# Tema 7: Cálculo Integral. Funciones Reales de Variable Real.

Cristina Solares

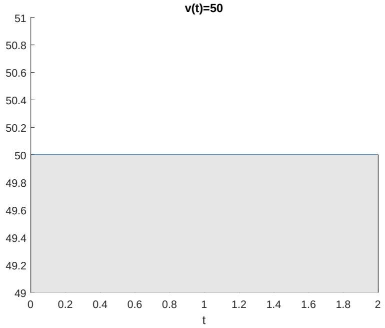
Universidad de Castilla-La Mancha

26 de noviembre de 2018

# Índice

Supongamos que un vehículo se mueve con velocidad $50km/h$ durante 2 horas, a lo largo de una línea recta.

¿Cuál es la distancia recorrida por el vehículo?



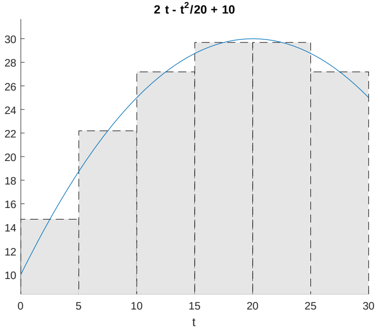

La distancia recorrida por el vehículo coincide con el área del rectángulo anterior.

Un vehículo se mueve a lo largo de una trayectoria recta con una velocidad

$$v(t) = 10m/s + (2{,}0m/s^2)t - \frac{1}{2}(0{,}10m/s^3)t^2.$$

Consideremos la función $v(t) = 10 + 2{,}0t - \frac{1}{2}0{,}10t^2$ en el intervalo $0 \leq t \leq 30$. Dicho intervalo se ha subividido en $n = 6$ subintervalos de amplitud $\Delta t = 5$. Se puede observar que la velocidad cambia en cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ (la amplitud del subintervalo es $\Delta t_i = 5$, para $i = 0, \ldots, 5$). En cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ se ha considerado su punto medio $c_i$ y se ha aproximado la velocidad en el mismo como $v(c_i)$.

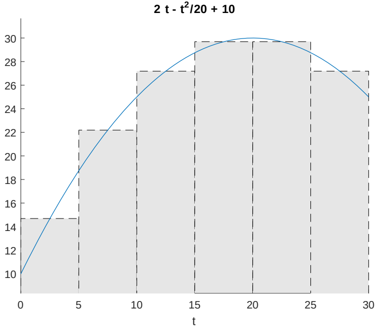
¿Cuál es la distancia recorrida en cada subintervalo?



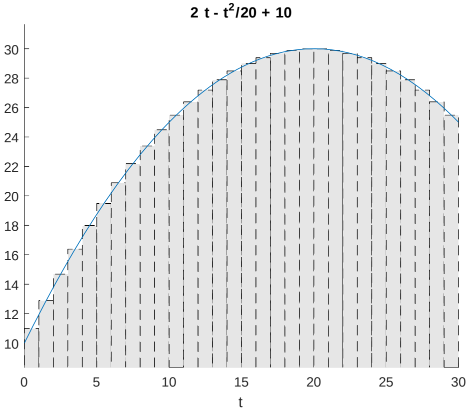
Ahora la velocidad en cada subintervalo es constante e igual a $v(c_i) = 10 + 2{,}0c_i - \frac{1}{2}0{,}10c_i^2$ y la distancia recorrida será $v(c_i)\Delta t_i$, para $i = 0, \ldots, 5$ (producto de la velocidad por el tiempo). Por lo tanto, podemos aproximar la distancia recorrida en cada subintervalo y sumar todas para obtener la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo $[0, 30]$

$$\Delta t(235/16 + 355/16 + 435/16 + 475/16 + 475/16 + 435/16) = 753{,}1250.$$

¿Qué interpretación geométrica tiene el valor anterior?



Para mejorar la aproximación, tomamos una nueva partición en el intervalo $[0, 30]$, considerando subintervalos de amplitud $\Delta t_i = 1$. El área que se obtiene es 750,1250.




¿Qué ocurre si vamos tomando particiones con amplitud de invertalo $\Delta t_i$ cada vez más pequeño ?

Por último, se calcula el límite cuando $\Delta t \to 0$ y el sumatorio se sustituye por la integral,

$$\int_0^{30} v(t)\, dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} v(c_i)\Delta t,$$

con $c_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Cuando $\Delta t$ es muy próximo a cero, escribimos $dt = \Delta t$ (diferencial de $t$).

Sea $f(x)$ una función acotada y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Considérese una partición $P$ del mismo

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{1}$$

Se denotará $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ la amplitud del intervalo $i$-ésimo. En cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ consideramos un punto intermedio $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Se define

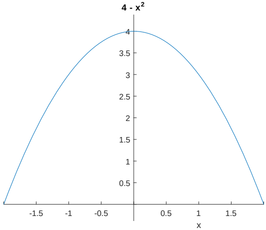
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta x_i. \tag{2}$$

con $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Se denota

$$||P|| = max\{\Delta x_i, i \in \{0, 2, \ldots n-1\}\} \tag{3}$$

Dada la función $f(x) = 4 - x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$. Se pide:

1. Dibujar la gráfica de la función.
2. Subdividir el intervalo $[-2, 2]$ en n=4 subintervalos con la misma longitud $\Delta x_i = 1$.
3. Construir rectángulos con base en cada subintervalo y altura $f(c_i)$, valor de $f$ en cada punto medio $c_i$.




