Instrumentos Matemáticos para la Ingeniería II

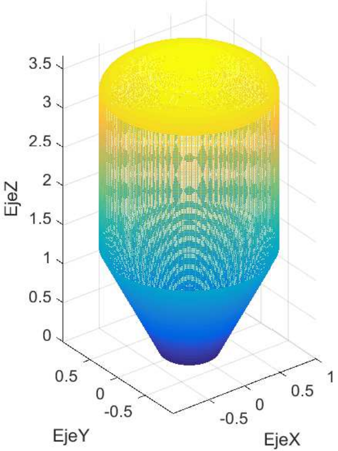
Tema 6: Integrales Dobles

Cristina Solares

Universidad de Castilla-La Mancha

2 de marzo de 2024

Se está predimensionando un silo de chapa metálica, cuya superficie es un sólido de revolución formado por tres piezas soldadas (véase la Figura 1):



- **Pieza I**: la pieza superior ("tapa" del silo) es medio elipsoide de revolución de radio 1 y altura 1/3. Se obtiene girando la curva $\{y^2 + 9z^2 = 1, x = 0\}$ para $0 \leq z \leq 1/3$, alrededor del eje vertical OZ.
- **Pieza II**:la pieza intermedia es un cilindro vertical de sección circular de altura 2 y radio 1. Se obtiene girando la curva $\{y = 1, x = 0\}$ para $0 \leq z \leq 2$, alrededor del eje vertical OZ.
- **Pieza III**:la pieza inferior es un tronco de cono de revolución de altura 4/3, y radios de las secciones circulares superior e inferior 1 y 1/3 respectivamente, alojando ésta última la válvula de vaciado de fondo. Se obtiene girando la curva $\{z = 2y - (2/3), x = 0\}$ para $0 \leq z \leq (4/3)$, alrededor del eje vertical OZ.

Para calcular el volumen del silo, vamos a colocar cada pieza sobre el plano XY y calcular su volumen utilizando integrales dobles. El volumen total es la suma de los volúmenes de cada pieza.

Las ecuaciones de cada superficie son:

- La ecuación de la pieza I es

$$x^2 + y^2 + 9z^2 = 1$$

  para $0 \leq z \leq 1/3$.

- La ecuación de la pieza intermedia II es

$$x^2 + y^2 = 1$$

  para $0 \leq z \leq 2$.

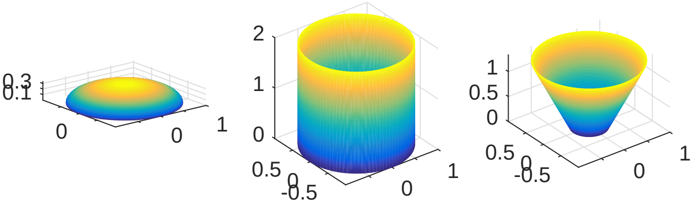
- La ecuación de la pieza III (pieza inferior) es

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$$

  para $0 \leq z \leq (4/3)$.

Dibujar de forma esquemática cada una de las piezas, apoyándolas en el plano XY.

Introducción Silo



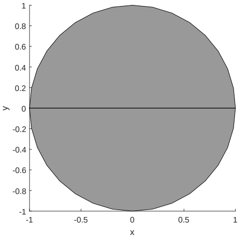
La ecuación de la pieza I es

$$x^2 + y^2 + 9z^2 = 1$$

para $0 \leq z \leq 1/3$. La proyección de la pieza I sobre el plano xy $(z = 0)$ es el dominio de integración D_I.

Dibujar la proyección y escribir la ecuación de la curva que encierra el dominio D_I.

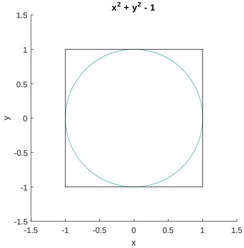
A continuación se muestra el dominio D_I.



La curva que encierra el dominio de integración D_I es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. **Determinar los valores mínimo y máximo de x e y dentro del dominio de integración. Utilizar los valores anteriores para calcular un cuadrado R que contenga al dominio D_I. Mostrar en el mismo dibujo, el dominio de integración D_I y el cuadrado R.**

Introducción Pieza I

Los valores mínimo y máximo de x e y dentro del dominio de integración son -1 y 1, respectivamente. En la siguiente figura se muestra el dominio D_I y el cuadrado que lo contiene.



La altura de la pieza I es $1/3$, podríamos calcular el volumen de dicha pieza como el volumen de un prisma con base R y altura $1/3$.
Calcular el volumen de dicho prisma. ¿Es buena la aproximación del volumen de la pieza I que se propone?.

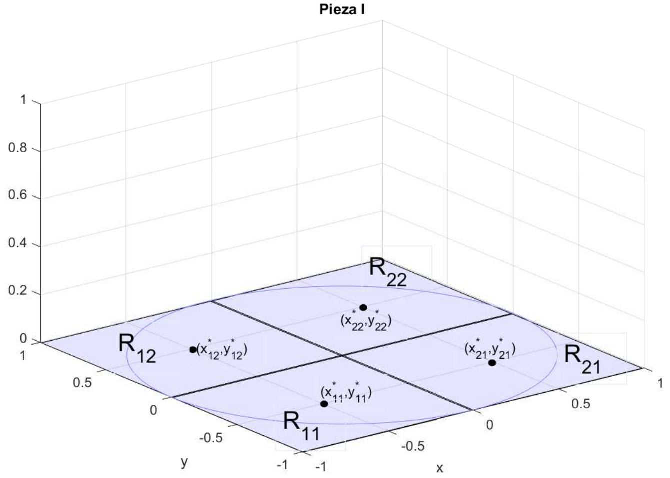
- El volumen real de la pieza I es 0.6981, si lo aproximamos con el prisma anterior obtenemos $4/3 = 1'3333$.
- Para mejorar la aproximación anterior, vamos a dividir la región cuadrada R en 4 subregiones cuadradas R_{11}, R_{12}, R_{21} y R_{22}.
- Dividimos el intervalo $[-1, 1]$ en 2 subintervalos con amplitud $\Delta x = 1$ en el eje OX y $\Delta y = 1$ en el eje OY; dibujar los cuadrados resultantes de trazar líneas paralelas a los ejes coordenados con origen en los valores anteriores.
- **¿Qué significa geométricamente el valor $\Delta x \Delta y$.?**
- Calcular el punto medio (x_{ij}^*, y_{ij}^*) de cada cuadrado R_{ij} para $i, j = 1, 2$.
- Siendo $f(x, y) = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{9}}$ la altura del elipsoide en cada punto, **¿Qué significa geométricamente el valor $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\ \Delta x\ \Delta y$?.**
- **Calcular el volumen de la pieza I, utilizando la información anterior.**

