Geometría Analítica

Tema 6: Cuádricas

Cristina Solares

Universidad de Castilla-La Mancha

17 de octubre de 2021

Cuádricas:

La ecuación general de una cuádrica es un polinomio de grado 2 en x,y, y z:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a = 0. \qquad (1)$$

Simetría respecto a los planos coordenados:

- Si una ecuación no se altera cuando la variable x se reemplaza por $-x$, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al plano yz.
- Si una ecuación no se altera cuando la variable y se reemplaza por $-y$, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al plano xz.
- Si una ecuación no se altera cuando la variable z se reemplaza por $-z$, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al plano xy.

Simetría respecto a los ejes coordenados:

- Si una ecuación no se altera cuando las variables x e y, se reemplazan por $-x$ y $-y$ respectivamente, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje z.
- Si una ecuación no se altera cuando las variables x y z, se reemplazan por $-x$ y $-z$ respectivamente, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje y.
- Si una ecuación no se altera cuando las variables y y z, se reemplazan por $-y$ y $-z$ respectivamente, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje x.

Simetría respecto al origen de coordenadas:

La condición necesaria y suficiente para que una superficie sea simétrica con respecto al origen de coordenadas, es que no se altere su ecuación al cambiar los signos de las tres variables x, y y z.

Un cilindro está formado por una recta (generatriz) que se mueve a lo largo de una curva (directriz) mientras permanece paralela a una recta dada fija. La ecuación $f(x, y) = 0$ es un cilindro con generatriz paralela al eje OZ y directriz $f(x, y) = 0$.
Cilindro elíptico: La siguiente ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es un cilindro elíptico.

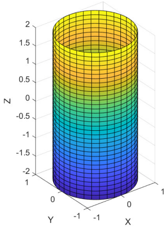

Figura: Cilindro elíptico $x^2 + y^2 = 1$

- La superficie es simétrica respecto a los planos coordenados (xy,xz e yz) y respecto a los ejes coordenados (ejes x, y, z).
- La superficie es simétrica respecto al plano xz, si se cambia el signo de la variable y

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

  la ecuación no se altera.
- La superficie es simétrica respecto al eje z, si se cambia el signo de las variables x e y

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

  la ecuación no se altera.
- Como la ecuación de la superficie no se altera al cambiar los signos de x e y simultáneamente, es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- La intersección de la superficie con el eje x nos da los puntos $(a, 0, 0)$ y $(-a, 0, 0)$. La intersección de la superficie con el eje y nos da los puntos $(0, b, 0)$ y $(0, -b, 0)$. No tiene intersección con el eje z.
- La intersección de la superficie con el plano coordenado xy $(z = 0)$ nos da una elipse en dicho plano. La intersección de la superficie con el plano coordenado xz $(y = 0)$ nos da dos rectas en dicho plano. La intersección de la superficie con el plano coordenado yz $(x = 0)$ nos da dos rectas en dicho plano.

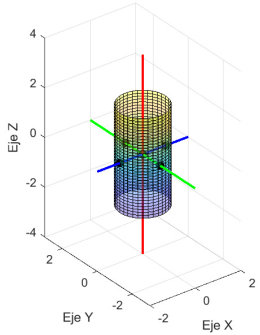

Figura: Cilindro $x^2 + y^2 = 1$

```
%Cilindro eliptico
syms u v
fig=fsurf(cos(u),sin(u),v,[0,2*pi,-2,2])
hold on
axis equal
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');
zlabel('Eje Z');
set(fig, 'FaceAlpha', 0.4)
%Ejes de simetria
syms t
fplot3(t,0*t,0*t,[-2,2],'Color','b','LineWidth', 2)
syms t
fplot3(0*t,t,0*t,[-3,3],'Color','g','LineWidth', 2)
syms t
fplot3(0*t,0*t,t,[-4,4],'Color','r','LineWidth', 2)
%Centro de simetria
plot3(0,0,0,'.k','MarkerSize',25)
%Vertices
plot3(1,0,0,'.k','MarkerSize',25)
plot3(-1,0,0,'.k','MarkerSize',25)
plot3(0,1,0,'.k','MarkerSize',25)
plot3(0,-1,0,'.k','MarkerSize',25)
```

Cilindro hiperbólico.: La siguiente ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es un cilindro hiperbólico.