En el caso $n = 4$ se obtiene que la suma de las áreas de los rectángulos es 11. Si tomamos $n = 8$ el área total es $10'75$. El valor exacto del área encerrada entre la gráfica de la función y el eje $OX$ es

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = 10'67.$$

**Teorema**

*Dadas $f(x)$, $g(x)$ funciones integrables, y $k \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. **Inversión de los límites.**
   *Si se invierten los límites de una integral, ésta cambia de signo*
   $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{4}$$
2. **Propiedad aditiva del integrando.**
   *La integral de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de las integrales*
   $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5}$$

**Teorema**

3. **Carácter lineal.**
*La integral del producto de un escalar por una función es igual al producto del escalar por la integral de la función*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

4. **Propiedad aditiva del intervalo.**
*Si una función $f(x)$ acotada es integrable en los intervalos $[a,b]$ y $[b,c]$ (siendo $a<b<c$), también lo es en $[a,c]$ y su integral vale*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx. \tag{7}$$

**Teorema (Acotación de una integral definida)**

*Sean $f$ y $g$ dos funciones integrables, se cumple que:*

- *Si $f(x) > 0$ en $[a, b]$, entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.*
- *Si $f(x) < g(x)$ en $[a, b]$ entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$.*
  *En particular, dadas $m$ y $M$ constantes, si $m < f(x) < M$, entonces*

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a). \tag{8}$$

**Teorema (Valor medio integral)**

*Sea $f$ una función integrable. Si $m$ es el valor mínimo y $M$ es el valor máximo de $f$ en $[a, b]$, se tendrá por el Teorema (.3) que:*

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a). \tag{9}$$

*de donde*

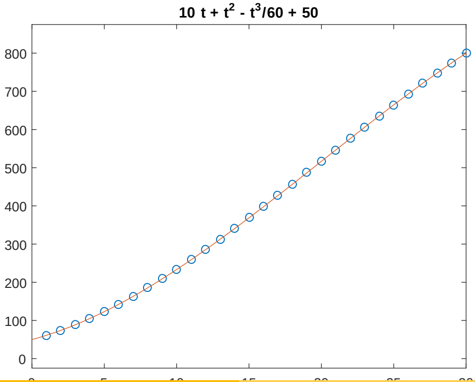
$$\int_a^b f(x)\,dx = \epsilon(b-a). \tag{10}$$

*donde $\epsilon \in (m, M)$*

Esto nos permite calcular la función distancia recorrida $s = f(t)$ en el intervalo $[0, t]$ (a partir de las áreas del apartado anterior),

$$f(t) = \int_0^t v(t)\, dt + C,$$

siendo $C$ una constante. En el este caso, el vehículo tenía un desplazamiento inicial $f(0) = 50$, podemos podemos considerar $C = 50$. En la siguiente gráfica se muestra una aproximación de la gráfica de la función distancia recorrida y la función $s = f(t) = 50 + 10t + t^2 - (1/6)0'10t^3$ para $t \in [0, 30]$.



**Definición (Función primitiva)**

*Una función $F$ de denomina función primitiva de una función $f$ en un intervalo $I$ si*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I. \tag{11}$$

**Teorema (Existencia de la primitiva de una función continua)**

*Sea $f(x)$ una función continua, la función definida por*

$$F(X) = \int_a^X f(x)dx, \tag{12}$$

*donde el límite superior $X$ es variable dentro del campo de continuidad de $f(x)$, es una primitiva de $f$.*

**Teorema (Unicidad de primitiva)**

*Dada $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$, cualquier otra primitiva $G(x)$ es de la forma*

$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{donde } C \text{ es una constante.} \tag{13}$$

**Teorema (La regla de Barrow)**

*Sea $f(x)$ función integrable en $[a, b]$. Si $F(x)$ es una función primitiva de $f$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{14}$$

**Ejemplo (Regla de Barrow)**

*Dada $f(x) = x^2$, una función primitiva de $f$ es*

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \tag{15}$$

*ya que*

$$\frac{d\ F}{d\ x} = \frac{3x^2}{3} = x^2. \tag{16}$$

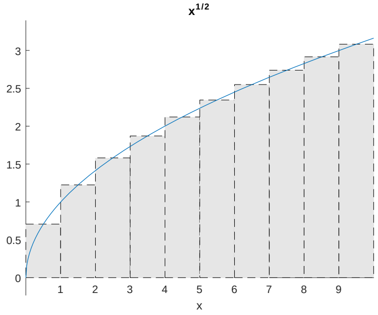
*Aplicando el Teorema anterior, se tiene que*

$$\int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}, \text{ para cualquier } a \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

El ritmo de crecimiento de una población de bacterias $\frac{dP}{dt}$ es proporcional a la raíz cuadrada de $t$, donde $P(t)$ es la población y $t$ es el tiempo en días $0 \leq t \leq 10$. Esto es,

$$\frac{dP}{dt} = k\sqrt{t}.$$

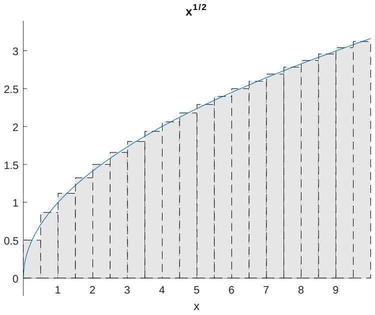
En la siguiente gráfica se muestra la función $\sqrt{t}$ dibujada en el intervalo $0 \leq t \leq 10$. Dicho intervalo se ha subividido en 10 subintervalos de amplitud $\Delta t = 1$. Se puede observar que el ritmo de crecimiento cambia en cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ (la amplitud del subintervalo es $\Delta t_i$, para $i = 0, \ldots, 9$). En cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ se ha considerado su punto medio $c_i$ y se ha aproximado el ritmo de crecimiento en el mismo como $\frac{dP}{dt}(c_i)$.



Ahora el ritmo de crecimiento en cada subintervalo es constante e igual a $\sqrt{c_i}$ y el crecimiento de la población será $\sqrt{c_i}\Delta t_i$, para $i = 0, \ldots, 9$ (producto de la velocidad por el tiempo). Por lo tanto podemos aproximar el crecimiento de la población $P(9)$ como el sumatorio (podemos suponer que todos los $\Delta t_i = \Delta t$)

$$\Delta t(0{,}7071+1{,}2247+1{,}5811+1{,}8708+2{,}1213+2{,}3452+2{,}5495+2{,}7386+2{,}9155+3{,}0822).$$

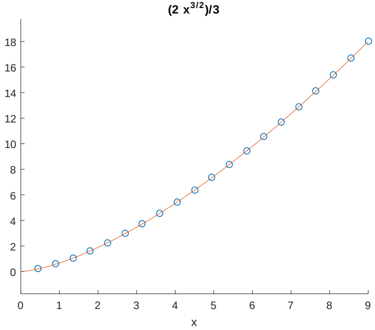
El valor anterior es el área encerrada por los rectángulos que aparecen en la figura y cuyo valor es 21,1362. Pero esto es una aproximación al valor de $P(9)$, lo que hacemos es tomar otra partición del intervalo $[0, 9]$ y calculamos el nuevo sumatorio anterior 21,1017.



