Tema 4: Cálculo Diferencial.Funciones Reales de Variable Real

Cristina Solares

Universidad de Castilla-La Mancha

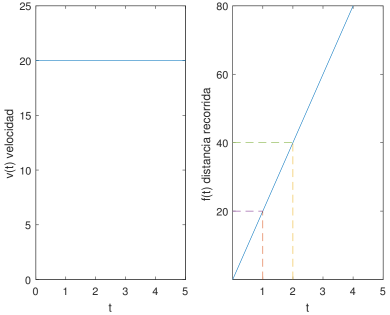
11 de noviembre de 2021

Índice

Movimiento a lo largo de una línea recta

Un vehículo se mueve, sobre una pista recta, a una velocidad constante de $v(t) = 20km/h$. La distancia recorrida por el vehículo después de 1 h es 20 km y después de 2 h son 40 km.

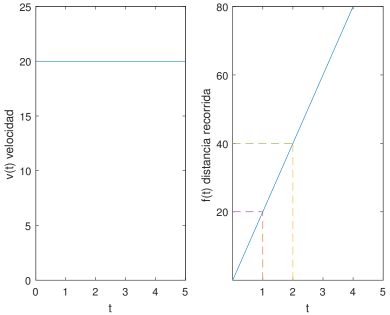
¿Cuál es la distancia recorrida por el vehículo, $s = f(t)$, después de t horas?.



Si estudiamos el desplazamiento del vehículo en el intervalo de tiempo $t \in [1, 2]$, vemos que en $t = 1$ el el vehículo ha recorrido $20km$ y en el instante $t = 2$ el vehículo ha recorrido $40km$.

¿Cuál es el incremento del tiempo?. ¿Cuál es el incremento del desplazamiento?.

Un vehículo se mueve, sobre una pista recta, a una velocidad constante de $v(t) = 20km/h$. La distancia recorrida por el vehículo después de 1 h es 20 km y después de 2 h son 40 km. La distancia recorrida por el vehículo, $s = f(t)$, después de t horas es $f(t) = t\ v(t) = 20\ t$.



Si estudiamos el desplazamiento del vehículo en el intervalo de tiempo $t \in [1, 2]$, vemos que en $t = 1$ el el vehículo ha recorrido $20km$ y en el instante $t = 2$ el vehículo ha recorrido $40km$, por ello, el incremento del desplazamiento $\Delta f = f(2) - f(1)$ en dicho intervalo, es de $20km$.

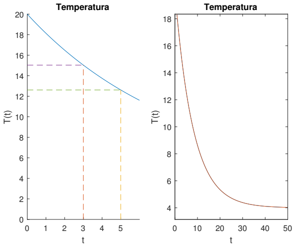
Incremento de una función $y = f(x)$

Nota

Sea la función real de variable real $y = f(x)$ *y consideremos el intervalo* $x \in [x_0, x_1]$ *contenido en su dominio. Se llama incremento (o cambio) de* x *al valor* $\Delta x = x_1 - x_0$. *Se llama incremento (o cambio) de* f *en el intervalo* $[x_0, x_1]$ *al valor* $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$. *Dicho incremento puede ser positivo o negativo.*

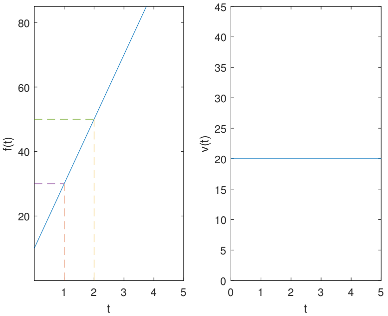
Supongamos que un cuerpo con temperatura $T_0 = 20^\circ C$ es depositado (en el tiempo $t = 0$) en un lugar donde la temperatura se mantiene a $4^\circ C$. La temperatura del cuerpo, después de 3 minutos ha descendido a $15^\circ C$, y seguirá descendiendo al incrementarse el tiempo t. La siguiente función representa la temperatura del cuerpo en el instante t:

$$T(t) = 16 * e^{-0{,}1239t} + 4$$



El incremento de la temperatura en el intervalo de tiempo $t \in [3, 5]$, ¿es positivo o negativo?.