La respuesta a las cuestiones anteriores:

- $\Delta x \Delta y = 1$ es el área de cada cuadrado R_{ij} para $i, j = 1, 2$
- $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\ \Delta x\ \Delta y$ es el volumen de un prisma con área de la base $\Delta x\ \Delta y$ y altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$.
- El punto medio del cuadrado R_{11} es $(-1/2, -1/2)$, del cuadrado R_{21} es $(1/2, -1/2)$, del cuadrado R_{12} es $(-1/2, 1/2)$ y del cuadrado R_{22} es $(1/2, 1/2)$.
- El volumen del elipsoide se podría calcular como la suma de los volúmenes de 4 prismas

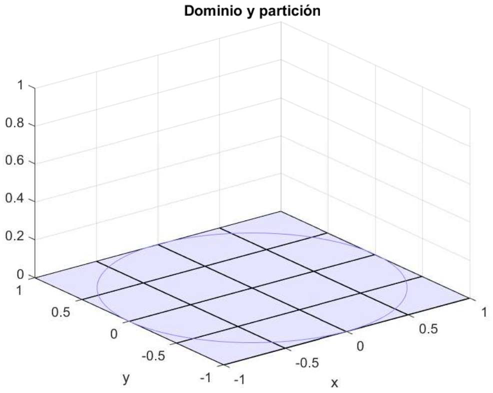
  $$(f(-1/2, -1/2) + f(1/2, -1/2) + f(-1/2, 1/2) + f(1/2, 1/2))\ \Delta x\ \Delta y = 0'9428.$$

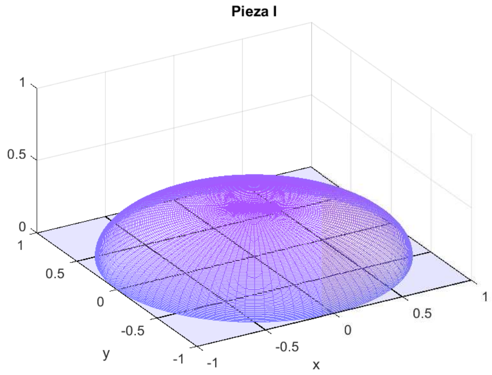
  siendo $f(x, y) = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{9}}$ la altura del elipsoide en cada punto. El volumen real del elipsoide es $0'6981$.


Pieza I
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
R22
(x*22,y*22)
R12
(x*12,y*12)
(x*21,y*21)
R21
(x*11,y*11)
R11
1
0.5
0
-0.5
-1
y
-1
-0.5
0
0.5
1
x

- Para realizar una partición de un intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, se toman subintervalos de longitud $\frac{b-a}{n}$.
- Realizar una partición P_2 de la región cuadrada $R = \{(x, y)/ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$ en 16 subregiones cuadradas $R_{ij}, i = 1, \ldots, 4; j = 1, \ldots, 4$. **¿Cuál es la longitud de lado de cada cuadrado de la partición?.**
- Dibujar en un mismo gráfico el dominio de integración D_I y la región R subdividida en 16 subregiones.
- **¿Cuánto vale $\Delta x \Delta y$ para cada uno de los cuadrados anteriores?**

En la partición P_2, $\Delta x = 1/2$ y $\Delta y = 1/2$. El área de cada cuadrado de la partición es $\Delta x \Delta y = 1/4$.




Pieza I
1
0.5
0
1
0.5
0
-0.5
y
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
x

Consideremos el cuadrado R_{33} con vértices $(0,0)$, $(1/2,0)$, $(1/2,1/2)$ y $(0,1/2)$ en la partición P_2. El punto medio de dicho cuadrado es $(1/4,1/4)$. Obtener el valor de la altura del elipsoide en dicho punto, es decir, calcular $f(1/4,1/4)$ siendo $f(x,y)=\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{9}}$. **¿Qué significa geométricamente $f(1/4,1/4)\Delta x\Delta y$?**
Consideremos una función $F(x,y)$ que coincide con $f(x,y)$ dentro del dominio D_I y que vale cero fuera del mismo,

$$F(x,y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{9}} & \text{si } x^2+y^2<=1\\[2ex] 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

En la siguiente tabla se muestran los valores de $F(x,y)$ en los puntos medios de los cuadrados de la partición P_2.