Esto nos permite calcular la función crecimiento en el intervalo $[0, t]$ (a partir de las áreas del apartado anterior),

$$P(t) = \int_0^t \sqrt{t}\; dt + C,$$

siendo $C$ una constante. En el este caso puesto que el crecimiento inicial $P(0) = 0$, podemos considerar $C = 0$. En la siguiente gráfica se muestra una aproximación de la gráfica de la función crecimiento y la función $P = P(t) = (2/3)\; t^{3/2}$ para $t \in [0, 9]$.



1.
$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx. \tag{18}$$

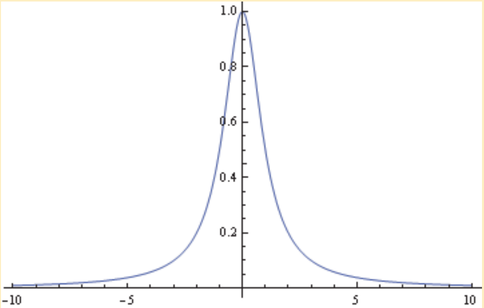
Si el límite es finito la integral impropia converge, en otro caso diverge.

2.
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{b} f(x)dx. \tag{19}$$

Si el límite es finito la integral impropia converge, en otro caso diverge.

3. Si los extremos inferior y superior de integración son $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente, se define
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx, \tag{20}$$
siendo $c \in (-\infty, \infty)$ cualquiera.

**Ejemplo (Generalización del concepto de integral)**




*Dada la función integrable* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$*. Para calcular la integral definida de* $f(x)$ *en* $[-\infty, +\infty]$ *se puede tomar* $c = 0$*, de donde*

**Ejemplo (Generalización del concepto de integral)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}. \tag{21}$$

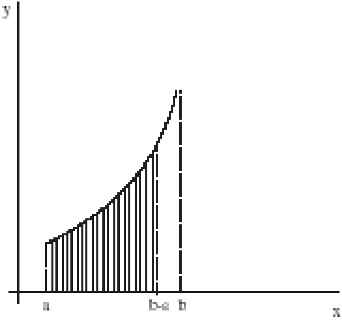
*Como $f$ es simétrica respecto del eje $y$, basta calcular*

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} [\arctan x]_{-\infty}^{0} = \pi/2. \tag{22}$$

*Luego*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2 + \pi/2 = \pi. \tag{23}$$

1. Si la función $f(x)$ se hace infinita en el extremo superior



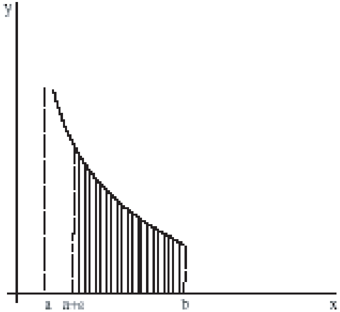

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \qquad (24)$$

si existe este límite y es finito, se dice que la integral converge. En otro caso se dice que diverge.

Si se conoce una función primitiva $F(x)$ continua en el intervalo completo $[a, b]$, se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0}[F(b-\epsilon) - F(a)] = F(b) - F(a). \tag{25}$$

2. Si la función $f(x)$ se hace infinita en el extremo inferior




$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx \tag{26}$$

si existe este límite y es finito, se dice que la integral converge. En otro caso se dice que diverge.

Si se conoce una función primitiva $F(x)$ continua en el intervalo completo $[a, b]$, se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} [F(b) - F(a+\epsilon)] = F(b) - F(a). \tag{27}$$

3. Sea $f$ una función continua en $[a, b]$ excepto en $c \in (a, b)$ y supóngase que $\lim\limits_{x \to c} |f(x)| = \infty$, entonces se define

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \tag{28}$$

que converge si lo hacen las dos integrales en el lado derecho de la igualdad anterior y diverge en caso contrario.

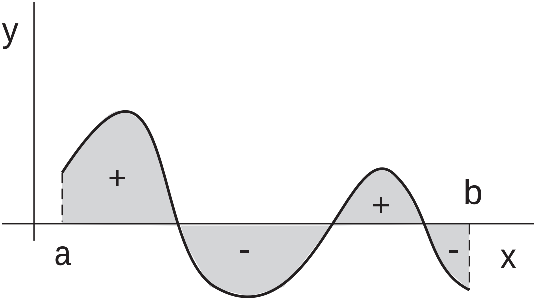
- El cálculo del área de la región del plano limitada por el eje $x$ y un arco de curva dada mediante su ecuación cartesiana explícita $y = f(x)$, con $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, y las rectas $x = a$ y $x = b$ conduce al concepto de integral definida:

$$A = \int_a^b f(x)dx. \tag{29}$$

- Si la función $f(x) \leq 0$ en $[a, b]$, el área del trapezoide limitado por $y = f(x)$, el eje $x$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ es

$$A = -\int_a^b f(x)dx. \tag{30}$$

- Si la función $f(x)$ cambia de signo un número finito de veces en el segmento $[a, b]$, entonces se puede descomponer la integral a lo largo de dicho segmento, en la suma de integrales en los segmentos parciales, de forma que dicha integral es positiva donde $f(x) \geq 0$ y negativa en otro caso.



### Ejemplo (Integral)

*La integral de la función $f(x) = \sin x$ (ver Figura 1), en el intervalo $[0, 2\pi]$ es*

$$I = \int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos 0 = 0. \tag{31}$$

*En la Figura se puede observar que $f(x) > 0$ para $x \in [0, \pi]$ y $f(x) < 0$ para $x \in [\pi, 2\pi]$ y que en estos intervalos el área delimitada por $f(x)$ es la misma.*

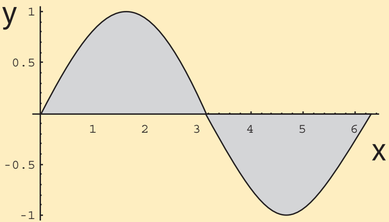
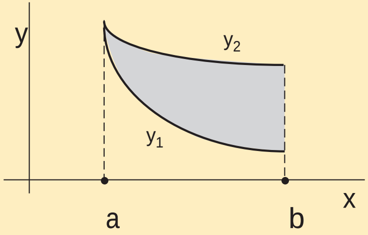



Figura: Función $\sin x$.