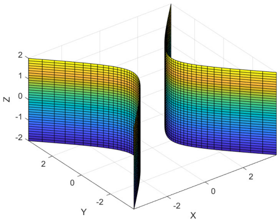

Figura: Cilindro hiperbólico $x^2 - y^2 = 1$

La superficie es simétrica respecto a los planos coordenados (xy,xz e yz) y respecto a los ejes coordenados (ejes x, y, z).
La superficie es simétrica respecto al plano xz, si se cambia el signo de la variable y

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

la ecuación no se altera.
La superficie es simétrica respecto al eje z, si se cambia el signo de las variables x e y

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

la ecuación no se altera.
Como la ecuación de la superficie no se altera al cambiar los signos de x e y simultáneamente, es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- La intersección de la superficie con el eje coordenado x nos da los puntos $(a, 0, 0)$ y $(-a, 0, 0)$. No tiene intersección con el eje y o con el eje z.
- La intersección de la superficie con el plano coordenado xy $(z = 0)$ nos da una hipérbola en dicho plano. La intersección de la superficie con el plano coordenado xz $(y = 0)$ nos da dos rectas en dicho plano. La intersección de la superficie con el plano coordenado yz no existe.

Cilindro parabólico: La siguiente ecuación

$$x^2 = 4p\ y$$

o

$$y^2 = 4p\ x$$

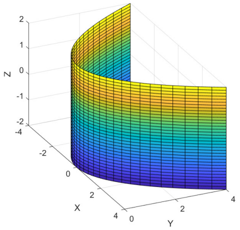

Figura: Cilindro parabólico $x^2 = 4y$

es un cilindro parabólico.

- El cilindro $x^2 = 4py$ es una superficie simétrica respecto al plano coordenado xy, pues la ecuacón no contiene la variable z, y es simétrica respecto al plano yz, si cambiamos el signo de x la ecuación no se altera. La superficie no es simétrica respecto al plano xz.
- El cilindro $x^2 = 4py$ es una superficie simétrica respecto al eje y, pero no es simétrica respecto a los ejes x o z.
- La intersección de la superficie $x^2 = 4py$ con el eje x o el eje y, es el punto $(0, 0, 0)$. La intersección con el eje z es una recta coincidente con dicho eje.
- La intersección de la superficie $x^2 = 4py$ con el plano coordenado xy es una parábola en dicho plano. La intersección con el plano xz es una recta coincidente con el eje z en dicho plano. La intersección con el plano yz es una recta coincidente con el eje z en dicho plano.

6.4 Cilindro elíptico en paramétricas

El cilindro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

lo representamos en paramétricas como $\{x = a\cos(u), y = b\sin(u), z = v\}$ (u entre 0 y 2π, v entre dos valores reales).

Si queremos representar con Matlab el cilindro elíptico $y^2 + (z^2/4) = 1$ escribimos

```
syms u v
fsurf(v,sin(u),2*cos(u),[0,2*pi,-2,2])
axis equal
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');
zlabel('Eje Z');
```

Representar con Matlab el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

6.5 Cilindro parabólico en paramétricas

El cilindro

$$x^2 = 4p\, y$$

lo representamos en paramétricas como $\{x = u, y = u^2/(4p), z = v\}$ (u y v entre dos valores reales).

Si queremos representar con Matlab el cilindro parabólico $z^2 = 4y$ escribimos

```
syms u v
fsurf(v,u^2/4,u,[-2,2,-2,2])
axis equal
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');
zlabel('Eje Z');
```

Representar con Matlab el cilindro $y^2 = 4x$.

El cilindro

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

lo representamos en paramétricas como $\{x = a\cosh(u), y = b\sinh(u), z = v\}$(una rama), $\{x = -a\cosh(u), y = b\sinh(u), z = v\}$ (otra rama), (u y v entre dos valores reales).

Si queremos representar con Matlab el cilindro hiperbólico $y^2 - (z^2/4) = 1$ escribimos

```
syms u v
fsurf(v,cosh(u),2*sinh(u),[-2,2,-2,2])
hold on
fsurf(v,-cosh(u),2*sinh(u),[-2,2,-2,2])
axis equal
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');
zlabel('Eje Z');
```

Representar con Matlab el cilindro $y^2 - x^2 = 1$.

Un punto (x, y, z) está en la esfera de radio r y centro (h, k, l) si y sólo si verifica la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2.$$

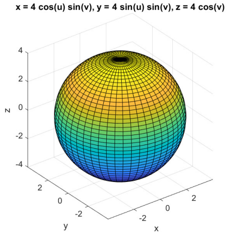

Figura: Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

Hallar el centro y radio de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 8z + 5 = 0$.

La esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

es simétrica respecto a los planos coordenados (xy,xz e yz), respecto a los ejes coordenados (ejes x, y, z) y respecto al origen de coordenadas.

- La superficie es simétrica respecto al plano xz, si se cambia el signo de la variable y la ecuación no se altera.
- La superficie es simétrica respecto al eje z, si se cambia el signo de las variables x e y la ecuación no se altera.
- La superficie es simétrica respecto al origen de coordenadas, si cambiamos el signo de las variables x, y, z simultáneamente, no se altera la ecuación.

Los puntos intersección con el eje x son $(\pm r, 0, 0)$, con el eje y son $(0, \pm r, 0)$ y con el eje z son $(0, 0, \pm r)$. La intersección con los planos coordenados son circunferencias situadas en dichos planos.

La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ se representa en paramétricas como $\{x = r\cos(u)\sin(v), y = r\sin(u)\sin(v), z = r\cos(v)\}$ (u entre 0 y 2π, v entre 0 y π).

- Representar con Matlab la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

```
syms u v
fsurf(4*sin(v)*cos(u),4*sin(v)*sin(u),4*cos(v),[0,2*pi,0,pi])
axis equal
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');
zlabel('Eje Z');
```

- Representar con Matlab la esfera de centro $(1, 3, -2)$ y radio 3.

```
syms u v
fsurf(1+3*sin(v)*cos(u),3+3*sin(v)*sin(u),-2+3*cos(v),[0,2*pi,0,pi])
axis equal
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');
zlabel('Eje Z');
```

6.9 Elipsoide

La siguiente ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
con $a, b, c > 0$ es un elipsoide con centro $(0, 0, 0)$. Los coeficientes de los tres términos de segundo grado tienen el mismo signo.

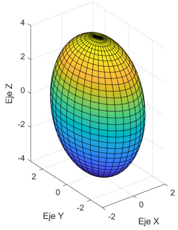

Figura: Elipsoide $(x^2/4) + (y^2/9) + (z^2/16) = 1$

Características del elipsoide:

- La superficie es simétrica con respecto a cada uno de los planos coordenados $x = 0$,$y = 0$ y $z = 0$.
- La superficie es simétrica respecto a los ejes coordenados $\{x = 0, y = 0\}$, $\{x = 0, z = 0\}$ e $\{y = 0, z = 0\}$.
- La superficie es simétrica respecto del origen de coordenadas, punto donde se cortan los tres planos de simetría.
- Si cortamos dicha superficie por un plano paralelo a los coordenados, es decir, $x = k$, $y = k$ o $z = k$, se obtienen elipses. En caso de cortar por un plano $x = a$, $y = b$ o $z = c$ se obtiene un punto.
- Si $a = b = c$, el elipsoide es una esfera.
- Si dos de los denominadores coinciden, el elipsoide es de revolución. Por ejemplo, si $a = b$ es un elipsoide de revolución con eje de revolución el eje OZ ($x = 0$, $y = 0$). En este caso el corte por planos $z = k$ nos da circunferencias.
- Los vértices son los puntos de corte del elipsoide con los ejes $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$. Por lo tanto, a, b y c son las distancias del centro a cada uno de los vértices.

El elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con $a, b, c > 0$ es un elipsoide con centro $(0, 0, 0)$. se representa en paramétricas como $\{x = a\cos(u)\sin(v), y = b\sin(u)\sin(v), z = c\cos(v)\}$ (u entre 0 y 2π, v entre 0 y π).

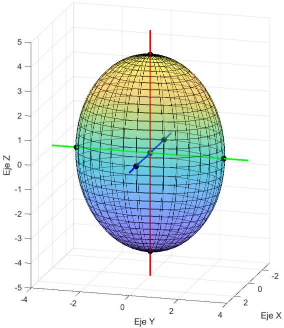

Figura: Elipsoide $(x^2/4) + (y^2/9) + (z^2/16) = 1$

```
%Elipsoide
syms u v
fig=fsurf(2*sin(v)*cos(u),3*sin(v)*sin(u),4*cos(v),[0,2*pi,0,pi])
hold on
axis equal
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');
zlabel('Eje Z');
set(fig, 'FaceAlpha', 0.4)
%Ejes de simetria
syms t
fplot3(t,0*t,0*t,[-3,3],'Color','b','LineWidth', 2)
syms t
fplot3(0*t,t,0*t,[-4,4],'Color','g','LineWidth', 2)
syms t
fplot3(0*t,0*t,t,[-5,5],'Color','r','LineWidth', 2)
%Centro de simetria
plot3(0,0,0,'.k','MarkerSize',25)
%Vertices
plot3(2,0,0,'.k','MarkerSize',25)
plot3(-2,0,0,'.k','MarkerSize',25)
plot3(0,3,0,'.k','MarkerSize',25)
plot3(0,-3,0,'.k','MarkerSize',25)
plot3(0,0,4,'.k','MarkerSize',25)
plot3(0,0,-4,'.k','MarkerSize',25)
```