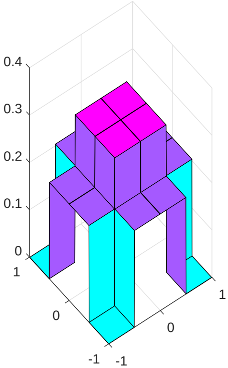
R_{ij}	1	2	3	4
1	$F(-3/4,\,-3/4)=0$	$F(-1/4,\,-3/4)=0{,}2041$	$F(1/4,\,-3/4)=0{,}2041$	$F(3/4,\,-3/4)=0$
2	$F(-3/4,\,-1/4)=0{,}2041$	$F(-1/4,\,-1/4)=0{,}3118$	$F(1/4,\,-1/4)=0{,}3118$	$F(3/4,\,-1/4)=0{,}2041$
3	$F(-3/4,1/4)=0{,}2041$	$F(-1/4,1/4)=0{,}3118$	$F(1/4,1/4)=0{,}3118$	$F(3/4,1/4)=0{,}2041$
4	$F(-3/4,3/4)=0$	$F(-1/4,3/4)=0{,}2041$	$F(1/4,3/4)=0{,}2041$	$F(3/4,3/4)=0$

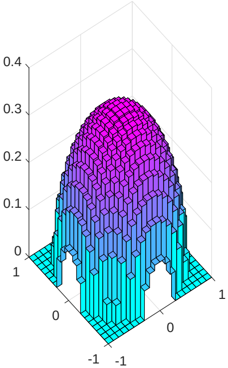
Considerar la partición P_2 y calcular la suma de los volúmenes de los prismas con área de la base $\Delta A = \Delta x \Delta y = 0{,}25$ y altura dada por $F(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ en cada punto medio (x_{ij}^*, y_{ij}^*) de los cuadrados. Comparar los valores obtenidos con el valor exacto de la integral doble.

En el caso de la partición P_2 el valor aproximado es $0'7200$ y el código de Matlab para calcularlo es

```
a=-1;
b=1;
c=-1;
d=1;
n=2;
m=2;
dx = (b-a)/n; dy = (d-c)/m;
p = a +0.5*dx: dx : b-0.5*dx;
q = c +0.5*dy: dy : d-0.5*dy;
[P,Q] = meshgrid(p,q);
Z = FPiezaI(P,Q);
valoraproximado=sum(sum(Z))*dx*dy
```

Si en el código anterior ponemos $n = m = 4$ se obtiene el valor aproximado para la partición P_2 y es 0,7201. En la siguiente figura se muestran las funciones escalonadas (para construir prismas) que se han calculado a partir de la partición P_2 y los que se obtendrían si consideramos $n = m = 20$.

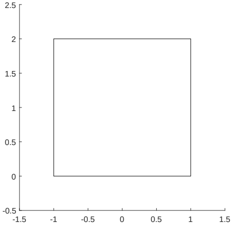




La ecuación de la pieza intermedia II es

$$x^2 + y^2 = 1$$

para $0 \leq z \leq 2$. El volumen de dicha pieza es 6,2832 y a continuación vamos a calcularlo con integrales dobles.
La proyección de la pieza II sobre el plano yz $(x = 0)$ es el dominio de integración D_{II}, **dibujar dicho dominio**.

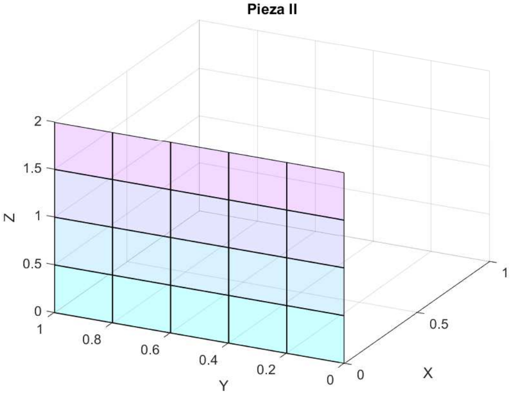


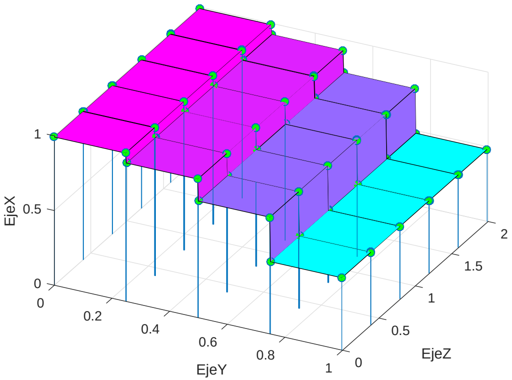
Por simetría del dominio de integración D_{II} y de la superficie del cilindro, vamos a considerar la parte de la pieza II con $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ y su proyección en el plano YZ que está definida por la región rectangular $R = \{(y, z),\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

- Realizar una partición de la región rectangular R subdividiendo el intervalo $[0,1]$ del eje OY en subintervalos con amplitud $\Delta y = 0{,}2$ y el intervalo $[0,2]$ del eje OZ en subintervalos de amplitud $\Delta z = 0{,}5$; dibujar el rectángulo R y la partición en subregiones rectangulares. **¿Qué significa geométricamente $\Delta y\ \Delta z$?.**
- En la siguiente tabla se muestra el valor de $x = g(y,z) = \sqrt{1-y^2}$ en el punto medio (y^*_{ij}, z^*_{ij}) de cada uno de los rectángulos anteriores.