## Teorema ( Área limitada por dos curvas)

*Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Para calcular el área limitada por las gráficas de ambas funciones, se resta del área limitada por la curva superior, $y_2$, el área limitada por la curva inferior $y_1$,*

$$\int_a^b (y_2 - y_1)dx. \tag{32}$$



**Ejemplo (Área limitada por dos curvas)**

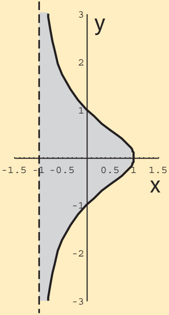
*Considerar las funciones* $f(x) = 2^x$ *y* $g(x) = 2x - x^2$. *Para calcular el área limitada por las gráficas de estas funciones y las rectas* $x = 0$ *y* $x = 2$ *se aplica el Teorema anterior. Teniendo en cuenta que* $f(x) > g(x)$, $\forall x \in [0, 2]$, *se obtiene,*

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 (2^x - (2x - x^2))dx \\ &= \int_0^2 2^x\, dx - \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^2 - \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{\log 2} - \frac{4}{3}. \end{aligned} \tag{33}$$

## Ejemplo (Cálculo de áreas)

*Considérese la gráfica de la ecuación*

$$y^2 = \frac{1-x}{1+x}. \tag{34}$$



## Ejemplo (Cálculo de áreas)

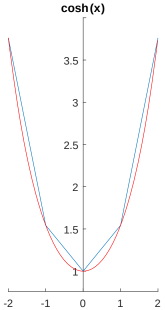
*Como la función es simétrica respecto del eje de las $x$, para calcular el área $A$ de la región del plano limitada por esta función y su asíntota, la recta $x = -1$, se calcula el área $A_1$ de la región del plano limitada por la parte positiva de $f$, su asíntota y el eje de las $x$, y se multiplica por 2:*

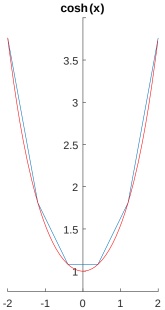
$$A = 2A_1 = 2\int_1^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) dx = 2\int_1^{-1} \left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$
$$= [2 \arcsin x]_{-1}^{1} + \left[2\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = 2\pi. \tag{35}$$

El término catenaria se emplea normalmente para referirse a los cables del tendido eléctrico en los ferrocarriles. En matemáticas se emplea la palabra catenaria para designar la curva cuyo trazado sigue la forma que adquiere una cadena o cuerda de densidad uniforme y perfectamente flexible sujeta por sus dos extremos y que se encuentra sometida únicamente a las fuerzas de la gravedad. La ecuación de la catenaria tomando su mínimo en el punto $(0, a)$ es:

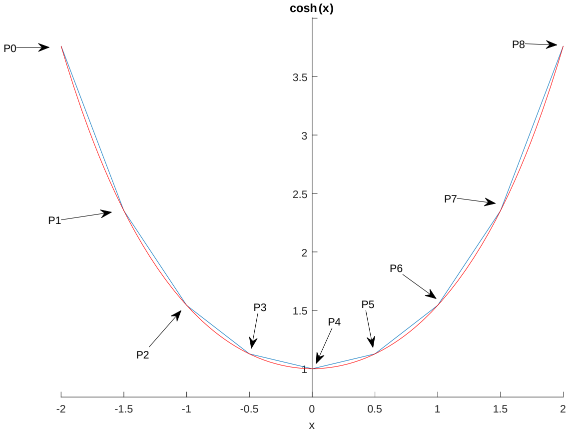
$$y = a\cosh(x/a) = \frac{a}{2}(e^{(x/a} + e^{-x/a}).$$

Consideremos la catenaria anterior para $x \in [-2, 2]$ y $a = 1$. En las siguientes figuras se muestra la poligonal que se obtiene al tomar una partición del intervalo $[-2, 2]$ en 4 y 5 subintervalos, respectivamente. La longitud de la poligonal en cada caso es es $7'1440$ y $7'1837$.

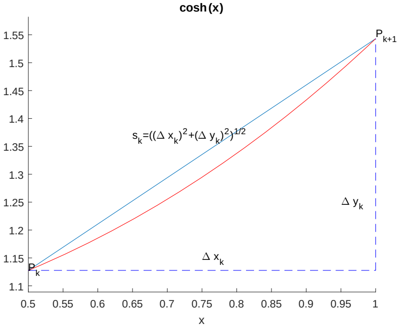


Si consideramos una partición en 8 subintervalos, obtenemos que la longitud de la poligonal es $7'2265$.



# Longitud de una catenaria



**Definición (Arco de curva)**

*Dada $y = f(x)$ una función continua y con derivada continua. El trozo de la gráfica, que está comprendida entre las abscisas $x = a$ y $x = b$ se llama, arco de curva en el intervalo $[a, b]$.*

Para hallar la longitud de este arco basta tomar una partición del intervalo $[a, b]$

$$\{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}. \tag{36}$$

Si se designa por $P_k$ el punto $(x_k, y_k)$ de la gráfica, donde $y_k = f(x_k)$. Uniendo los puntos $P_0, P_1, \ldots, P_n$ se obtiene una poligonal cuya longitud aproxima a la del arco de curva. La longitud de la poligonal es la suma de las longitudes $s_k$ de los segmentos $\overline{P_k P_{k+1}}$. Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos, si se denota $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, se obtiene que

$$s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\ \Delta x_k. \tag{37}$$

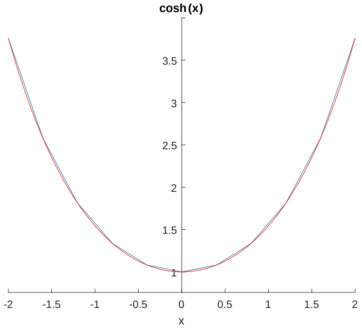
Aplicando el Teorema del valor medio se obtiene

$$s_k = \sqrt{1 + (y'(c_k))^2}\Delta x_k, \tag{38}$$

siendo $c_k$ un valor perteneciente al intervalo $\Delta x_k$ considerado.
Por tanto la longitud del arco de curva se puede aproximar por

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(c_k))^2}\Delta x_k. \tag{39}$$

Consideremos la catenaria anterior para $x \in [-2, 2]$ y $a = 1$. En la siguiente figura se muestra la poligonal que se obtiene al tomar una partición del intervalo $[-2, 2]$ en 10 subintervalos. La longitud de la poligonal es 7.2363.



