Tema 3: Sucesiones de Números Reales. Funciones Reales de una Variable Real.

Cristina Solares

Universidad de Castilla-La Mancha

7 de noviembre de 2018

Índice

Ejemplo

La población de un país es de 55 millones y decrece a una tasa de $2{,}4\,\%$ *por año. Escribir una expresión para calcular la población durante los primeros n años. ¿Cuál es la población después de 5 años?. Hallar la convergencia o divergencia de la sucesión de población.*

Solución: *La población después de n años es* $55{,}000{,}000 \times (0{,}9760)^n$. *El valor de dicha expresión para* $n = 5$ *es* $48{,}709{,}000$.

```
syms n
limit(55000000*(0.9760)^n, n, inf)
ans = 0
```

Ejemplo

El coste medio de la estancia diaria en un hospital entre 1990 y 1997 viene dada en la siguiente tabla

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	687	752	820	881	931	968	1006	1033

donde a_n es el coste medio en dólares y n es el año, con $n = 0$ correspondiendo a 1990. Utilizando el comando `polyfit` *de Matlab, se puede ajustar un modelo a los datos anteriores:*

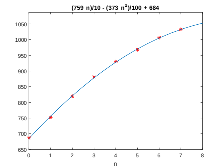
```
polyfit([0,1,2,3,4,5,6,7],[687,752,820,881,931,968,1006,1033],2)
ans = -3.7262 75.9167 684.2500
```

El modelo es $a_n = -3{,}73\, n^2 + 75{,}92\, n + 684{,}25$.

Problemas Aplicados

Ejemplo

```
plot([0,1,2,3,4,5,6,7],[687,752,820,881,931,968,1006,1033],'*r')
hold on
syms n
ezplot(-3.73*n^2 + 75,9 * n + 684, [0, 8])
```



Ejemplo

Predecir con este modelo, las ventas para el año 2004:

subs(-3.73*n$^2 + 75{,}9 * n + 684, n, 14)$
double(ans)
ans = 1.0155e+03

Ejemplo

Hemos visto en el tema anterior que si calculamos las raíces n-ésimas del número complejo $[1,0]$ *obtenemos los vértices de un polígono de n lados, inscrito en una circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radio 1. Deducir la fórmula que del área del polígono anterior* $a_n = \frac{1}{2} n \sin(2\pi/n)$. *Calcular el límite de la sucesión* a_n *cuando n tiende a infinito.*

```
syms n
limit((1/2)*n*sin(2*pi/n), n, inf)
ans =
pi
```

Definición (Sucesión de números reales)

Una sucesión de números reales es una aplicación de $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, tal que* $f(n) = x_n$*, es la imagen de* $n \in \mathbb{N}$ *en* $\mathbb{R}$*, la sucesión se denota* $\{x_n\}$*.*

Ejemplo (Sucesión)

El conjunto de números reales $-3, 3, -3, 3, -3, \ldots$ *es una sucesión cuyo término n-ésimo viene dado por* $x_n = (-1)^n 3$*,* $n = 1, 2, 3, \ldots$

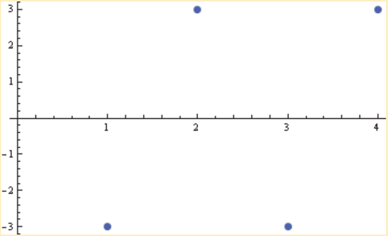


Figura: Sucesión de números reales

Definición (Límite finito)

Se dice que el límite de la sucesión $\{x_n\}$ *es* $x \in \mathbb{R}$ *y se expresa por*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

si elegido un número real y positivo ϵ *es posible hallar un* $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > n_0$ *se verifique* $|x_n - x| < \epsilon$ *(también se denota* $x_n \to x$*).*

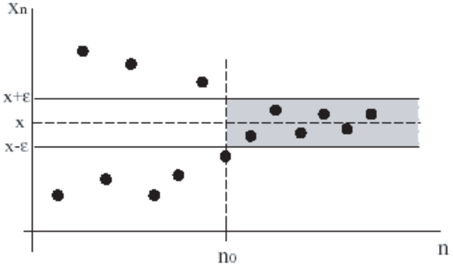


Figura: Límite finito de una sucesión

Definición (Límite infinito)

Se dice que el límite de la sucesión $\{x_n\}$ es $\pm\infty$ y se expresa por

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty,$$

si dado $k \in \mathbb{R}^+$ es posible hallar un $n_0 = n_0(k)$ tal que para todo $n > n_0$ se verifique $|x_n| > k$, (también se denota $x_n \to \pm\infty$).