Sea $f(t) = 10 + 20t$ la función distancia recorrida por un vehículo en función del tiempo t.

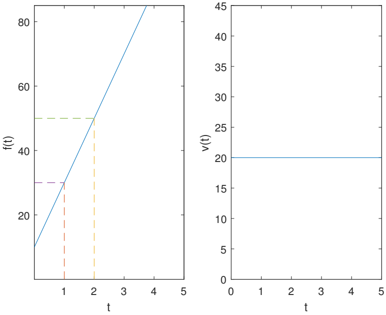


¿Cuál es la velocidad media del vehículo en el intervalo $[1, 2]$?.

Sea $f(t) = 10 + 20t$ la función distancia recorrida por un vehículo en función del tiempo t.
Se puede calcular la velocidad media del vehículo en el intervalo $[1, 2]$ como el cociente

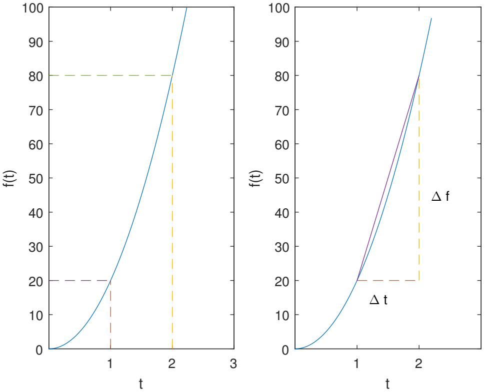
$$v_{med} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{50 - 30}{2 - 1} = 20.$$

Nótese que la velocidad media es constante y coincide con la pendiente de la gráfica de la función $f(t)$.



Consideremos la función distancia $f(t) = 20t^2$ recorrida por un vehículo.

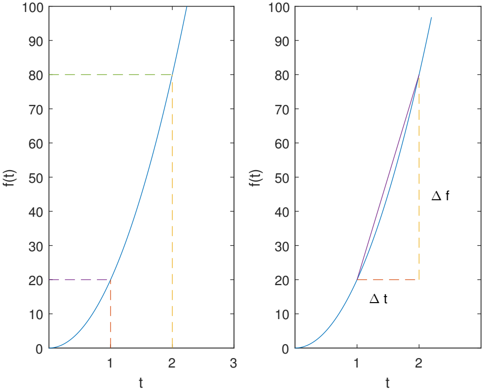
¿Cuál es la velocidad media del vehículo en el intervalo $[1, 2]$?.



Consideremos la función distancia $f(t) = 20t^2$ recorrida por un vehículo.
La velocidad media del vehículo en el intervalo $[1, 2]$ es

$$v_{med} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{60}{1} = 60.$$

Nótese que el valor anterior es la pendiente de la recta que une los puntos $(1, 20)$ y $(2, 80)$.



Razón promedio de cambio de y con respecto a x

Nota

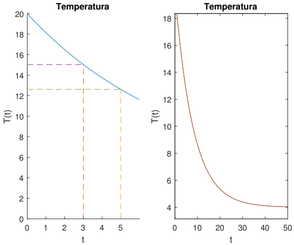
Dada la función real de variable real $y = f(x)$*, si consideramos el intervalo* $[x_1, x_2]$ *contenido en su dominio. Se llama razón promedio de cambio (cociente incremental o tasa media de variación) de* f *con respecto a* x *sobre el intervalo* $[x_1, x_2]$ *al cociente*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

El valor anterior coincide con la pendiente de la secante que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