**Definición (Longitud de un arco de curva)**

*Se puede definir la longitud del arco de curva L como*

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} \sum \sqrt{1 + (y'(c_k))^2}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \tag{40}$$

La longitud de la catenaria anterior es:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \sinh(x)^2}\, dx = 7{,}2537.$$

## Ejemplo (Longitud de un arco de curva)

*Se quiere hallar la longitud de la circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radio* $r$*, dada por su ecuación en implícitas*

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{41}$$

*Basta calcular la longitud del arco de circunferencia comprendida en el primer cuadrante y multiplicarla por cuatro. La Ecuación (41) en el primer cuadrante queda*

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}. \tag{42}$$

*Por tanto, la longitud total* $L$ *cumple,*

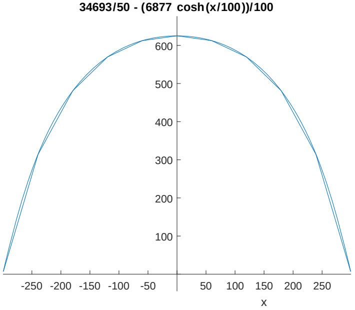
$$\frac{1}{4}L = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = \left[r \arcsin \frac{x}{r}\right]_0^r = r\frac{\pi}{2}. \tag{43}$$

# Longitud del Arco Gateway

El arco Gateway de St. Louis Missouri está diseñado con el modelo

$$y = 693{,}86 - 68{,}77 * cosh(0{,}01x).$$

para $x \in [-299{,}22, 299{,}22]$. En la siguiente figura se muestra la poligonal que se obtiene al tomar una partición del intervalo $[-299{,}22, 299{,}22]$ en 10 subintervalos. La longitud de la poligonal es $1464'0$.

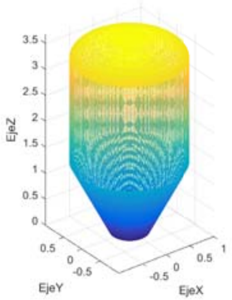



Si tomamos una partición del intervalo en 20 subintervalos, la longitud que se obtiene es $1466'7$. El valor exacto es $1{,}467'8$.

# Volumen de un silo

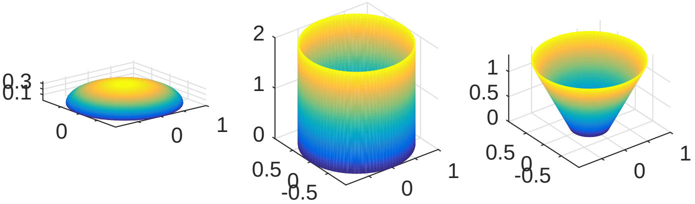
Se está predimensionando un silo de chapa metálica, cuya superficie es un sólido de revolución formado por tres piezas soldadas (véase la Figura 1):

- **Pieza I**: la pieza superior ("tapa"del silo) es medio elipsoide de revolución de radio 1 y altura 1/3.
- **Pieza II**:la pieza intermedia es un cilindro vertical de sección circular de altura 2 y radio 1.
- **Pieza III**:la pieza inferior es un tronco de cono de revolución de altura 4/3, y radios de las secciones circulares superior e inferior 1 y 1/3 respectivamente, alojando ésta última la válvula de vaciado de fondo.



# Volumen de un silo

Para calcular el volumen del silo, vamos a calcular el volumen de cada pieza.



1. La ecuación de la pieza I es

$$x^2 + y^2 + 9z^2 = 1$$

para $0 \leq z \leq 1/3$.

2. La ecuación de la pieza intermedia II es

$$x^2 + y^2 = 1$$

para $0 \leq z \leq 2$.

3. La ecuación de la pieza III (pieza inferior) es

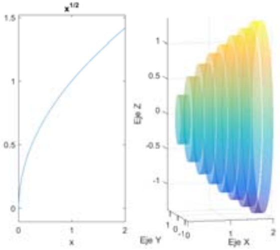
$$x^2 + y^2 - \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$$

para $0 \leq z \leq (4/3)$.

# Volumen de un silo

Las curvas que se giran alrededor del eje vertical $OZ$ para obtener los sólidos son

1. La curva de la pieza I es
$$y^2 + 9z^2 = 1$$
para $0 \leq z \leq 1/3$.
2. La ecuación de la pieza intermedia II es
$$y = 1$$
para $0 \leq z \leq 2$.
3. La ecuación de la pieza III (pieza inferior) es
$$z = 2y - (2/3)$$
para $0 \leq z \leq (4/3)$.



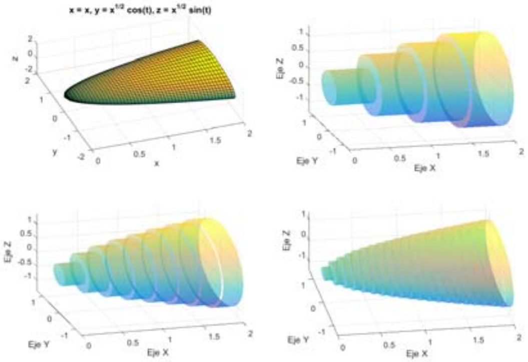
Supongamos que queremos hallar el volúmen del sólido que resulta al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje $OX$ para $x \in [a, b]$. Se toma una partición del intervalo $[a, b]$,

$$\{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}. \tag{44}$$

Considérese $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dado por $c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ considérese el rectángulo con longitud de la base $\Delta x_i$ y con altura $f(c_i)$. Dicho rectángulo se gira alrededor del eje $OX$ y engendra un disco de volumen $\pi f(c_i)^2 \Delta x_i$. Sumando el volumen de cada disco y tomando el límite cuando la partición se hace cada vez más pequeña se obtiene el volumen del sólido

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\, f(c_i)^2\, \Delta x_i = \int_a^b \pi\, f(x)^2\, dx. \tag{45}$$

Por ejemplo, si giramos la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje $OX$ para $x \in [0, 2]$, se obtiene un sólido de revolución cuyo volumen se puede aproximar sumando los volúmenes de discos perpendiculares al eje de giro, para $n = 4, 8, 20$.