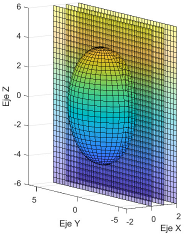

Figura: Elipsoide $(x^2/4) + (y^2/9) + (z^2/16) = 1$

La intersección del elipsoide con planos paralelos al plano yz, nos da una elipse o un punto

```
%Planos
fsurf(0,u,v,[-6,6,-6,6],'FaceAlpha', 0.4)
fsurf(1,u,v,[-6,6,-6,6],'FaceAlpha', 0.4)
fsurf(2,u,v,[-6,6,-6,6],'FaceAlpha', 0.4)
```

6.11 Hiperboloide de una hoja

La siguiente ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con $a, b, c > 0$ es un hiperboloide de una hoja con centro $(0, 0, 0)$ y eje principal $\{x = 0, y = 0\}$. El eje del hiperboloide se corresponde con la variable que tiene signo negativo. Los coeficientes de los términos de segundo grado, dos tienen signo positivo y otro negativo.

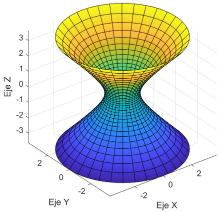

Figura: Hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Características del hiperboloide de una hoja:

- La superficie es simétrica con respecto a los tres planos coordenados $x = 0, y = 0$ y $z = 0$.
- El hiperboloide de una hoja es simétrico respecto a los ejes coordenados $\{x = 0, y = 0\}$, $\{x = 0, z = 0\}$ e $\{y = 0, z = 0\}$ y tiene como vértices los puntos $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, -b, 0)$.
- Cuando cortamos dicha superficie por un plano $x = k$ o $y = k$ se obtienen hipérbolas. Si se corta por un plano $x = \pm a$ o $y = \pm b$ se obtienen dos rectas que se cortan. Cuando cortamos dicha superficie por un plano $z = k$ obtenemos elipses.
- El caso $a = b$ es un hiperboloide de una hoja de revolución que se obtiene al girar una hipérbola alrededor del eje OZ. En ese caso, el corte por planos $z = k$ nos da circunferencias.

El hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

se representa en paramétricas como
$\{x = a\cosh(v)\cos(u), y = b\cosh(v)\sin(u), z = c\sinh(v)\}$ (u entre 0 y 2π, v entre dos valores reales).

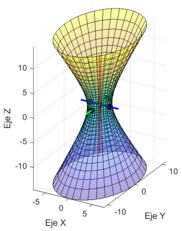

Figura: Hiperboloide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$

6.11 Hiperboloide de una hoja en paramétricas

```
%Hiperboloide de 1 hoja
syms u v
fig=fsurf(2*cosh(v)*cos(u),3*cosh(v)*sin(u),4*sinh(v),[0,2*pi,-2,2])
hold on
axis equal
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');
zlabel('Eje Z');
set(fig, 'FaceAlpha', 0.4)
%Ejes de simetria
syms t
fplot3(t,0*t,0*t,[-4,4],'Color','b','LineWidth', 2)
syms t
fplot3(0*t,t,0*t,[-5,5],'Color','g','LineWidth', 2)
syms t
fplot3(0*t,0*t,t,[-10,10],'Color','r','LineWidth', 2)
%Centro de simetria
plot3(0,0,0,'.k','MarkerSize',25)
%Vertices
plot3(2,0,0,'.k','MarkerSize',25)
plot3(-2,0,0,'.k','MarkerSize',25)
plot3(0,3,0,'.k','MarkerSize',25)
plot3(0,-3,0,'.k','MarkerSize',25)
```

Si queremos representar con Matlab el hiperboloide de una hoja $(x^2/4) - (y^2/9) + (z^2/16) = 1$ escribimos

```
syms u v
fsurf(2*cosh(v)*cos(u),3*sinh(v),4*cosh(v)*sin(u),[0,2*pi,-2,2])
axis equal
xlabel('Eje X'); ylabel('Eje Y'); zlabel('Eje Z');
```

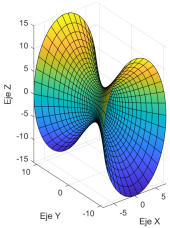

Figura: Hiperboloide $(x^2/4) - (y^2/9) + (z^2/16) = 1$

La siguiente ecuación

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con $a, b, c > 0$ es un hiperboloide de dos hojas con centro en el punto $(0, 0, 0)$ y eje principal $\{x = 0, y = 0\}$. El eje del hiperboloide se corresponde con la variable con signo positivo.

