c %d \n',ecu,'=',0);
    fig=fimplicit(ecu,intervalo);
    axis equal;
end
```

En la linea de comandos se escribe:

```
recta2D([-2,-3],1/2,[0,2,-2,-1])
```

Consideremos el sistema de referencia $R \equiv \{O = (0,0); \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (0,1)\}\}$.

$$\begin{array}{rcl} \textbf{Recta 1: } A_1x_1 + B_1x_2 + C_1 & = & 0 \\ \textbf{Recta 2: } A_2x_1 + B_2x_2 + C_2 & = & 0 \end{array} \qquad (13)$$

La intersección de ambas rectas se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones en (13). Para el estudio del conjunto de soluciones de este sistema conviene definir las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces se tienen los tres casos siguientes:

1. **Rango(M)=Rango(N)=2**: En este caso el sistema tiene una única solución y la intersección es un punto. Las rectas son secantes. Se verifica que $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.
2. **Rango(M)=1, Rango(N)=2**: En este caso el sistema es incompatible, es decir, las rectas son paralelas. Se verifica que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.
3. **Rango(M)=Rango(N)=1**: En este caso el sistema tiene infinitas soluciones y las dos rectas coinciden. Se verifica que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Consideremos el sistema de referencia $R \equiv \{O = (0,0); \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (0,1)\}\}$:

1. Estudiar la posición relativa de las rectas $2x - 3y - 1 = 0$ y $2x + 3y - 7 = 0$.

```
syms x y
[a,b]=solve(2*x-3*y-1==0,2*x+3*y-7==0,x,y);
a
b
```

2. Estudiar la posición relativa de las rectas $3x - y - 5 = 0$ y $3x - y + 6 = 0$.

```
syms x y
[a,b]=solve(3*x-y-5==0,3*x-y+6==0,x,y);
a
b
```

3. Estudiar la posición relativa de las rectas $3x - y - 5 = 0$ y $6x - 2y - 10 = 0$.

```
[a,b,params, conditions]=solve(3*x-y-5==0,6*x-2*y-10==0,[x,y],
                                                'ReturnConditions',true)
a
b
```

Definición (Producto escalar)

Sea el conjunto V_2 de los vectores libres del plano. Se llama producto escalar a una aplicación $f : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = |\vec{x}_1||\vec{x}_2| \cos(\widehat{\vec{x}_1, \vec{x}_2}).$$

La aplicación anterior verifica las siguientes propiedades:

1. **Simetría:**

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = f(\vec{x}_2, \vec{x}_1); \qquad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V_2.$$

2. **Bilinealidad:**

$$\begin{array}{rcl} f(\vec{x}_1, \vec{x}_2 + \vec{x}_3) & = & f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + f(\vec{x}_1, \vec{x}_3); \\ f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_3) & = & f(\vec{x}_1, \vec{x}_3) + f(\vec{x}_2, \vec{x}_3); \qquad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \in V_2. \end{array}$$

3. **Homotecia:**

$$\lambda f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = f(\lambda \vec{x}_1, \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1, \lambda \vec{x}_2); \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. **Positividad:**

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_1) \geq 0 \qquad \forall \vec{x}_1 \neq 0 \in V_2.$$

El producto escalar se denota por $f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{x}_1 \bullet \vec{x}_2$. Se cumple que $\vec{x}_1 \bullet \vec{x}_1 = |\vec{x}_1|^2$.

Definición (Módulo de un vector)

Se llama módulo de un vector $\vec{x}$ y se denota $|\vec{x}|$ a la raíz cuadrada del producto escalar de dicho vector por sí mismo, es decir:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}}.$$

Definición (Ángulo de dos vectores)

Dados dos vectores $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ cualesquiera de V_2, se dice que ambos vectores forman un ángulo θ sii

$$\cos\theta = \frac{\vec{x}_1 \bullet \vec{x}_2}{|\vec{x}_1||\vec{x}_2|}. \tag{14}$$

Se cumple que $0 \leq \theta \leq \pi$. Nótese que esta definición es correcta, pues se verifica la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\vec{x}_1 \bullet \vec{x}_2| \leq |\vec{x}_1||\vec{x}_2|,$$

lo que prueba que la Expresión (14) está comprendida entre -1 y 1, es decir, verdaderamente se trata de un coseno.

Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de V_2 y dos vectores cualesquiera $\vec{x}, \vec{y} \in V_2$, cuyas componentes respecto de la base anterior son (x_1, x_2) y (y_1, y_2), respectivamente. Entonces, el producto escalar puede escribirse:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\vec{u}_1|^2 & \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 \\ \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 & |\vec{u}_2|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Definición (Base ortonormal o métrica)

Si los vectores básicos son de módulo 1 y perpendiculares, es decir, $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 1$ *y* $\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = 0$, *se dice que la base es ortonormal o métrica.*

Nota

En el caso de una base métrica, la Expresión (15) del producto escalar se convierte en:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2. \tag{16}$$

Nota

El sistema de referencia $\{O = (0,0); \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (0,1)\}\}$ *o* $\{O = (0,0); \{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\}\}$ *se llama sistema de refererencia métrico u ortonormal.*

1. Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (3, 0)$ y $\vec{v} = (5, 5)$
Sol. $\theta = 0{,}7854$ radianes.

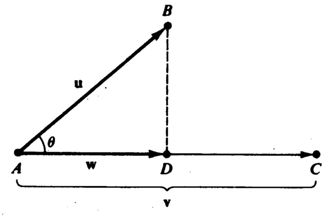
```
u=[3,0];
v=[5,5];
%radianes
acos(dot(u,v)/(norm(u)*norm(v)))
%grados
acosd(dot(u,v)/(norm(u)*norm(v)))
```

2. Determinar el coseno del ángulo formado por $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ y $\vec{v} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$.
Sol. $\cos\theta = -0{,}5077$.