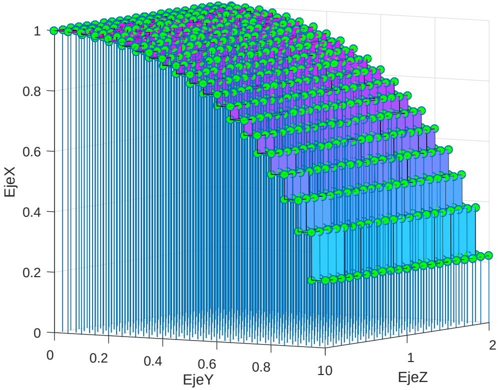
R_{ij}	1	2	3	4
1	$g(0'1, 0'25) = 0{,}9950$	$g(0'1, 0'75) = 0{,}9950$	$g(0'1, 1'25) = 0{,}9950$	$g(0'1, 1'75) = 0{,}9950$
2	$g(0'3, 0'25) = 0{,}9539$	$g(0'3, 0'75) = 0{,}9539$	$g(0'3, 1'25) = 0{,}9539$	$g(0'3, 1'75) = 0{,}9539$
3	$g(0'5, 0'25) = 0{,}8660$	$g(0'5, 0'75) = 0{,}8660$	$g(0'5, 1'25) = 0{,}8660$	$g(0'5, 1'75) = 0{,}8660$
4	$g(0'7, 0'25) = 0{,}7141$	$g(0'7, 0'75) = 0{,}7141$	$g(0'7, 1'25) = 0{,}7141$	$g(0'7, 1'75) = 0{,}7141$
5	$g(0'9, 0'25) = 0{,}4359$	$g(0'9, 0'75) = 0{,}4359$	$g(0'9, 1'25) = 0{,}4359$	$g(0'9, 1'75) = 0{,}4359$

- Calcular la suma de los volúmenes de los prismas con área de la base $\Delta A = \Delta y\ \Delta z$ y altura dada por $g(y^*_{ij}, z^*_{ij})$. Multiplicar el resultado obtenido por 4 y compararlo con el valor exacto de la integral.


Pieza II
2
1.5
Z 1
0.5
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Y
1
0.5
0
X


EjeX
EjeY
EjeZ
0
0.5
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.5
1
1.5
2

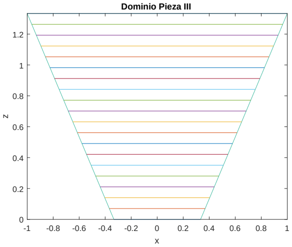
En la siguiente figura se muestra el caso $m = 20$ y $n = 20$.



La ecuación de la pieza III (pieza inferior) es

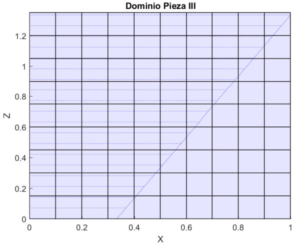
$$x^2 + y^2 - \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$$

para $0 \leq z \leq (4/3)$. La proyección de la superficie sobre el plano xz $(y = 0)$ es el dominio de integración D_{III}. **Dibujar el dominio de integración** D_{III}.



Por simetría del dominio de integración D_{III} y de la superficie del tronco de cono, vamos a considerar la parte de la pieza III con $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ y su proyección en el plano XZ.

Realizar una partición P de la región rectangular $R = \{(x,z)/0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1{,}35\}$ tomando $\Delta x = 0{,}1$ y $\Delta z = 0{,}15$. A continuación se muestra en el mismo gráfico el dominio de integración D_{III} y la región R subdividida en subregiones de área $\Delta x \Delta z$.



- Consideremos una función $H(x,z)$ que coincide con $h(x,z) = \sqrt{-x^2 + (\frac{z}{2} + \frac{1}{3})^2}$ dentro del dominio D_{III} y que vale cero fuera del mismo.
- Construir una tabla con los valores de $y = H(x,z)$ en el punto medio (x_{ij}^*, z_{ij}^*) de cada rectángulo de la partición P.
- Calcular la suma de los volúmenes de los prismas con área de la base $\Delta A = \Delta x \Delta z = 0{,}015$ y altura dada por $H(x_{ij}^*, z_{ij}^*)$ en cada punto medio (x_{ij}^*, z_{ij}^*) de los rectángulos.
- El valor exacto del volumen de la pieza III es $2'0168$.

Calcular la suma de los volúmenes de los prismas con área de la base $\Delta A = \Delta x\ \Delta z$ y altura dada por $H(x_{ij}^*, z_{ij}^*)$. Compararlo con el valor exacto de la integral.

¿Qué tienen en común los problemas anteriores?

- Se define la integral de Riemann como

$$\int\int_{D_I} f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A,$$

siendo $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

- Se define la integral de Riemann como

$$\int\int_{D_{II}} g(y,z)dydz = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(y_{ij}^*, z_{ij}^*)\Delta A,$$

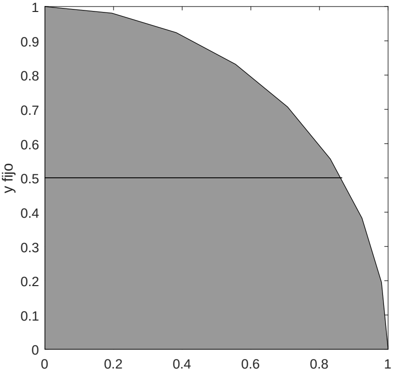
siendo $\Delta A = \Delta y \Delta z$.

- Se define la integral de Riemann como

$$\int\int_{D_{III}} h(x,z)dxdz = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h(x_{ij}^*, z_{ij}^*)\Delta A,$$

siendo $\Delta A = \Delta x \Delta z$.

Para escribir los límites de integración en la integral $\int\int_{D_I} f(x,y)dxdy$, vamos a recorrer (por simetría) la parte del dominio D_I que se encuentra en el primer cuadrante. Para ello tomamos un y fijo $(0 \leq y \leq 1)$ y trazamos una línea paralela al eje OX y que recorre todo el dominio de integración, **¿cuál es el intervalo de variación de la variable x?**



¿cuál es el intervalo de variación de la variable y, si fijamos inicialmente la x?