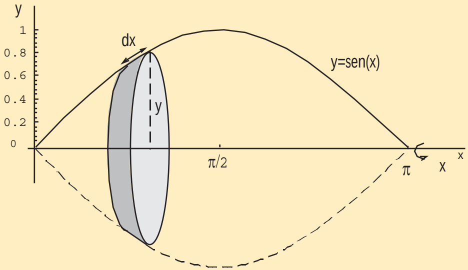



El valor exacto de la integral es

$$\int_0^2 \pi \ x \ dx = 2\pi.$$

## Ejemplo (Volumen de un cuerpo de revolución, por discos)

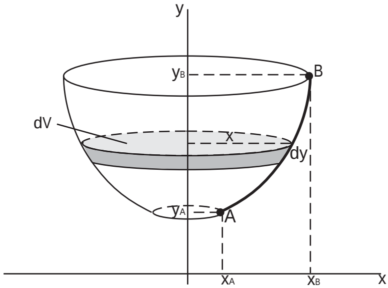
*Dada la curva* $y = \sin x$*, con* $x \in [0, \pi]$*, se va a obtener el volumen del sólido engendrado al girar la curva alrededor del eje* $x$*. Para ello se tomarán discos perpendiculares al eje de giro.*



**Ejemplo (Volumen de un cuerpo de revolución, por discos)**

$$\begin{aligned} V = & \int_0^{\pi} \pi y^2 dx = \int_0^{\pi} \pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ & = \pi \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned} \tag{46}$$

Si giramos la curva $y = f(x)$ alrededor del eje $OY$, se obtiene



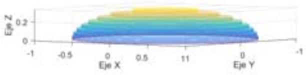

Un método para calcular el volumen de un cuerpo de revolución es rellenar dicho cuerpo por discos perpendiculares al eje de giro. El volumen del solido es

$$V = \int_{y_A}^{y_B} \pi (x(y))^2 dy. \tag{47}$$

La curva de la pieza I es

$$y^2 + 9z^2 = 1$$

para $0 \leq z \leq 1/3$. Para $n = 4$ se obtiene que el volumen es 0,7036 y para $n = 20$ el volumen es 0,6983.




El valor exacto es

$$\int_0^{1/3} \pi \left(1 - 9z^2\right) dz = (2\pi)/9 = 0{,}6981.$$

La ecuación de la pieza intermedia II es

$$y = 1$$

para $0 \leq z \leq 2$. El valor exacto del volumen es

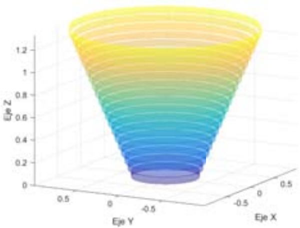
$$\int_0^2 \pi \, dz = 2\pi = 6{,}2832.$$

# Volumen de un silo

La ecuación de la pieza III (pieza inferior) es

$$z = 2y - (2/3)$$

para $0 \leq z \leq (4/3)$. Para $n = 4$ se obtiene que el volumen es 2,0071 y para $n = 20$ el volumen es 2,0164.




El valor exacto es

$$\int_0^{4/3} \pi \left((z/2) + (1/3)\right)^2 \, dz = (52\pi)/81 = 2{,}0168.$$

- Si giramos la curva $y = f(x)$ alrededor del eje $OY$, se puede calcular el volumen como

$$V = \int_{y_A}^{y_B} \pi (x(y))^2 dy = \int_{x_A}^{x_B} \pi x^2 y'(x) dx. \tag{48}$$

- Si giramos la curva $y = f(x)$ alrededor del eje $OX$, se puede calcular el volumen como

$$V = \int_a^b \pi \; f(x)^2 \; dx = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi \; y^2 \; x'(y) \; dy. \tag{49}$$

Se ha diseñado un depósito de agua con las siguientes características:

- El cerramiento exterior está formado por un hiperboloide de revolución de ecuación:

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 = 2.$$

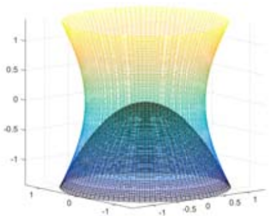
para $-\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}$.

- El fondo del depósito está formado por un paraboloide de revolución de ecuación:

$$\sqrt{2}\, z + x^2 + y^2 = 0$$

para $-\sqrt{2} \leq z \leq 0$, quedando el agua almacenada por encima de este paraboloide de revolución.

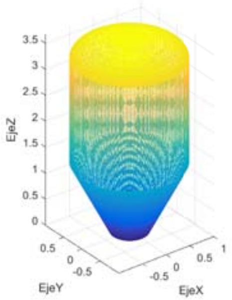
Se quiere calcular la capacidad del depósito, ¿qué integral definida (o integrales) tenemos que plantear?.



# Área de un silo

Se está predimensionando un silo de chapa metálica, cuya superficie es un sólido de revolución formado por tres piezas soldadas (véase la Figura 1):

- **Pieza I**: la pieza superior ("tapa" del silo) es medio elipsoide de revolución de radio 1 y altura 1/3.
- **Pieza II**:la pieza intermedia es un cilindro vertical de sección circular de altura 2 y radio 1.
- **Pieza III**:la pieza inferior es un tronco de cono de revolución de altura 4/3, y radios de las secciones circulares superior e inferior 1 y 1/3 respectivamente, alojando ésta última la válvula de vaciado de fondo.