```
u=[3 -4];v=[5 12];
sol=dot(u,v)/(norm(u)*norm(v))
```

3. Comprobar que los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ y $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ son ortogonales.
Sol. $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

```
u=[2 -1];v= [1 2]; dot(u,v)
```

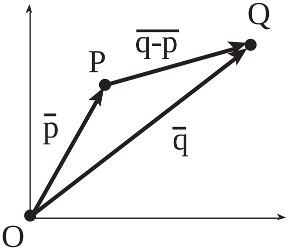


La proyección ortogonal del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$ es un vector $\vec{w}$ que cumple

$$|\vec{w}| = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{|\vec{v}|} \quad \text{y} \quad \vec{w} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}.$$

La proyección del vector $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ en $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ es el vector $\vec{w} = \frac{29}{25}\vec{i} + \frac{52}{25}\vec{j}$.

Se define la distancia entre dos puntos



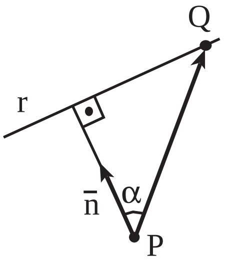
$$d(P,Q) = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PQ}} \tag{17}$$

Sean (p_1, p_2) y (q_1, q_2) las coordenadas de P y Q, respecto del sistema de referencia $\{O; \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}\}$, si el sistema de referencia es ortonormal ($|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 1,\ \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 = 0$) entonces de (15) resulta

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}.} \tag{18}$$

Sea la recta r dada por su ecuación general $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$ y el punto P de coordenadas (p_1, p_2). Considérese un punto Q de la recta r, por ejemplo el $(-C/A, 0)$ (donde se ha supuesto que $A \neq 0$), y que se está utilizando un sistema de referencia métrico.
La distancia del punto P a la recta r es el valor absoluto del producto escalar del vector $\overline{PQ}$ por el versor (vector unitario) normal $\overline{n}$ a la recta r. Por tanto, en el caso de que el sistema de referencia utilizado sea ortonormal, se tiene

$$\boxed{d(P,r) = \left|(C/A - p_1, -p_2) \bullet \frac{(A,B)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \left|\frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.} \tag{19}$$



```
%Programa que calcula la distancia entre dos puntos que se introducen
% como vectores con dos coordenadas

function dist=distancia2D(P,Q)
    dist=sqrt((Q(1)-P(1))^2+(Q(2)-P(2))^2);
end

%distancia2D([1,2],[3,4])

%Programa que calcula la distancia de un punto a una recta.
%El punto se da como un vector con dos coordenadas.
%La recta ax+by+c=0 se da como a,b,c

function dist=distancia2D(punto,a,b,c)
    syms x y
    expr=a*x+b*y+c;
    dist=abs(subs(expr,[x y],punto))/norm([a,b]);
end