El intervalo de variación es $0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$. La siguiente integral representa el volumen encerrado por el elipsoide

$$\int \int_{D_I} f(x,y) dxdy = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{9}} dx\, dy.$$

syms x y
4*int(int(sqrt((1-x$^2-y^2)/9), x, 0, sqrt(1-y^2)), y, 0, 1)$

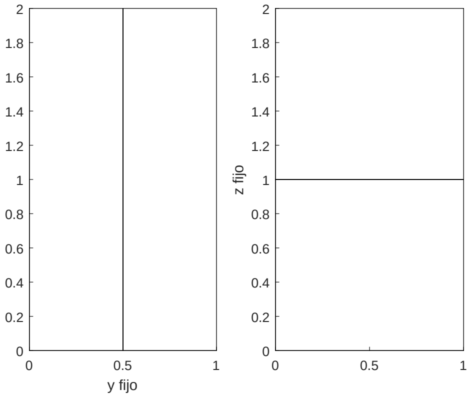
- **Dado y fijo, ¿qué interpretación geométrica tiene la integral simple $A(y) = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{9}}\,dx$?.**
- **¿Qué interpretación geométrica tiene la integral**

$$\int_0^1 A(y)dy,$$

siendo $A(y) = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{9}}\,dx$?

- Para escribir los límites de integración, vamos a recorrer con líneas verticales la parte del dominio D_{II} que se encuentra en el primer cuadrante. Para ello tomamos un y fijo $(0 \leq y \leq 1)$ y trazamos una línea paralela al eje OZ que recorre todo el dominio de integración, **¿cuál es el intervalo de variación de la variable z?**
- Otra opción es recorrer el dominio con líneas horizontales. Para ello podemos tomar un z fijo $(0 \leq z \leq 2)$ y trazar una línea paralela al eje OY que recorre todo el dominio de integración. En este caso el intervalo de variación de la y es $0 \leq y \leq 1$. **Dibujar la parte del dominio D_{II} que se encuentra en el primer cuadrante y recorrerlo con líneas horizontales.**

En el primer caso, el intervalo de variación es $0 \leq z \leq 2$. En el segundo caso, el intervalo de variación es $0 \leq y \leq 1$.



Las siguientes integrales representan el volumen de la pieza II

$$4\int_0^1\int_0^2 \sqrt{1-y^2}\,dz\;dy = 4\int_0^2\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy\;dz.$$

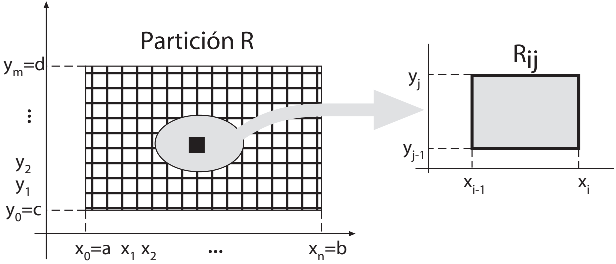
¿Qué representa la integral

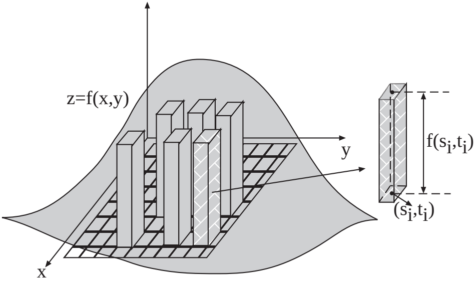
$$\int_0^1\int_0^2 dz\;dy?.$$

Vamos a recorrer el dominio con líneas horizontales. Para ello podemos tomar un z fijo $(0 \leq z \leq 4/3)$ y trazar una línea paralela al eje OX que recorre todo el dominio de integración. En este caso el intervalo de variación de la x es $0 \leq x \leq \frac{z}{2} + \frac{1}{3}$. La siguiente integral doble, permite calcular el volumen de la Pieza III:

$$4 \int_0^{4/3} dz \int_0^{\frac{z}{2}+\frac{1}{3}} \sqrt{-x^2 + (\frac{z}{2} + \frac{1}{3})^2}\, dx.$$

Dibujar la parte del dominio D_{III} que se encuentra en el primer cuadrante y recorrerlo con líneas verticales.


Partición R
y_m=d
y_2
y_1
y_0=c
x_0=a x_1 x_2 ... x_n=b
R_{ij}
y_j
y_{j-1}
x_{i-1}
x_i


z=f(x,y)
y
x
$f(s_i,t_i)$
(s_i,t_i)

Definición (6.2 Integral Doble)

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables definida en un rectángulo cerrado R. Si existe el límite

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n^2} f(s_i, t_i)\, \Delta A_i. \tag{1}$$

donde P es una partición de R de forma que su amplitud $\|P\| \to 0$, entonces se dice que f es integrable y se define la `integral doble` *de f como*

$$\int\int_R f(x, y) dA = \int\int_R f(x, y) dxdy = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n^2} f(s_i, t_i)\, \Delta A_i. \tag{2}$$

Nota

Si f es una función continua y no negativa en R, entonces $z = f(x, y)$ representa la superficie sobre R. En este caso la integral doble (2) da el volumen del sólido acotado por la superficie $z = f(x, y)$ y por el rectángulo R.

Teorema (6.2 Propiedades de las integrales dobles)

Sean f y g funciones de dos variables que son continuas en un rectángulo cerrado R. Se cumple

1. $$\int\int_R c\, f(x,y)dA = c \int\int_R f(x,y)dA \tag{3}$$
   donde c es una constante.
2. $$\int\int_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \int\int_R f(x,y)dA \pm \int\int_R g(x,y)dA. \tag{4}$$
3. *Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$, entonces*
   $$\int\int_R f(x,y)dA \leq \int\int_R g(x,y)dA. \tag{5}$$
4. *Aditividad:*
   $$\int\int_R f(x,y)dA = \int\int_{R_1} f(x,y)dA + \int\int_{R_2} f(x,y)dA \tag{6}$$
   donde $R = R_1 \cup R_2$.