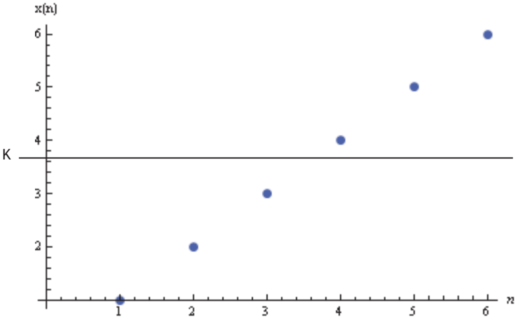


Figura: Límite infinito de una sucesión

Definición (Sucesión convergente)

Si existe límite de una sucesión y es finito, se dice que la sucesión es convergente*.*
Entre estas merecen especial mención los infinitésimos cuyo límite es cero.

Definición (Sucesión divergente)

Si existe límite de una sucesión y es infinito, se dice que la sucesión es divergente*.*

Definición (Sucesión oscilante)

Si no existe límite de una sucesión, se dice que la sucesión es oscilante*.*

Definición (Infinitésimo)

Una sucesión $\{x_n\}$ *se dice infinitésimo si*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Teorema (Propiedades de los infinitésimos)

Se cumple que:

1. *La suma de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo.*
2. *El producto de un infinitésimo por una constante o por una sucesión acotada superiormente, en valor absoluto, es un infinitésimo.*

Teorema

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ *siendo* x *e* y *finitos, entonces:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \times y_n) = x \times y$.
3. *Si* $y \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n^p) = x^p$, $\forall p \in \mathbb{R} / \exists x^p$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (p^{x_n}) = p^x$, $\forall p \in \mathbb{R} / \exists p^x$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n^{y_n}) = x^y$, *siendo* $x > 0$.

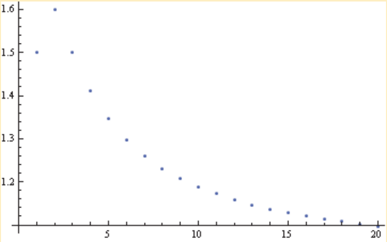
Además se verifica:

1. El cociente de una sucesión divergente por otra acotada superiormente, en valor absoluto, es divergente.
2. El cociente de una sucesión acotada, en valor absoluto, superiormente, por otra divergente es un infinitésimo.

Ejemplo (Límite)

Para calcular el límite de la sucesión de término general $x_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+1}$, *se procede como sigue:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{1+0} = 1. \tag{1}$$



Teorema

Dadas $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *dos sucesiones de números reales,*

1. *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, *habrá indeterminación en los siguientes casos:*
   (a) $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = (\infty - \infty)$,
   (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.
2. *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$, *habrá indeterminación en los siguientes casos:*
   (a) $\lim_{n\to\infty} (x_n^{y_n}) = (0^0)$,
   (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Teorema

Dadas $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *dos sucesiones de números reales,*

3. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, *habrá indeterminación en los siguientes casos:*
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n^{y_n}) = (\infty^0)$,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \times y_n) = (\infty \times 0)$.
4. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, *habrá indeterminación:*
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n^{y_n}) = (1^\infty)$.

Considérese el límite $\lim_{n\to\infty} x_n$ donde x_n es una expresión racional de la forma:

$$x_n = \frac{a_0 n^h + a_1 n^{h-1} + \cdots + a_h}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k}, \tag{2}$$

siendo $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ y $h, k \in \mathbb{N}$. Cuando $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\infty}{\infty}$.

Para estudiar este límite, se distinguen los siguientes casos:

Caso 1 : Si $h < k$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Caso 2 : Si $h > k$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Caso 3 : Si $h = k$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a_0/b_0$.

Ejemplo (Límite)

Considerar la sucesión cuyo término general viene dado por:

$$x_n = \frac{3n^2 + 5n}{6n^3 + 5}. \tag{3}$$

El límite de esta sucesión cuando $n \to \infty$, procediendo como en el **Caso 2**, *se obtiene dividiendo numerador y denominador por n^3, de donde*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n}{6n^3 + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3/n + 5/n^2}{6 + 5/n^3} = 0. \tag{4}$$

Se facilita generalmente el paso al límite de las expresiones irracionales que se presentan en forma indeterminada, multiplicándolas y dividiéndolas por expresiones convenientes.