Supongamos que un cuerpo con temperatura $T_0 = 20^\circ C$ es depositado (en el tiempo $t = 0$) en un lugar donde la temperatura se mantiene a $4^\circ C$. La temperatura después de 3 minutos ha descendido a $15^\circ C$ y seguirá descendiendo al incrementarse el tiempo t. La siguiente función representa la temperatura del cuerpo en el instante t:

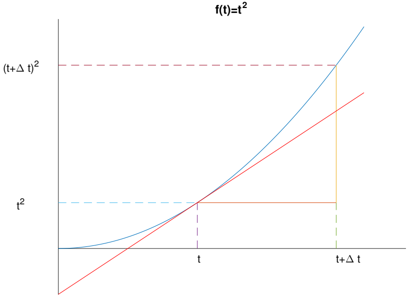
$$T(t) = 16 * e^{-0{,}1239t} + 4$$



¿Cuál es la razón promedio de cambio de la temperatura $T(t)$ en el intervalo de tiempo $t \in [3, 5]$?

Consideremos la función distancia $f(t) = t^2$ recorrida por un objeto.

¿Cuál es la velocidad del vehículo en el instante $t = 2$?.



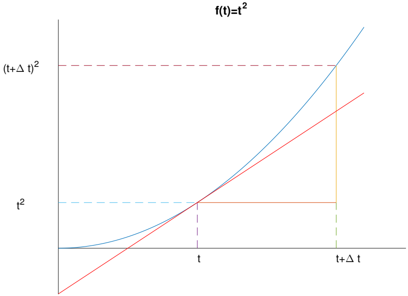
Consideremos la función distancia $f(t) = t^2$ recorrida por un objeto. Se puede calcular la velocidad media en el intervalo $[t, t + \Delta t]$, siendo el incremento Δt próximo a cero,

$$v_{med} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = 2t + \Delta t.$$

Se define la velocidad instantánea en el instante t como

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 2t + \Delta t = 2t.$$

La velocidad instantánea coincide con la pendiente de la recta tangente en el instante t.



Derivada de una función

Definición (Derivada)

El límite del cociente incremental

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \tag{1}$$

se llama la derivada de f en t, y es la fórmula de la pendiente de la tangente a la gráfica de f en el punto $(t, f(t))$. La derivada se designa normalmente por $f'(t)$. La derivada anterior se llama razón (rapidez, tasa o velocidad) de cambio.

Nota

El límite anterior se puede escribir como

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}. \tag{2}$$

El valor de h puede ser mayor o menor que cero cuando se calcula el límite.

Supongamos que un cuerpo con temperatura $T_0 = 20^\circ C$ es depositado (en el tiempo $t = 0$) en un lugar donde la temperatura se mantiene a $4^\circ C$. La temperatura después de 3 minutos ha descendido a $15^\circ C$ y seguirá descendiendo al incrementarse el tiempo t. La siguiente función representa la temperatura del cuerpo en el instante t:

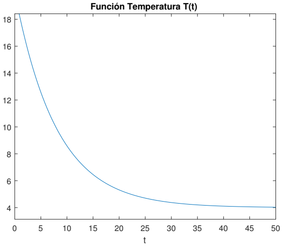
$$T(t) = 16 * e^{-0{,}1239t} + 4.$$

¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura en el instante t?.

La ley de Newton dice que la rapidez de cambio de la temperatura del cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio que lo rodea. Comprobar que se cumple,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - 4)$$

siendo k una constante de proporcionalidad y $T(0) = 20$.



Derivada de una función

Definición (Derivada)

El límite del cociente incremental

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \tag{3}$$

se llama la derivada de f en x, y es la fórmula de la pendiente de la tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$. La derivada se designa normalmente por $f'(x)$. Derivar una función en x es hallar su derivada en el punto $(x, f(x))$.

Teorema

Si una función f es derivable en c, entonces es continua en c.