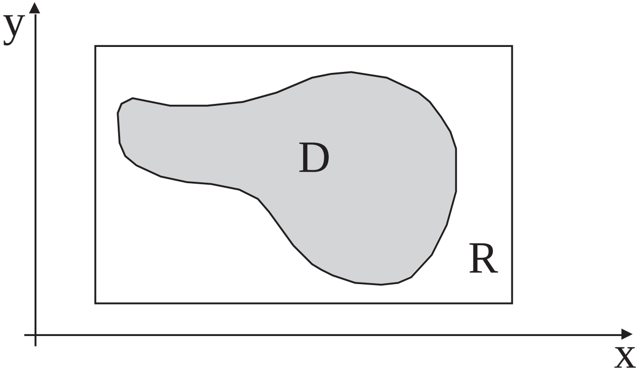
Teorema (6.3 Teorema de Fubini para regiones rectangulares)

Sea $f(x, y)$ una función continua en el rectángulo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}, \tag{7}$$

entonces

$$\int\int_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy\ dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx\ dy. \tag{8}$$



Para ello, dada f una función definida en una región (acotada) del plano D, es decir dicha región está contenida en un rectángulo R, definimos una nueva función

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in R \backslash D. \end{cases} \qquad (9)$$

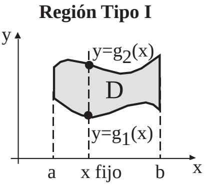
Definición (6.3 Integral doble sobre una región D)

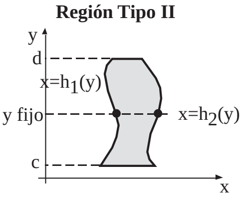
Sea $f(x,y)$ función acotada en una región del plano D. Si $F(x,y)$ está definida por (9) y es integrable en la región R, se dice que f es integrable en D y se define la `integral doble` *de f sobre D como*

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R F(x,y)dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n^2} F(s_i,t_i)\,\Delta A_i. \tag{10}$$

Nota

Si $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in R$, la integral $\int\int_R f(x,y)dA$ se puede interpretar cómo el volumen del sólido limitado por la superficie $z = f(x,y)$ sobre la región D en $\mathbb{R}^2$.





Teorema (6.4 Teorema de Fubini para regiones no rectangulares)

Si $f(x, y)$ es una función continua en D, una región de tipo I, entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\ dx, \tag{11}$$

siempre y cuando existen las dos integrales. De manera análoga, para una región de tipo II,

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\ dy. \tag{12}$$

Nota

- *El área de una región D del plano viene dada por*

$$A = \int \int_D dA. \tag{13}$$

- *Si $f(x, y)$ es continua y $f(x, y) \geq 0$ en D, el volumen del sólido bajo la superficie $z = f(x, y)$ sobre la región D viene dado por*

$$V = \int \int_D f(x, y)\, dA. \tag{14}$$

- *Si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son continuas y $f(x, y), g(x, y) \geq 0$ y $f(x, y) \geq g(x, y)$ en D, el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ sobre la región D viene dado por*

$$V = \int \int_D (f(x, y) - g(x, y))\, dA. \tag{15}$$

Teorema (6.5 Propiedades de las integrales dobles)

Sean f y g funciones de dos variables que son continuas en una región D del plano. Se cumple

1. $$\int\int_D c\, f(x,y)dA = c \int\int_D f(x,y)dA \tag{16}$$

   donde c es una constante.

2. $$\int\int_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \int\int_D f(x,y)dA \pm \int\int_D g(x,y)dA. \tag{17}$$

3. *Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, entonces*

   $$\int\int_D f(x,y)dA \leq \int\int_D g(x,y)dA. \tag{18}$$

4. *Aditividad:*

   $$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_{D_1} f(x,y)dA + \int\int_{D_2} f(x,y)dA \tag{19}$$

   donde $D = D_1 \cup D_2$.

Teorema (Cambio de variable)

*Sean D, $D^* \subset \mathbb{R}^2$ y sea $T : D^* \to D$ la aplicación biyectiva dada por $T(u, v) = (g(u, v), h(u, v)) = (x, y)$. Supongamos que g e h admiten derivadas parciales continuas respecto a u y v en D^* (ver Figura **??**). Entonces si $f : D \to \mathbb{R}$ es integrable se tiene que*

$$\int\int_D f(x,y)dx\,dy = \int\int_{D^*} f(g(u,v), h(u,v))\,|J(u,v)|du\,dv \tag{20}$$

donde J es el jacobiano del cambio de variable,

$$J(u,v) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{array}\right|. \tag{21}$$

En esta sección vamos a considerar que una lámina es un cuerpo lo suficientemente plano como para ser considerado bidimensional. Supongamos que una lámina ocupa una región acotada R del plano xy y sea $\rho(x, y)$ la densidad (masa por unidad de área) de la lámina. Supongamos que la lámina no es homogénea, es decir, su densidad varía de un punto a otro, la masa viene dada por la integral

$$m = \int\int_R \rho(x, y)\, dxdy. \tag{22}$$

El teorema de Green relaciona una integral doble sobre una región del plano con una integral curvilínea sobre el borde.

Definición (Región simplemente conexa)

Un conjunto $D \in \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo si para toda curva simple cerrada contenida en D, el recinto encerrado por dicha curva también está contenido en D.