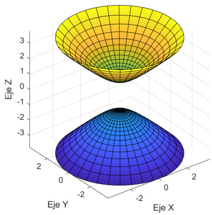

Figura: Hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

Características del hiperboloide de dos hojas:

- El hiperboloide de dos hojas es simétrico respecto a los ejes coordenados $\{x = 0, y = 0\}$, $\{x = 0, z = 0\}$ e $\{y = 0, z = 0\}$.
- Los vértices del hiperboloide son $(0, 0, c)$ y $(0, 0, -c)$.
- Cuando cortamos dicha superficie por un plano $z = k$ se obtienen elipses. En el caso $z = \pm c$ se obtienen puntos y si $-c < k < c$ la intersección es vacía. Cuando cortamos dicha superficie por un plano $x = k$ o $y = k$ obtenemos hipérbolas.
- La superficie es simétrica con respecto a los tres planos coordenados $x = 0, y = 0$ y $z = 0$.
- Si $a = b$ el hiperboloide es de revolución y se obtiene al girar una hipérbola alrededor del eje OZ.

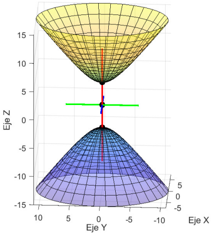

Figura: Hiperboloide $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$

6.13 Hiperboloide de dos hojas

```
%Hiperboloide de 2 hojas
syms u v
fig1=fsurf(2*sinh(v)*sin(u),3*sinh(v)*cos(u),4*cosh(v),[0,2*pi,-2,2])
hold on
fig2=fsurf(2*sinh(v)*sin(u),3*sinh(v)*cos(u),-4*cosh(v),[0,2*pi,-2,2])
axis equal
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');
zlabel('Eje Z');
set(fig1, 'FaceAlpha', 0.4)
set(fig2, 'FaceAlpha', 0.4)
%Ejes de simetria
syms t
fplot3(t,0*t,0*t,[-4,4],'Color','b','LineWidth', 2)
syms t
fplot3(0*t,t,0*t,[-6,6],'Color','g','LineWidth', 2)
syms t
fplot3(0*t,0*t,t,[-10,10],'Color','r','LineWidth', 2)
%Centro de simetria
plot3(0,0,0,'.k','MarkerSize',25)
%Vertices
plot3(0,0,4,'.k','MarkerSize',25)
plot3(0,0,-4,'.k','MarkerSize',25)
```

6.14 Hiperboloide de dos hojas en paramétricas

El hiperboloide de dos hojas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

se representa en paramétricas como
$\{x = a \sinh(v) \cos(u), y = b \sinh(v) \sin(u), z = c \cosh(v)\}$ (hoja 1),
$\{x = a \sinh(v) \cos(u), y = b \sinh(v) \sin(u), z = -c \cosh(v)\}$ (hoja 2) (u entre 0 y 2π, v entre dos valores reales).
Si queremos representar con Matlab el hiperboloide de dos hojas
$(x^2/4) - (y^2/9) - (z^2/16) = 1$ escribimos

```
syms u v
fsurf(2*cosh(v),3*sinh(v)*sin(u),4*sinh(v)*cos(u),[0,2*pi,-2,2])
hold on
fsurf(-2*cosh(v),3*sinh(v)*sin(u),4*sinh(v)*cos(u),[0,2*pi,-2,2])
axis equal
```

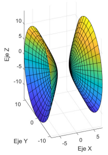

Figura: Hiperboloide $(x^2/4) - (y^2/9) - (z^2/16) = 1$

La siguiente ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

con $a, b, c > 0$ es un cono elíptico con vértice $(0, 0, 0)$ y eje principal $\{x = 0, y = 0\}$.