Ejemplo (Existencia de derivada)

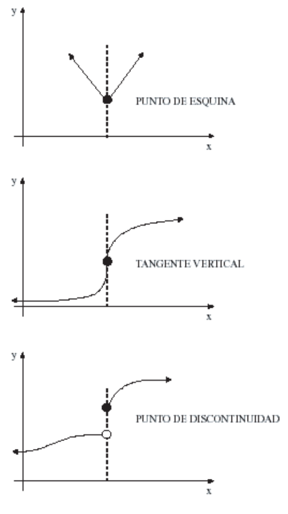


Figura: *Formas en las que no existe la derivada*

Ejemplo (Derivada)

Dada la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ *si* $x \neq 1$*, su derivada en el punto* $x = 2$ *se obtiene mediante:*

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{\Delta x + 1} = -3. \tag{4}$$

Ejemplo (Derivada)

La función $f(x) = |x|$ *no es derivable en* $x = 0$*:*

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}. \tag{5}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \tag{6}$$

Teorema (Reglas básicas para calcular derivadas)

Dadas f y g funciones reales de variable real, y a, b y $c \in \mathbb{R}$, se cumple:

1. **Múltiplo constante:** $(cf(x))' = cf'(x)$.
2. **Reglas de la suma y la diferencia:** $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.
3. **Regla de la linealidad:** $(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$.
4. **Regla del producto:** $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.
5. **Regla del cociente:** $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x)^2}$.

Un globo esférico se está expandiendo. Si su radio crece a razón de $2cm$ por minuto, '?con qué rapidez crece el volumen cuando el radio es de $5cm$?. El volumen del globo es $V = (4/3)\pi r^3$. Se cumple que $\frac{dr}{dt} = 2$, ¿cuánto vale $\frac{dV}{dt}$?

Teorema (Regla de la cadena)

Sea $y = f(u)$ una función derivable en u, y $u = g(x)$ una función derivable en x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable en x verificando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}. \tag{7}$$

Ejemplo (Regla de la cadena)

La función $y = (3x^4 - 7x + 5)^3$, se puede expresar como la composición de $f(u) = u^3$ y $g(x) = 3x^4 - 7x + 5$. Utilizando la regla de la cadena, su derivada en un punto x está dada por:

$$y' = 3(3x^4 - 7x + 5)^{3-1}(3x^4 - 7x + 5)' = 3(3x^4 - 7x + 5)^2(12x^3 - 7). \tag{8}$$

Un globo esférico se está expandiendo. Si su radio crece a razón de $2cm$ por minuto, ¿con qué rapidez crece el volumen cuando el radio es de $5cm$?. El volumen del globo es $V = (4/3)\pi r^3$. Se cumple que $\frac{dr}{dt} = 2$ y

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Sustituyendo r por 5 y $\frac{dr}{dt}$ por 2,

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi 5^2 2 = 200\pi.$$

Teorema (Regla de l'Hôpital)

Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto que contiene a $c \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{9}$$

produce una forma indeterminada $0/0$ *o* ∞/∞, *entonces*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{10}$$

siempre que exista el límite del miembro de la derecha (o sea infinito). La regla de l'Hôpital también es válida cuando x tiende a $\pm\infty$.

Ejemplo (Regla de l'Hôpital)

Dada la función $f(x) = \dfrac{1-\cos^3 x}{\sin^2 x}$, *su límite cuando* $x \to 0$ *es una forma indeterminada* $0/0$. *Aplicando la regla de l'Hôpital se obtiene*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\cos^2 x(-\sin x)}{2\sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos x}{2} = 3/2. \tag{11}$$

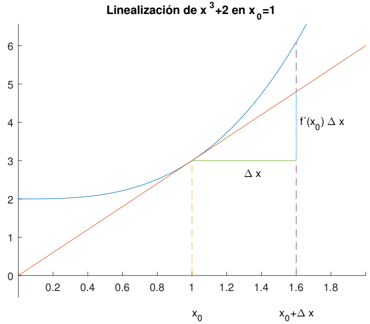
En muchos problemas de física se utilizan aproximaciones lineales, por ejemplo al deducir una fórmula para el periodo de un péndulo se obtiene $a_T = -g \sin\theta$ para la aceleración tangencial y luego reemplazan $\sin\theta$ por θ para valores pequeños de θ. Lo que están haciendo es una linealización $L(x) = x$ de la función $f(x) = \sin x$ en $x = 0$.