Definición (Curva orientada positivamente)

Considérese una persona andando sobre el borde C de una región plana, de forma que el interior de región queda siempre a la izquierda, se dirá que la curva está `orientada positivamente`*.*

Teorema (Teorema de Green)

Sea D una región simplemente conexa con un borde C (liso a trozos, cerrado, simple y orientado positivamente). Si el campo vectorial $\overline{F}(x,y) = M(x,y)\overline{i} + N(x,y)\overline{j}$ es continuamente diferenciable en D, se tiene

$$\int_C (M(x,y)dx + N(x,y)dy) = \int\int_D \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \right) dx\, dy \qquad (23)$$

Teorema (Área como integral curvilínea)

Sea D una región plana simplemente conexa con borde C liso a trozos. El área A de la región D es igual a la integral

$$A = \frac{1}{2} \int_C (-y\, dx + x\, dy) \tag{24}$$

Definición (Divergencia)

La `divergencia` *de una campo vectorial*

$$\overline{V}(x,y,z) = u(x,y,z)\overline{i} + v(x,y,z)\overline{j} + w(x,y,z)\overline{k} \tag{25}$$

es el escalar $div\overline{V}$ *dado por*

$$div\overline{V} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial w}{\partial z}(x,y,z). \tag{26}$$

Definición (Rotacional)

El `rotacional` *de un campo vectorial*

$$\overline{V}(x,y,z) = u(x,y,z)\overline{i} + v(x,y,z)\overline{j} + w(x,y,z)\overline{k} \tag{27}$$

es el campo $rot\overline{V}$ *dado por*

$$rot\overline{V} = (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\overline{i} + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\overline{j} + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\overline{k}. \tag{28}$$

Teorema

Sea D una región simplemente conexa con un borde C orientado positivamente. Entonces, si el campo vectorial

$$\overline{F} = M\bar{i} + N\bar{j} \tag{29}$$

es continuamente diferenciable en D, se tiene

$$\int_C \overline{F} \bullet d\overline{R} = \int_C (M\, dx + N\, dy) = \int\int_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\int_D (rot\overline{F} \bullet \overline{k})\, dx\, dy \tag{30}$$

$$\int_C \overline{F} \bullet \overline{N}\, ds = \int\int_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\int_D div\overline{F}\, dx\, dy. \tag{31}$$

Nota

Circulación: *Se llama así a la cantidad total de fluido que rodea una curva cerrada C; se calcula con la integral de línea del campo de velocidades* **V** *del fluido a lo largo de la curva*

$$\textit{Circulación} = \oint_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

Flujo: *Para calcular la cantidad de fluido, sujeto al campo de velocidades,* **V**, *que atraviesa un elemento unidimensional (un alambre, por ejemplo) se integrará la componente de* **V** *normal a la curva C que dibuja el alambre, es decir*

$$\textit{Flujo} = \oint_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}\, ds.$$

Ej. 1 Plantear las dos integrales reiteradas de la integral doble $I = \int\int_D f(x,y)\,dx\,dy$, siendo D el dominio definido por

1.1 Interior del polígono $ABCDEA$, de vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(1,1)$ y $E(0,2)$.

1.2 Recinto limitado por $x = 0$; recta $x = 2y$; recta $y = x + 1$; circunferencia $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ con $x \leq 2$.

1.3 Recinto que verifica las condiciones: $x \geq 1$; $y \leq x$; $\arctan x \leq y \leq \pi/2$.

Ej. 2 Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales dobles:

2.1

$$I_1 = \int_1^{\infty} dx \int_{1/x}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \tag{32}$$

2.2

$$I_2 = \int_0^{3} dx \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy \tag{33}$$

Ej. 3 Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $y = \sqrt{x}$; $y = 2\sqrt{x}$; $x + z = 6$; $z = 0$.

```
%Dibujamos el dominio de integración
syms x
fplot(sqrt(x),[0,6]);
hold on
fplot(2*sqrt(x),[0,6]);
title('Dominio');
%Dibujamos el sólido cuyo volumen vamos a calcular
syms u v
fsurf(u,sqrt(u),v,[0,6])
hold on
fsurf(u,2*sqrt(u),v,[0,6])
fsurf(u,v,6-u,[0,6])
%Calculamos el volumen
syms x y
int(int(6-x,y,sqrt(x),2*sqrt(x)),x,0,6)
```

Ej. 4 Calcular el volumen comprendido entre las superficies $(H_1) z = xy$; $(H_2) z = 2xy$; y los cilindros de ecuación $(C_1) x^2 + y^2 = 1$; $(C_2) (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Ej. 5 Sea D la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^2$, $y = -x^2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Dibujar el dominio de integración D y calcular la integral doble $\int\int_D (x^2 - y)\, dx\, dy$.

Ej. 6 Sea D la región del primer cuadrante encerrada entre las parábolas $y^2 = x$ e $y = x^2$. Dibujar el dominio de integración D y calcular $\int\int_D x\,y\,dx\,dy$.

```
%Dibujamos el dominio de integración
syms t
fplot(t,t^2,[0,1]);
hold on
fplot(t^2,t,[0,1]);
title('Dominio');
%Calculamos la integral
syms x y
int(int(x*y,y,x^2,sqrt(x)),x,0,1)
```

Ej. 7 Calcular el volumen del sólido, en el primer octante, limitado por los planos $z = 0$, $z = x + y + 2$ y por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

```
%Dibujamos el dominio de integración
syms t
fplot(4*cos(t),4*sin(t),[0,2*pi]);
title('Dominio');
%Dibujamos el sólido cuyo volumen vamos a calcular
syms u v
fsurf(4*cos(u),4*sin(u),v,[0,pi/2,0,10])
hold on
fsurf(u,v,u+v+2,[0,4,0,4])
alpha(0.5)
%Calculamos el volumen
syms x y
int(int(x+y+2,y,0,sqrt(16-x^2)),x,0,4)
```

Ej. 8 Calcular el volumen del conjunto B formado por los puntos (x, y, z) tales que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1 - x^2$.

Ej. 9 Calcular el volumen del sólido en el primer octante limitado por los planos coordenados y las superficies $z = x^2 + y^2 + 1$ y $2x + y = 2$.

Ej. 10 Calcular el volumen del conjunto B formado por los puntos (x, y, z) tales que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq z \leq 1 - y^2$. Dibujar el conjunto B. Calcular el volumen proyectando sobre los planos xy, xz e yz.