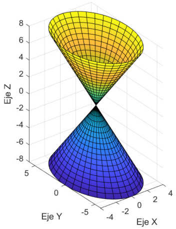

Figura: Cono $(x^2/4) + (y^2/9) - (z^2/16) = 0$

Características del cono elíptico:

- Cuando cortamos dicha superficie por un plano $z = k$ se obtienen elipses salvo el caso $k = 0$ que se obtiene un punto. Cuando cortamos dicha superficie por un plano $x = k$ o $y = k$ obtenemos hipérbolas. Cuando se corta por $x = 0$ e $y = 0$ se obtienen dos rectas que se cortan.
- Si $a = b$, el cono es de revolución.

La representamos en paramétricas como $\{x = a\ v\ \cos(u), y = b\ v\ \sin(u), z = c\ v\}$ (u entre 0 y 2π, v entre dos valores reales).
Si queremos representar con Matlab el cono elíptico $(x^2/4) + (y^2/9) - (z^2/16) = 0$ escribimos

```
syms u v
fsurf(2*v*cos(u),3*v*sin(u),4*v,[0,2*pi,-2,2])
axis equal
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');
zlabel('Eje Z');
```

La siguiente ecuación

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

con $a, b, c > 0$ es un paraboloide elíptico con eje principal $\{x = 0, y = 0\}$.

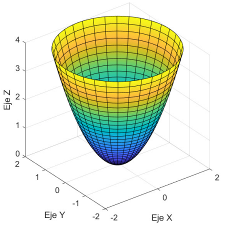

Figura: Paraboloide $z = x^2 + y^2$

Características del paraboloide elíptico:

- Cuando cortamos dicha superficie por un plano $z = k$ se obtienen elipses salvo para $z = 0$ que da un punto y para $z < 0$ que obtenemos el conjunto vacío. Cuando cortamos dicha superficie por un plano $x = k$ o $y = k$ obtenemos parábolas.
- El origen de coordenadas es el vértice $(0, 0, 0)$.
- El paraboloide elíptico es simétrico respecto al eje $\{x = 0, y = 0\}$.
- La superficie es simétrica con respecto a los planos coordenados $y = 0$ y $x = 0$.
- Si consideramos la siguiente ecuación

$$z = -(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$$

  obtenemos un paraboloide abierto hacia abajo.
- Si $a = b$ el paraboloide es de revolución que se obtiene al girar una paábola alrededor del eje OZ.

El paraboloide

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

se representa en paramétricas como $\{x = a\ v\ \cos(u), y = b\ v\ \sin(u), z = v^2\}$ (u entre 0 y 2π, v entre dos valores reales).
Si queremos representar con Matlab el paraboloide elíptico $y = (x^2/4) + (z^2/9)$ escribimos

```
syms u v
fsurf(2*v*cos(u),v^2,3*v*sin(u),[0,2*pi,0,2])
axis equal
xlabel('Eje X'); ylabel('Eje Y'); zlabel('Eje Z');
```

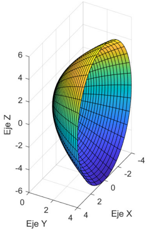

Figura: Paraboloide $y = (x^2/4) + (z^2/9)$

La siguiente ecuación

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

es un paraboloide hiperbólico que se asemeja a una silla de montar.

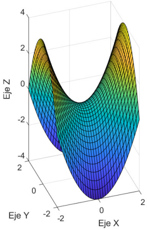

Figura: Paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$

Características del paraboloide hiperbólico:

- Es simétrico respecto del eje OZ (eje principal).
- La superficie es simétrica con respecto a los planos coordenados $y = 0$ y $x = 0$.
- Cuando cortamos dicha superficie por un plano $x = k$ o $y = k$ se obtienen parábolas. Cuando cortamos dicha superficie por un plano $z = k$ con $k \neq 0$ obtenemos hipérbolas, en el caso $z = 0$ se obtienen dos rectas que se cortan.

El paraboloide hiperbólico
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$
se puede representar en paramétricas como $\{x = a\ u, y = b\ v, z = (u^2 - v^2)\}$ (u y v entre dos valores reales).
Si queremos representar con Matlab el paraboloide hiperbólico $y = (x^2/4) - (z^2/9)$ escribimos

```
syms u v
fsurf(2*u,u^2-v^2,3*v,[-2,2,-2,2])
axis equal
xlabel('Eje X'); ylabel('Eje Y'); zlabel('Eje Z');
```

.

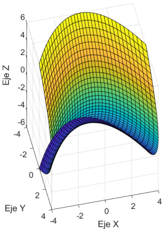

Figura: Paraboloide hiperbólico $y = (x^2/4) - (z^2/9)$