Definición (Linealización de una función)

Sea $y = f(x)$ derivable en $x = x_0$, entonces $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es una linealización de f en x_0.

En un entorno del punto $x_0 = 1$ aproximamos la función $f(x) = x^3 + 2$ por la recta tangente en $x_0 = 1$

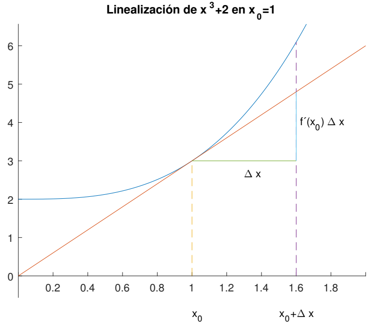
$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$



Aproximación de una función por la tangente

En un entorno del punto $x_0 = 1$ aproximamos la función $f(x) = x^3 + 2$ por la recta tangente en $x_0 = 1$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

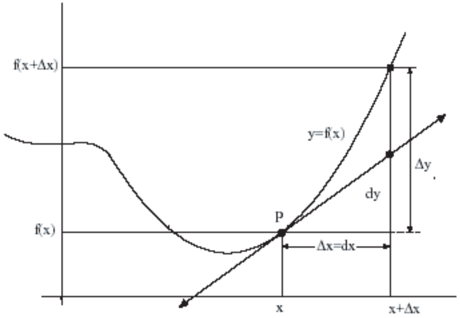


x_0	Δx	$x_0 + \Delta x$	$f(x_0 + \Delta x)$	$L(x_0 + \Delta x)$	$\lvert L(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)\rvert$
1	-0.2	0.8	2.51	2.4	0.11
1	0.2	1.2	3.73	3.6	0.13
1	0.6	1.6	6.09	4.8	1.29

Si queremos hallar el incremento Δf de una función f, que corresponde a un incremento de x, Δx:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \qquad (12)$$

La fórmula anterior se denomina `aproximación incremental`.



Definición (Diferencial de una función)

Sea f una función derivable en x y sea $\Delta x \neq 0$. La diferencia entre $f(x+\Delta x)$ y $f(x)$, denotada por Δf,

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \tag{13}$$

se denomina incremento de f de x a $x+\Delta x$. El producto $f'(x)\Delta x$ se denomina diferencial de f en x con incremento Δx, y se denota df,

$$df = f'(x)\Delta x \; (dy = f'(x)\Delta x). \tag{14}$$

Δx puede ser cualquier valor distinto de cero. En la mayoría de las aplicaciones de diferenciales se toma $dx = \Delta x$.
Se ha visto que para valores pequeños de Δx, se puede aproximar el valor de Δf por el valor de df

$$\Delta f \approx df. \tag{15}$$

Ejemplo (Diferencial de una función)

Considérese una esfera de radio $R = 10 \pm 0{,}00001$ cm. Se va a calcular el error que se comete al calcular el volumen de dicha esfera.
El volumen está dado por la función $V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ siendo x el radio de la esfera. Se cumple que

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) = \frac{4}{3}\pi(x + \Delta x)^3 - \frac{4}{3}\pi x^3, \tag{16}$$

y por definición $\Delta V \approx dV$,

$$dV = V'(x)dx = 4\pi x^2 dx. \tag{17}$$

En este caso se tiene que $x = 10$ y $dx = \pm 0{,}00001$, de donde

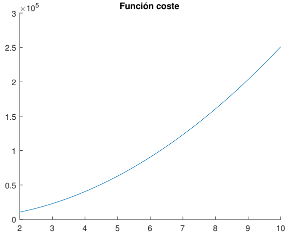
$$dV = V'(x)dx = 4\pi(10)^2(\pm 0{,}00001) = \pm 0{,}004\pi. \tag{18}$$

El posible error en el volumen es aproximadamente $\pm 0{,}004\pi$ cm.