Ejemplo (Límite irracional)

Si se quiere calcular el límite cuando $n \to \infty$ de la sucesión de término general

$$x_n = \sqrt{n^2 + an + b} - n, \tag{5}$$

aparece una indeterminación del tipo $(\infty - \infty)$. Para hacerla desaparecer se multiplica y divide por la conjugada de la expresión del término general

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + an + b} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{an + b}{\sqrt{n^2 + an + b} + n} = \\ &\lim_{n\to\infty} \frac{a + b/n}{\sqrt{1 + a/n + b/n^2} + 1} = a/2. \end{aligned} \tag{6}$$

Definición (Sucesión acotada superiormente)

Si $x_n < M, \forall n (M \in \mathbb{R})$ *se dice que la sucesión* $\{x_n\}$ *está acotada superiormente.*

Definición (Sucesión acotada inferiormente)

Si $x_n > m, \forall n (m \in \mathbb{R})$ *se dice que la sucesión* $\{x_n\}$ *está acotada inferiormente.*

Definición (Sucesión acotada)

Se dice la sucesión $\{x_n\}$ *está acotada si lo está superior e inferiormente.*

Definición (Sucesión monótona creciente)

Si $x_{n+1} \geq x_n, \forall n$ *se dice que la sucesión* $\{x_n\}$ *es monótona creciente.*

Definición (Sucesión estrictamente creciente)

Si $x_{n+1} > x_n, \forall n$ *se dice que la sucesión* $\{x_n\}$ *es estrictamente creciente.*

Definición (Sucesión monótona decreciente)

Si $x_{n+1} \leq x_n, \forall n$ *se dice que la sucesión* $\{x_n\}$ *es monótona decreciente.*

Definición (Sucesión estrictamente decreciente)

Si $x_{n+1} < x_n, \forall n$ *se dice que la sucesión* $\{x_n\}$ *es estrictamente decreciente.*

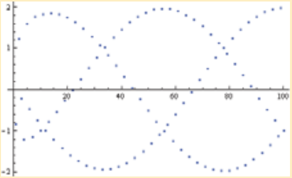
Ejemplo (Sucesión acotada)

La sucesión de término general

$$x_n = (-1)^n \frac{2n}{n+1} \sin n$$

está acotada.

$$|x_n| = \left|(-1)^n \frac{2n}{n+1} \operatorname{sen} n\right| < \frac{2n}{n+1} < 2, \quad \forall n. \tag{7}$$



Sean las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ verificando uno cualquiera de los siguientes casos:

a) La sucesión $\{y_n\}$ es monótona creciente, con

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty.$$

b) La sucesión $\{y_n\}$ es monótona decreciente, verificándose además

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Entonces, si

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lambda \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lambda, \tag{8}$$

con λ finito o infinito.

Ejemplo (Criterio de Stolz)

Dada la sucesión de término general:

$$x_n = \frac{1+2+3+4+\cdots+n}{n^2}.$$

A continuación se comprueba que se cumplen las condiciones de Stolz: La sucesión $\{n^2\}$ *es monótona creciente con* $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Luego,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{(1+2+3+\cdots+n-1+n)-(1+2+3+\cdots+n-1)}{n^2-(n-1)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{9}$$

por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n-1+n}{n^2} = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Si la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite finito o infinito, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Ejemplo (Criterio de la media aritmética)

Para calcular el límite de la sucesión de término general $x_n = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}}{n}$, *se puede aplicar el criterio de la media aritmética como sigue,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{11}$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de términos positivos, convergente o divergente, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Ejemplo (Criterio de la media geométrica)

Para calcular el límite de la sucesión de término general

$$x_n = \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{n!}},$$

se puede aplicar el criterio de la media geométrica como sigue,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(x+1)}{1}\frac{(x+2)}{2}\dots\frac{(x+n)}{n}} \tag{12}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x+n}{n} = 1.$$

Teorema

Sea $\{x_n\}$ *una sucesión de términos positivos, si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lambda \ \ (\textit{finito o infinito}),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lambda.$$

Ejemplo (Criterio del cociente y la raíz)

En este ejemplo se aplica el criterio del cociente y la raíz para calcular el límite de la sucesión de término general es $x_n = \sqrt[n]{n}$*. De esta manera se obtiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1. \tag{13}$$

Definición (Infinito)

Una sucesión $\{x_n\}$ *se dice que es un infinito si*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Definición (Infinitésimos (infinitos) equivalentes)

Dados dos infinitésimos (infinitos) $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *se dicen equivalentes si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1,$$

y se denota $x_n \sim y_n$.