Para calcular el área del silo, vamos a calcular el área de cada pieza.

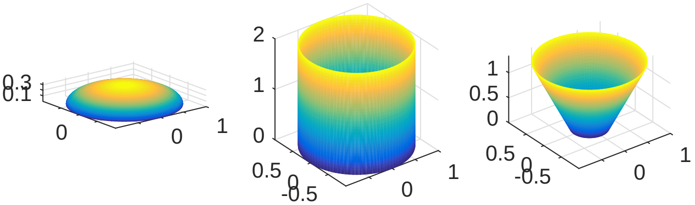



Figura: Gráfica con las tres piezas del Silo.

1. La ecuación de la pieza I es

$$x^2 + y^2 + 9z^2 = 1$$

   para $0 \leq z \leq 1/3$.
2. La ecuación de la pieza intermedia II es

$$x^2 + y^2 = 1$$

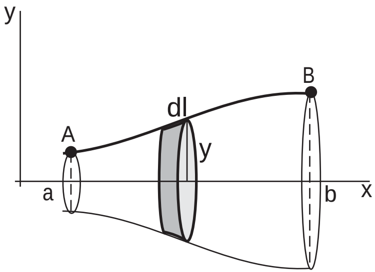
   para $0 \leq z \leq 2$.
3. La ecuación de la pieza III (pieza inferior) es

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$$

   para $0 \leq z \leq (4/3)$.

Las curvas que se giran alrededor del eje vertical $OZ$ para obtener los sólidos son

1. La curva de la pieza I es
$$y^2 + 9z^2 = 1$$
para $0 \leq z \leq 1/3$.
2. La ecuación de la pieza intermedia II es
$$y = 1$$
para $0 \leq z \leq 2$.
3. La ecuación de la pieza III (pieza inferior) es
$$z = 2y - (2/3)$$
para $0 \leq z \leq (4/3)$.




**Definición**

*El área de la superficie $S$ obtenida rotando la curva $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$ alrededor del eje $X$ es*

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{50}$$

Para calcular el área de dicha superficie de revolución, se toma una partición del intervalo $[a, b]$,

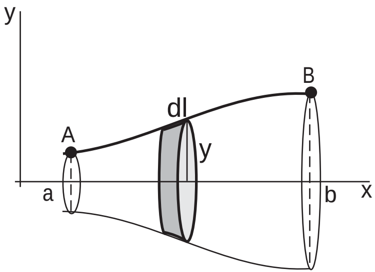
$$\{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}. \tag{51}$$

Se designa por $P_i$ el punto $(x_i, y_i)$ de la gráfica, donde $y_i = f(x_i)$. El área de la superficie en $[x_{i-1}, x_i]$ se aproxima girando alrededor del eje $x$ el segmento de recta $P_{i-1}P_i$. El resultado es un tronco de cono, cuyo área para valores pequelos $\Delta x_i$ es

$$2\pi\ f(c_i)\ \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i \tag{52}$$

donde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
El área de la superficie de revolución se puede calcular como

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\ f(c_i)\ \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\Delta x_i = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx. \tag{53}$$



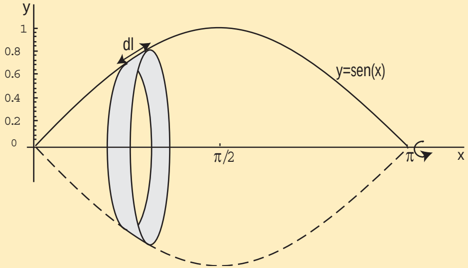

**Nota**

*El área de la superficie $S$ obtenida rotando la curva $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$ alrededor del eje $X$ también se puede calcular considerando $x = g(y)$ y resolviendo la integral*

$$S = \int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy. \qquad (54)$$

Ejemplo (Área de una superficie de revolución)

*Dada la curva* $y = \sin x$*, con* $x \in [0, \pi]$*, se va a obtener el área del sólido engendrado al girar la curva alrededor del eje* $x$*.*



**Ejemplo (Área de una superficie de revolución)**

*Considerando un trozo de curva de longitud $dl$, el área del sólido engendrado al girar dicho trozo de curva es*

$$dS = 2\pi y \; dl = 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} \; dx. \tag{55}$$

*El área total es*

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} \; dx = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} \; dx. \tag{56}$$

*Haciendo el cambio, $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$, el área queda*

$$S = 4\pi \int_1^0 -\sqrt{1 + t^2} \; dt = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} \; dt = 4\pi \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arg\,sinh} 1 \right] .. \tag{57}$$

**Nota**

*El área de la superficie $S$ obtenida rotando la curva $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$ alrededor del eje $Y$ se puede calcular resolviendo la integral*

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \tag{58}$$

**Nota**

*El área de la superficie $S$ obtenida rotando la curva $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$ alrededor del eje $Y$ se puede calcular considerando $x = g(y)$ y resolviendo la integral*

$$S = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy. \tag{59}$$

En el ejemplo del silo,

1. Para la pieza I: ¿Qué integral tenemos que plantear para calcular su área?.
2. Para la pieza intermedia II: ¿Qué integral tenemos que plantear para calcular su área?.
3. Para la pieza III (pieza inferior): ¿Qué integral tenemos que plantear para calcular su área?.

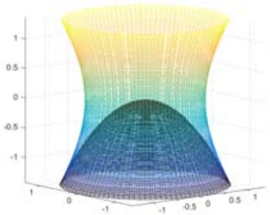
En el ejemplo del silo, las integrales a resolver para calcular su área son

1. Para la pieza I es
$$\int_0^1 2\pi y\sqrt{1+\frac{x^2}{9(1-y^2)}}dx.$$
2. Para la pieza intermedia II es
$$\int_0^2 2\pi dy.$$
3. Para la pieza III (pieza inferior) es
$$\int_{1/3}^1 2\pi x\sqrt{5}dx.$$

Se ha diseñado un depósito de agua con las siguientes características:

- El cerramiento exterior está formado por un hiperboloide de revolución de ecuación:
$$2x^2 + 2y^2 - z^2 = 2.$$
para $-\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}$.
- El fondo del depósito está formado por un paraboloide de revolución de ecuación:
$$\sqrt{2}\, z + x^2 + y^2 = 0$$
para $-\sqrt{2} \leq z \leq 0$, quedando el agua almacenada por encima de este paraboloide de revolución.