Se quiere a construir un tanque de agua con una parte inferior formada por un cilindro con radio r y altura h, y una parte superior formada por media esfera. El tanque se diseñará para llevar $500m^3$, una vez está lleno. El área de la superficie cilíndrica es $2\pi hr$ y su volumen es $\pi r^2 h$. El área de superficie de la semiesfera es $2\pi r^2$ y su volumen es $2\pi r^3/3$. El coste de construir la parte cilíndrica es $\$300/m^2$ de área de superficie; la parte de la semiesfera tiene un coste de $\$400/m^2$. La función coste, en función de r, es

$$C(r) = 2\pi r \left(\frac{500 - 2\pi(r^3/3)}{\pi r^2} \right) + 2\pi r^2 400.$$

Si consideramos el coste para $2 \leq r \leq 10$, es una función continua de r



¿Para qué valores de r alcanza la función $C(r)$ su máximo y mínimo absolutos?

Cálculo de extremos absolutos

Definición (Máximos y mínimos absolutos)

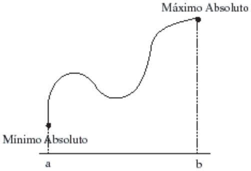
Sea f una función de dominio D y sea $c \in D$. Entonces:

1. *$f(c)$ es el máximo absoluto de f en D si $f(c) \geq f(x) \;\; \forall x \in D$.*
2. *$f(c)$ es el mínimo absoluto de f en D si $f(c) \leq f(x) \;\; \forall x \in D$.*

Los máximos y mínimos absolutos se llaman extremos absolutos de la función.

Teorema (Teorema de los valores extremos)

Una función f continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ alcanza en él un máximo y un mínimo absolutos.



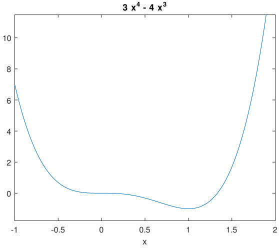
Procedimiento para hallar los extremos absolutos:

Para hallar los extremos absolutos de una función f continua en $[a, b]$ se hace lo siguiente:

1. Se calcula $f'(x)$ y se hallan todos los valores críticos de f en (a, b) (son puntos c tales que $f'(c) = 0$). (*)
2. Se halla el valor de la función f en a, en b y en cualquier valor crítico c de (a, b).
3. El mayor valor de los anteriores es el máximo absoluto y el menor el mínimo absoluto de f en $[a, b]$.

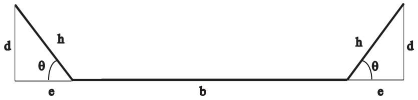
(*) Los puntos c en los que no existe $f'(c)$, con $c \in (a,b)$, también son puntos críticos.

Hallar los extremos absolutos de la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en el intervalo [-1,2].




```
syms x

f=3*x^4-4*x^3;

fplot(f,[-1,2])

solve(diff(f),x)

subs(f,x,-1); subs(f,x,0); subs(f,x,1); subs(f,x,2)
```

En la siguiente figura se muestra un canal de riego.