Ej. 11 Considerar el sólido, en el primer octante $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$, limitado por los planos: $z = 8 + 2x + y$, $y = 3 - 2x$ e $y = x$. Plantear la integral doble que permite calcular el volumen de dicho sólido. Calcular el volumen de dicho sólido.

Ej. 12 Dados, los conos

$$(C1)\quad (x - 1 + z)^2 + y^2 = (1 - z)^2, \tag{34}$$

$$(C2)\quad (x - 1 - z)^2 + y^2 = (1 - z)^2. \tag{35}$$

12.1 Hallar el volumen del cono C_2 comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.

12.2 Hallar el volumen de la porción del cono C_1 tal que $z_{C_1} \geq z_{C_2}$, comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.

Ej. 13 Hallar el área comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 4x$ y $x^2 + y^2 = 8x$, y las rectas $y = x$ e $y = 2x$. Dibujar el dominio de integración y resolver la integral doble haciendo un cambio a coordenadas polares.

Ej. 14 Calcular, haciendo un cambio a coordenadas polares, el volumen limitado por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$. Dibujar el dominio de integración y el sólido.

```
%Dibujamos el dominio de integración
syms t
fplot(2*cos(t),2*sin(t),[0,2*pi]);
title('Dominio');
%Dibujamos el sólido cuyo volumen vamos a calcular
syms u v
fsurf(u,v,4-u^2-v^2,[-2,2,-2,2])
%Calculamos el volumen en polares
syms r theta
int(int((4-r^2)*r,theta,0,2*pi),r,0,2)
```

Ej. 15 Considerar el sólido formado por la parte interior a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \tag{36}$$

y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$. Plantear la integral doble en polares para calcular el volumen de dicho sólido. Calcular el volumen anterior.

Ej. 16 Sea D el paralelogramo limitado por las rectas $y = -x$, $y = -x + 1$, $y = 2x$, $y = 2x - 3$. Hallar $\int\int_D (x + y)^2 \, dx \, dy$.

Ej. 17 Resolver la siguiente integral doble, realizando un cambio a coordenadas polares,

$$\int\int_{B_{xy}} x^2 \, dx \, dy \quad con \quad B_{xy} = \{(x, y)/x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

Ej. 18 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide (fondo) $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano (tapa) $x + y + z = 1$.

Ej. 19 Sea D la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$. Hallar $\int\int_D xy \, dx \, dy$.

Ej. 20 Dada la integral

$$I = \int\int_D (2ax - x^2 - y^2)^{1/2}\, dx\, dy \tag{37}$$

hallar su expresión en un nuevo sistema de coordenadas (u, v), definido por las expresiones

$$x = a + u\cos v;\ \ y = u\ \sin v. \tag{38}$$

Calcularla en el caso de que D sea el dominio interior a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0. \tag{39}$$

Ej. 21 Considerar el sólido formado por la parte interior a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \tag{40}$$

interior a los planos $x = y$, $x = -y$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Plantear la integral doble en polares para calcular el volumen de dicho sólido. Calcular el volumen anterior.

Ej. 22 Considerar el cilindro

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, \tag{41}$$

limitado superiormente por la superficie

$$z = (x - 1)^2 + y^2 + 1, \tag{42}$$

e inferiormente por el plano $z = 0$. Plantear la integral doble, en coordenadas polares, que permite calcular el volumen del sólido anterior. Calcular dicho volumen.

Ej. 23 Calcular la integral curvilínea

$$I_C = \int_C (x+y)dx + (y-x)dy \qquad (43)$$

a lo largo de $x^2 + y^2 = 2ax$.

23.1 Mediante la técnica habitual de calcular una integral curvilínea.
23.2 Aplicando la fórmula de Green.

Ej. 24 Utilizar el teorema de Green para calcular el área de la región S limitada por las curvas $y = 4x$ e $y = 2x^2$.

Ej. 25 Sea $\overline{F}(x,y) = xy^2\overline{i} + (y+x)\overline{j}$. Integrar $rot\overline{F} \bullet \overline{k}$ en la región contenida en el primer cuadrante, acotada por las curvas $y = x^2$ e $y = x$.

Ej. 26 Consideremos el campo $\overline{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overline{F}(x,y) = (-x,-y)$. Sea S la región plana

$$S = \{(x,y)/x + 1 \leq 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0\}.$$

Calcular el flujo de $\overline{F}$ a través de S.

Ej. 27 Consideremos el campo $\overline{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overline{F}(x,y)=(x,y)$. Sea C la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. Calcular el flujo de $\overline{F}$ a través de la curva C.

```
%Representar la circunferencia y el campo F.
[x,y]=meshgrid(-1:0.2:1);
quiver(x,y,x,y);
hold on
%Circunferencia en paramétricas
syms t real
x=cos(t);
y=sin(t);
fplot(x,y,[0,2*pi]);
hold off
%Calcular la integral de flujo
ds=simplify(sqrt((-sin(t))^2+(cos(t))^2)); %elemento de longitud
n=[cos(t),sin(t)]; % vector normal unitario exterior
F=[cos(t),sin(t)]; % vector velocidad
Fn=F*n';% Valor F.n
Flujo=int(Fn*ds,0,2*pi)
```

Ej. 28 Utilizar el Teorema de Green para calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F = [exp(x) - y^3, cos(y) + x^3]$ que recorre la circunferencia unidad en sentido contrario a las agujas del reloj.

```
%Calculamos el integrando
syms x y
u=exp(x)-y^3;
v=cos(y)+x^3;
integrando=diff(v,x)-diff(u,y);
%Integramos haciendo un cambio a coordenadas polares
syms r theta
int(int(3*r^2*r,r,0,1),theta,0,2*pi)
```