Se quiere pintar el fondo del depósito, ¿qué integral definida tenemos que plantear?.

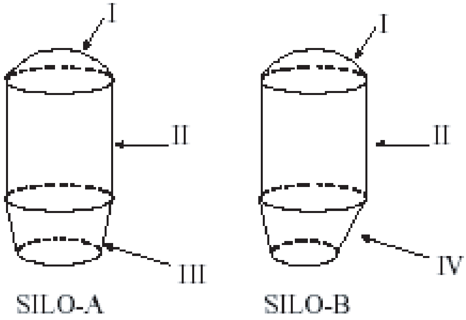


1. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $x = -2y^2$ y $x = 1 - 3y^2$.
2. Determinar el área común que limitan dos elipses iguales con centro en el origen y semiejes $a$ y $b$ permutados:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad y \quad \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1. \tag{60}$$

3. Obtener el perímetro del triángulo curvilíneo acotado por el arco de circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2$, y la curva de ecuación $y = (|x|)^{1/2}$.
4. Obtener el radio de la circunferencia de centro el origen de coordenadas, que divide en el primer cuadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$) al arco de astroide de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ en tres arcos de igual longitud.

5. Se está predimensionando un silo de chapa metálica, para lo que se estudian dos esquemas



## SILO-A

Este silo es un cuerpo de revolución formado por tres piezas soldadas:

- la pieza superior **I** ("tapa" del silo) es medio elipsoide de revolución de radio $H/2$ y altura $H/6$.
- la pieza intermedia **II** es un cilindro vertical de sección circular de altura $H$ y radio $H/2$.
- la pieza inferior **III** es un tronco de cono de revolución de altura $2H/3$, y radios de las secciones circulares superior e inferior $H/2$ y $H/6$ respectivamente, alojando ésta última la válvula de vaciado de fondo.

SE PIDE:

1. Plantear el volumen del SILO-A.
2. Calcular el volumen del SILO-A.
3. Plantear la expresión del área del SILO-A.

**SILO-B**

Se estudia una segunda solución consistente en cambiar la pieza **III**, por una pieza **IV** que también es un tronco de cono con la misma altura $2H/3$, y los mismos radios superior $H/2$ e inferior $H/6$. Este segundo tronco de cono no es de revolución sino que es un cono oblicuo: si tomamos como eje vertical el eje $OZ$, y los ejes $OX$, $OY$ que se muestran en la Figura **??**, y tomando además como cota $z = 0$ la base del silo SILO-B, la ecuación de la pieza **IV** será

$$x^2 + \left(y - \frac{z}{2} - \frac{H}{6}\right)^2 = (\frac{z}{2} + \frac{H}{6})^2. \tag{61}$$

SE PIDE:

1. Plantear y calcular el volumen del SILO-B. ¿Es mayor o menor que el volumen del SILO-A?.

6. Se ha diseñado un depósito de agua (“depósito del hipódromo de la Zarzuela, E.Torroja 1935) con las siguientes características:
   - El cerramiento exterior está formado por un hiperboloide de revolución de ecuación:
   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{2a^2}=1. \tag{62}$$
   - El fondo del depósito está formado por un paraboloide de revolución de ecuación:
   $$z=-\frac{x^2+y^2}{a\sqrt{2}}. \tag{63}$$
   quedando el agua almacenada por encima de este paraboloide de revolución.
   - Las cotas máxima y mínima del depósito son, respectivamente,
   $$z_{max}=a\sqrt{2}; \quad z_{min}=-a\sqrt{2}. \tag{64}$$

SE PIDE:

1. Plantear mediante integrales definidas exclusivamente, dos expresiones para calcular la capacidad del depósito (volumen máximo de agua máximo a almacenar): una mediante integración por discos y otra mediante integración por tubos.
2. Calcular la capacidad del depósito.

8. Se ha diseñado un dique para un puerto deportivo de 100 metros de largo, y una sección transversal trapezoidal simétrica. Tomando unos ejes de referencia $XYZ$ de manera que $OZ$ es vertical y positivo hacia arriba, se considera:
   - $z = 0$ es la superficie libre del agua.
   - El fondo del mar viene definido por la expresión
   $$z = -\frac{10x^2}{x^2 + 100^2}. \tag{65}$$
   - El dique apoya directamente sobre el fondo del mar. Tiene como coronación $z = 2$ (la superficie horizontal está 2 metros por encima de la superficie libre del agua). Los taludes laterales vienen definidos por los planos: (T1)$z - 2y = 10$; (T2) $z + 2y = 2$.
   - Tiene una longitud de 100 metros y viene definido entre los planos (P1) $x = 0$; (P2) $x = 100$.

SE PIDE:

1. Plantear, mediante integrales definidas exclusivamente, la expresión que permita calcular el volumen de material que compone el dique.
2. Calcular el valor exacto de dicho volumen.

9. En una estación depuradora de agua, hay que construir un tanque de altura $H$. Dicho tanque es un recipiente formado por superficies de revolución que "giran.ªlrededor del eje vertical $OZ$ (se considera $z$ positivo hacia arriba).
El cierre exterior está formado por un fondo o "soleraz una pared lateral definidos por:

$$Fondo_z = \frac{x^2}{9H},$$

$$Pared_z = \frac{x^2}{H} - 3H.$$

Hay un cierre interior alrededor del eje de giro que alojará el equipo de depuración y viene definido por las rectas:

$$z = 5x\ (z\ \ entre\ \ 0\ \ y\ \ H/2),$$

$$x = H/10\ (z\ \ entre\ \ H/2\ \ y\ \ H).$$

El agua se almacenará entre el cierre exterior y el interior: cota mínima $z = 0$, máxima $z = H$.

SE PIDE:

1. Plantear por medio de integrales definidas la expresión del volumen del tanque (integrar por discos).
2. Calcular el volumen del tanque.
3. Se desea impermeabilizar toda la superficie del tanque en contacto con el agua, plantear por medio de integrales definidas la expresión de dicho área.