Un análisis premiliminar ha mostrado que el área de la sección debe ser constante e igual a $100 ft^2$. El objetivo es minimizar el coste de hormigón utilizado para alinear el canal.
Para ello minimizamos la longitud L del perímetro del canal (sin la tapa),

$$L = b + \frac{2d}{\sin(\theta)}.$$

Teniendo en cuenta que la sección es trapezoidal con área 100,

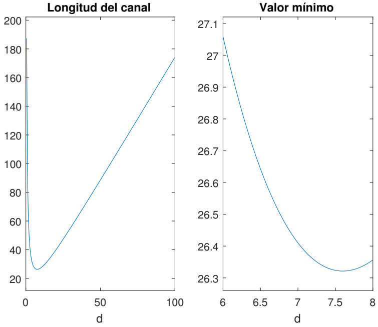
$$100 = db + \frac{d^2}{\tan(\theta)} \Longrightarrow b = \frac{1}{d}\left(100 - \frac{d^2}{\tan(\theta)}\right).$$

Canal de irrigación

Minimizamos la longitud L del perímetro del canal (sin la tapa),

$$L = \frac{100}{d} - \frac{d}{\tan\theta} + \frac{2d}{\sin\theta}.$$

Supongamos que $\theta = pi/3$, entonces $L = \frac{100}{d} + \sqrt{3}d$, y minimizamos L en el intervalo $0 < d < \infty$. Buscamos un máximo global de L en el intervalo $(0, \infty)$.



'?Cómo es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto donde se alcanza el mánimo?

Teorema (Teorema de la función creciente y decreciente)

Sea f una función real definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}$. Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b] \subset D$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces

1. $$f'(x) > 0 \ \ para \ \ a < x < b \Longrightarrow \ f \text{ es estrictamente creciente en } [a, b]. \tag{19}$$

2. $$f'(x) < 0 \ \ para \ \ a < x < b \Longrightarrow \ f \text{ es estrictamente decreciente en } [a, b]. \tag{20}$$

Definición (Convexidad y concavidad.)

Dada una función f continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b). Se dice que

1. *f es convexa si la gráfica de f se encuentra por encima de las rectas tangentes a f a lo largo del intervalo (a, b).*
2. *f es cóncava si la gráfica de f se encuentra por debajo de las rectas tangentes a f a lo largo del intervalo (a, b).*

Teorema (Convexidad y concavidad)

Sea f una función real definida en un cierto dominio $D \subset \mathbb{R}$, cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto (a, b). Entonces se tiene

1. *Si $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, entonces la gráfica de f es convexa.*
2. *Si $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, entonces la gráfica de f es cóncava.*

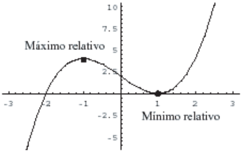
Cálculo de extremos relativos

Definición (Máximos y mínimos relativos.)

Sea f una función de dominio D y sea $c \in D$. Entonces:

1. *f tiene un máximo relativo en el punto c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contenga a c.*
2. *f tiene un mínimo relativo en el punto c si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contenga a c.*

Los máximos y mínimos relativos se llaman extremos relativos de la función.



Procedimiento para hallar los extremos relativos:

Dada f una función tal que $f'(c) = 0$ y existe la derivada segunda en un intervalo abierto que contiene a c, entonces se cumple que:

1. Si $f^{''}(c) > 0$, hay un mínimo relativo en $x = c$.
2. Si $f^{''}(c) < 0$, hay un máximo relativo en $x = c$.
3. Si $f^{''}(c) = 0$ y $f^{'''}(c) \neq 0$ entonces se tiene un punto de inflexión.

Canal de irrigación

- En primer lugar calculamos los puntos críticos de la función $L(d)$. Se obtiene que

$$f'(d) = 0 \Longrightarrow d = 7'59.$$

- En segundo lugar, comprobamos el signo de la derivada segunda en el punto crítico

$$f''(d) = 200/d^3 > 0$$

para todo $d \in (0, \infty)$.

- Se ha obtenido que la función $L(d)$ tiene un máximo relativo en $d = 7'59$ con $L(d) = 26'32$. pero además la función $L(d)$ es convexa en $(0, \infty)$, y el mánimo es absoluto.