Geometría Analítica

Tema 2: La Circunferencia

Cristina Solares

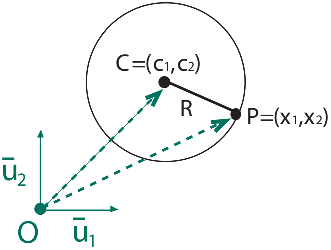
Universidad de Castilla-La Mancha

28 de septiembre de 2021

Definición (La Circunferencia)

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan una magnitud constante, llamada `radio`*, de un punto fijo, llamado* `centro`*.*

Si el sistema de referencia es métrico,



$$\boxed{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = R^2.} \qquad (1)$$

1. Escribir la ecuación
$$2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$$
en forma canónica.
Sol: $(x - (1/2))^2 + (y + (3/2))^2 = 4$.

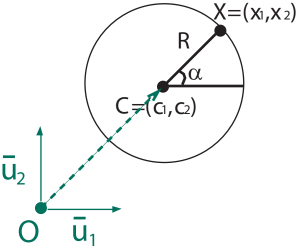
```
% Dibuja y calcula centro-radio de la circunferencia
%x^2+y^2+A*x+B*y+C=0. Se introducen los intervalos de dibujo
%en x e y
function circunferencia(A,B,C,intervalo)
fprintf('centro=[%f,%f]\n',-A/2,-B/2);
fprintf('radio=%f\n',sqrt((A^2/4)+(B^2/4)-C));
syms x y;
fimplicit(x^2+y^2+A*x+B*y+C,intervalo);
axis equal;
end
```

Por ejemplo,

```
circunferencia(-1,3,-3/2, [-7,5,-8,8])
```

2. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro $(3, -5)$ y radio 2.

En este último caso, llamando α al ángulo variable que forma $\overline{u}_1$ con la recta que une C y X, las ecuaciones paramétricas de la circunferencia son:



$$\boxed{\begin{array}{lcl} x_1 & = & c_1 + R\ \cos\alpha \\ x_2 & = & c_2 + R\ \sin\alpha \end{array}} \quad (2)$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$.
Dibujamos varios puntos de la circunferencia con centro $(3, -5)$ y radio 2:

```
for i=0:pi/4:2*pi
 plot(3+2*cos(i),-5+2*sin(i),'or');
 hold on
end
```

La ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + Ax_1 + Bx_2 + C = 0 \tag{3}$$

se puede escribir como

$$\left(x_1 + \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} + \left(x_2 + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + C = 0 \tag{4}$$

que es equivalente a

$$\left(x_1 + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \tag{5}$$

que es una circunferencia con centro $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ y radio R siendo $R^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$.

1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-2, 3)$ y radio 4.
   Sol: $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$.

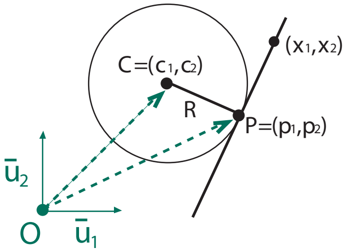
```
% Calcula la ecuacion de una circunferencia dado su centro y radio.
% Tambien dibuja la circunferencia en los intervalos dados
function ecu=circunferencia(centro,radio,intervalo)
    syms x y ecu;
    ecu=(x-centro(1))^2+(y-centro(2))^2-radio^2;
    fimplicit(ecu,intervalo);
    axis equal;
end
```

   Por ejemplo,

```
circunferencia([-2,3],4,[-8,6,-4,8]);
```

2. Hallar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$.
   Sol: Centro $(3/2, -5/2)$, radio $3\sqrt{10}/2$.
3. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(5, -2)$ y que pasa por el punto $(-1, 5)$.

2.3.1 Tangente a una Circunferencia en uno de sus Puntos



La pendiente de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos es la derivada particularizada en el punto, la ecuación de la tangente a una curva $f(x_1, x_2) = 0$ en un punto P de coordenadas (p_1, p_2), será

$$(x_2 - p_2) = \left(-\frac{f'_{x_1}}{f'_{x_2}}\right)_P (x_1 - p_1). \tag{6}$$

Dada la circunferencia

$$f(x,y) \equiv (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 - R^2 = 0, \tag{7}$$

y $P = (p_1, p_2)$ un punto de ella, entonces

$$\begin{aligned} f'_{x_1} &= 2(x_1 - c_1) \\ f'_{x_2} &= 2(x_2 - c_2), \end{aligned} \tag{8}$$

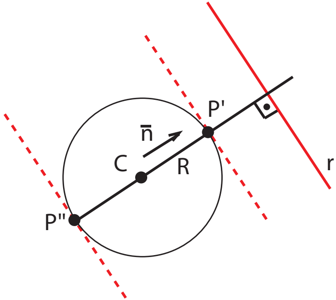
de donde

$$\left(-\frac{f'_{x_1}}{f'_{x_2}}\right)_P = -\frac{p_1 - c_1}{p_2 - c_2}, \tag{9}$$

y la ecuación de la recta tangente en P es

$$\boxed{(x_2 - p_2) = -\frac{p_1 - c_1}{p_2 - c_2}\,(x_1 - p_1).} \tag{10}$$

Considérese la circunferencia de centro $C = (c_1, c_2)$ y radio R. Supóngase conocida una dirección dada por una recta r. Si se traza la recta que pasa por el centro de la circunferencia normal a la recta r, los puntos de corte con la circunferencia dan los puntos de tangencia.
Supóngase que la recta r está dada por la ecuación, $r \equiv Ax + By + C = 0$, entonces el versor normal a r es $\overline{n} = \dfrac{(A, B)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ y los puntos de corte con la circunferencia son:

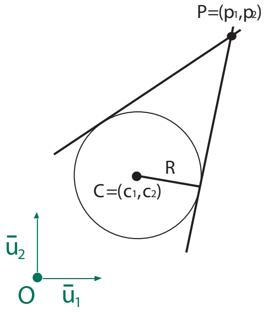


$$
\begin{aligned}
p_1 &= c_1 \pm R \, \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \\
p_2 &= c_2 \pm R \, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Según (10), las ecuaciones de las recta tangentes a la circunferencia en los puntos anteriores resultan ser:

$$
\boxed{\left(x_2 - c_2 \mp R\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = -\tfrac{A}{B}\left(x_1 - c_1 \mp R\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) \ .} \tag{12}
$$

Considérese la circunferencia de centro $C = (c_1, c_2)$ y radio R, y sea $P = (p_1, p_2)$ un punto exterior a ella.



La ecuación del haz de rectas que pasan por P es

$$r \equiv (x_2 - p_2) = \lambda(x_1 - p_1), \tag{13}$$

y la tangente dista del centro de la circunferencia una longitud igual al radio R, de donde se obtiene una ecuación que permite hallar los dos valores de λ que dan las dos tangentes:

$$d(C, r) = \frac{c_2 - p_2 - \lambda c_1 + \lambda p_1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = R. \tag{14}$$

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 4y = 56$ en el punto $(-1, 5)$.
   Sol: $y - 5 = (12/14)(x + 1)$.

```
%Dibujo de la circunferencia
circunferencia(-10,4,-56, [-5,15,-15,10])
hold on
%Dibujo del punto
P=[-1,5];
plot(P(1),P(2),'*r')
%Pendiente recta tangente en (-1,5)
syms x y
f=x^2+y^2-10*x+4*y-56;
m=subs(-diff(f,x)/diff(f,y),[x,y],P);
%Dibujo de la recta tangente a la circunferencia
% en  el punto P=(-1,5) con pendiente m=6/7
recta2D(P,m,[-5,15])
```

2. Hallar las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante y que sean tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$.
   Sol: Rectas $y = x + 2 + 2\sqrt{2}$ y $y = x + 2 - 2\sqrt{2}$.

3. Sea la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $R = 5$. Hallar la ecuación de las tangentes a dicha circunferencia desde el punto exterior $P(8, 0)$.
   Sol: $y = (5/\sqrt{39})(x - 8)$, $y = -(5/\sqrt{39})(x - 8)$.

Sea

$$x_1^2 + x_2^2 + Ax_1 + Bx_2 + C = 0 \tag{15}$$

la ecuación general de una circunferencia. Si se obliga a que pase por los tres puntos dados P, Q y R de coordenadas (p_1, p_2), (q_1, q_2) y (r_1, r_2) en el sistema de referencia correspondiente, se obtiene el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas A, B y C:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ap_1 + Bp_2 + C = -p_1^2 - p_2^2 \\ Aq_1 + Bq_2 + C = -q_1^2 - q_2^2 \\ Ar_1 + Br_2 + C = -r_1^2 - r_2^2. \end{array} \right. \tag{16}$$

Resolviendo en A, B y C,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -p_1^2 - p_2^2 \\ -q_1^2 - q_2^2 \\ -r_1^2 - r_2^2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

y sustituyendo en (15) se obtiene la ecuación buscada.

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1,5)$, $(-2,3)$ y $(2,-1)$.
Sol:$5x^2+5y^2-9x-19y-26=0$.

```
P=[1 5];Q=[-2 3];R=[2 -1];
syms x y A B C;
circun=x^2+y^2+A*x+B*y+C;
ecu1=subs(circun,[x y],P);
ecu2=subs(circun,[x y],Q);
ecu3=subs(circun,[x y],R);
sol=solve(ecu1==0,ecu2==0,ecu3==0,A,B,C);
ecu=x^2+y^2+(sol.A)*x+(sol.B)*y+sol.C;
fprintf('%s %c %d\n',ecu,'=',0);
fimplicit(x^2+y^2+sol.A*x+sol.B*y+sol.C,[-4,6,-4,6])
axis equal
```

Ejercicios

1. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(-1,1)$, y cuyo centro está situado en la recta $x-3y-11=0$.
   Sol: $x^2+y^2-7x+5y-14=0$.
2. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a $3x-4y-4=0$ en $(0,-1)$ y que contiene al punto $(-1,-8)$.
   Sol: $x^2+y^2-6x+10y+9=0$.
3. De un cuadrado ABCD se conoce el centro $M(3a/2,a)$ y el vértice $A(0,0)$. Hallar las coordenadas de los restantes vértices del mismo.
   Sol:$(5a/2,-a/2)$ y $(a/2,5a/2)$.
4. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ cuya distancia al punto fijo $C(2,-1)$ sea igual a 5.
   Sol: $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.
5. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos fijos $A(0,0)$ y $B(2,-4)$ sea igual a 20.
   Sol: $x^2+y^2-2x+4y=0$.
6. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los ejes coordenados sea igual al cuadrado de sus distancias al origen.
   Sol: $x^2+y^2-x-y=0$.
7. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $(-4,2)$ y que sea tangente a la recta $3x+4y-16=0$.
   Sol: $x^2+y^2+8x-4y+4=0$.