%distancia2D([1,2],1,2,3)
```

Consideremos un sistema de referencia métrico u ortonormal.

1. Calcular la distancia del punto $(1,4)$ a la recta $3x-5y+2=0$.
   Sol. $15/\sqrt{34}$.

   ```
   distancia2D([1,4],3,-5,2)
   ```

2. Hallar la distancia entre los puntos $(-2,3)$ y $(5,1)$.
   Sol. $\sqrt{53}$.

   ```
   A=[-2 3]; B=[5 1];
   distancia2D(A,B)
   ```

   otra forma

   ```
    P=[-2 3]; Q=[5 1]; norm(Q-P)
   ```

3. Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto P intersección de las rectas $2x-y+2=0$ y $x+y+1=0$, dista 2 unidades del punto $Q(1,1)$.
   Sol. Rectas $4y+3x+3=0$ y $x=-1$.

4. ¿Para qué valores de m la recta $y-1=m(x+3)$ está a una distancia 3 del origen?
   Sol. $m=4/3$.

   ```
   syms x y m real
   dist=abs(-1-m*3)/sqrt(1+(-m)^2);
   solve(dist-3,m)
   ```

Se llama ángulo formado por dos rectas al menor de los ángulos que determinan. Se puede calcular a partir de los vectores directores o los normales.
Si la primera recta está dada por dos puntos P y Q, de coordenadas (p_1, p_2) y (q_1, q_2), un vector en la dirección de la recta es $\vec{r} = (a, b) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$.
Análogamente, si la segunda recta está definida por los puntos P^* y Q^*, de coordenadas (p_1^*, p_2^*) y (q_1^*, q_2^*) y $\vec{r}^* = (a^*, b^*) = (q_1^* - p_1^*, q_2^* - p_2^*)$, se tiene:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|(a, b) \bullet (a^*, b^*)|}{|\vec{r}|\ |\vec{r}^*|}}, \tag{20}$$

con $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.
Si las rectas están dadas por sus ecuaciones generales $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$ y $A^*x_1 + B^*x_2 + C^* = 0$, y nos encontramos en un sistema de referencia ortonormal, los vectores normales son $\vec{n} = (A, B)$ y $\vec{n}^* = (A^*, B^*)$,

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{n}^*|}{|\vec{n}||\vec{n}^*|} = \frac{|AA^* + BB^*|}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{(A^*)^2 + (B^*)^2}}}, \tag{21}$$

con $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

Definición (Haz de rectas)

Se denomina haz de rectas que pasan por el punto P, al conjunto de rectas que pasan por dicho punto.

La ecuación del haz de rectas es

$$\boxed{A(x_1 - p_1) + B(x_2 - p_2) = 0,} \tag{22}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ son parámetros. Si $B \neq 0$ se puede escribir también en la forma

$$\boxed{(x_2 - p_2) = \lambda(x_1 - p_1),} \tag{23}$$

donde ahora $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetros único.
Si el punto P está dado como intersección de dos rectas, la ecuación (22) se puede escribir también

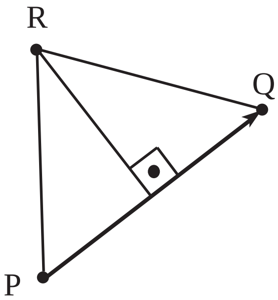
$$\alpha(Ax_1 + Bx_2 + C) + \beta(A^* x_1 + B^* x_2 + C^*) = 0. \tag{24}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son parámetros. Nótese que ahora el haz se define por dos rectas del mismo.

Consideremos un sistema de referencia métrico u ortonormal.

1. Hallar el haz de rectas que pasan por el punto $(1, 2)$.
2. Hallar el haz de rectas que pasan por el punto intersección de las rectas $2x + 3y - 6 = 0$ y $4x - y + 2 = 0$.
3. Hallar la ecuación (ecuaciones) de la recta (rectas) que pasa por el punto $(6, 0)$ y está a una distancia 5 del punto $(1, 3)$.
4. Hallar la ecuación (ecuaciones) de la recta (rectas) paralelas a $3x - 5y + 2 = 0$ y que pasa por el punto $(3, 8)$.
5. Hallar la ecuación (ecuaciones) de la recta (rectas) perpendicular a $3x - 5y + 2 = 0$ y que pasa por el punto $(3, 8)$.
6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-3, 6)$ y es perpendicular a $3x - 5y + 18 = 0$. Dibujar las rectas.
   Sol. $3y + 5x = 3$.
   ```
   syms x y d
   expr=5*x+3*y+d;
   subs(expr,[x y],[-3 6])
   %Dibujamos las rectas
   recta2D(5,3,-3)
   hold on
   recta2D(3,-5,18)
   ```
7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-3, 6)$ y es paralela a $2x + 4y - 7 = 0$..
   Sol. $2y + x = 9$.

Considérese el triángulo formado por los puntos P, Q y R



El área de dicho triángulo es

$$\boxed{Area = d(P,Q)\; d(R,PQ)/2.} \tag{25}$$

$$\boxed{Area = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & 1 \\ p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \end{vmatrix}.} \tag{26}$$

Considérense las rectas $r \equiv x_1 + 2x_2 - 2a = 0$ y $s = x_1 - x_2 = 0$. Calcular el área del triángulo OAB de vértices el origen y las proyecciones ortogonales A y B del punto $P \equiv (3a, 2a)$ sobre las rectas r y s respectivamente.
Sol. $5a^2/2$.

```
syms a x y d1 d2
P=[3*a 2*a];
expr1=2*x-y+d1;
subs(expr1,[x y],P)

ans =

4*a + d1

expr2=-x+y+d2;
subs(expr2,[x y],P)

ans =

d2 - a

A=solve(2*x-y-4*a,x+2*y-2*a,x,y)
B=solve(x-y,x+y-5*a,x,y)
Area=(1/2)*det([B.x B.y 1;0 0 1;A.x A.y 1])
```

Definición (Lugar geométrico)

Se llama lugar geométrico al conjunto de todos los puntos de E_2 que verifican una misma propiedad.

Bisectriz de dos rectas:
Puesto que la bisectriz es el lugar geométrico de los puntos tales que su distancia a las dos rectas coinciden, basta expresar esta propiedad basándose en (19). Por tanto, sus ecuaciones son:

$$\boxed{\frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A^* p_1 + B^* p_2 + C^*}{\sqrt{{A^*}^2 + {B^*}^2}}.} \qquad (27)$$

Consideremos un sistema de referencia métrico u ortonormal.

1. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) equidistantes de $(-2, 3)$ y a $(3, -1)$.
   Sol. $10x - 8y + 3 = 0$.
2. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que la suma de sus distancias a $(3, 0)$ y a $(-3, 0)$ sea 8.
   Sol. $7x^2 + 16y^2 = 112$
3. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) que equidistan del $(-2, 4)$ y el eje y (recta $x = 0$).
   Sol. $y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$.
4. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya diferencia de distancias a los puntos $(1, 4)$ y $(1, -4)$ sea igual a 6.
   Sol. $9x^2 - 7y^2 - 18x + 72 = 0$.
5. Un punto se mueve de modo que la suma de los cuadrados de sus distancias a los catetos de un triángulo rectángulo isósceles es k^2. Tomando la hipotenusa de longitud $2a$, sobre el eje horizontal x_1 (sistema de referencia métrico u ortonormal), ¿Cuál es el lugar geométrico del punto?.
   Sol. $\left(\frac{y-x-a}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{y+x-a}{\sqrt{2}}\right) = k^2$.
6. Sean A y B dos puntos fijos situados sobre el eje OX_1. Sea C un punto variable sobre el eje OX_2, y se une C con A y con B, dando lugar a las rectas r_1 y r_2 respectivamente. Desde el origen de coordenadas O se traza una perpendicular a r_2, que corta a r_1 en M. Determinar el lugar geométrico de M.
   Sol. $x^2b + y^2a - xab = 0$.

Consideremos un sistema de referencia métrico u ortonormal. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) equidistantes de $(-2, 3)$ y a $(3, -1)$.

```
syms x y
P=[-2,3];
Q=[3,-1];
dist1=distancia2D([x,y],P);
dist2=distancia2D([x,y],Q);
%Dibujo los puntos
plot(P(1),P(2),'*')
hold on
text(P(1)+0.1,P(2)+0.1,'P');
plot(Q(1),Q(2),'*')
text(Q(1)+0.1,Q(2)+0.1,'Q');
%Ecuacion lugar geometrico
ecu=simplify(expand(dist1^2-dist2^2));
fprintf('%s %c %d \n',ecu,'=',0);
%Dibujo lugar geometrico
fimplicit(ecu)
```