A continuación se muestra una lista de términos generales de sucesiones equivalentes:

1. $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ (Stirling) para $n \to \infty$.
2. $\dfrac{\log_a n}{n^k} \sim 0$, $n \to \infty$.
3. $\dfrac{n^k}{a^n} \sim 0$, $n \to \infty$.
4. $a_0 n^b + a_1 n^{b-1} + \cdots \sim a_0 n^b$, para $n \to \infty$.
5. $\log(a_0 n^b + a_1 n^{b-1} + \dots) \sim \log(n^b)$, para $n \to \infty$.
6. $\log(1 + x_n) \sim x_n$, si $x_n \to 0$.
7. $\log x_n \sim (x_n - 1)$, si $x_n \to 1$.
8. $\sin x_n \sim x_n \sim \tan x_n$, si $x_n \to 0$.
9. $1 - \cos x_n \sim \dfrac{(x_n)^2}{2}$, si $x_n \to 0$.
10. $\arcsin x_n \sim x_n \sim \arctan x_n$, si $x_n \to 0$.
11. Si $x_n \to x \neq 0$, $x_n \sim x$.

Para calcular límites de la forma ∞^0 y 0^0, en general es un buen método tomar logaritmos de las expresiones dadas y utilizar las equivalencias vistas.

Ejemplo (Límite ∞^0)

Se quiere calcular el límite de la sucesión cuyo término general es

$$x_n = (2 + 3n^2)^{\dfrac{1}{3 + 2\log(n+1)}}. \tag{14}$$

Tomando logaritmos, el $\lim_{n\to\infty} \log(x_n)$ *queda como*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(2+3n^4)}{3+2\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^4)}{2\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\log(n)}{2\log(n)} = 2. \tag{15}$$

De esta manera, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} e^{\log(x_n)} = e^2$.

En general se facilita el cálculo del límite tomando logaritmos y utilizando las equivalencias vistas.

Ejemplo (Límites de la forma 1^∞)

Para calcular el límite de la sucesión cuyo término general viene dado por

$$x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \tag{16}$$

basta tomar logaritmos como a continuación se indica,

$$\lim_{n\to\infty} \log(x_n) = \lim_{n\to\infty} n\log(\frac{n}{n+1}). \tag{17}$$

Aplicando la Equivalencia 7, se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{n+1}\right) = -1. \tag{18}$$

Entonces$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} e^{\log(x_n)} = e^{-1}$.

Se llaman así aquellas sucesiones cuyos términos se expresan en función de los anteriores $x_n = f(x_{n-1})$.

Ejemplo (Sucesión recurrente)

Por ejemplo, la sucesión

$$x_1 = 1,\ x_2 = \sqrt{3x_1} = 3^{1/2}, x_3 = \sqrt{3x_2} = 3^{1/2+1/4} \ldots, x_{n+1} = \sqrt{3u_n}$$

es recurrente.

- La factura mensual del agua está en función de los metros cúbicos gastados.
- El precio del billete de ferrocarril depende de la distancia a que se encuentre el lugar a donde vamos.

Estas frases hacen referencia a una dependencia entre determinadas magnitudes, y es en este sentido en el que se va a definir el concepto matemático de función.

Definición (Función.)

Una función f es una correspondencia entre dos conjuntos, de forma que a cada elemento del primero se le asigna un elemento del segundo.

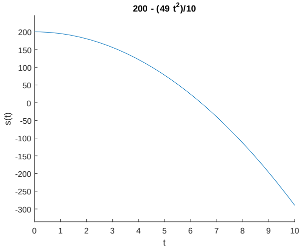
$$\begin{array}{cccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longrightarrow & y. \end{array} \tag{19}$$

Se dice que y es función de x y se escribe $y = f(x)$. El conjunto de valores que puede tomar x (para los cuales tiene sentido $f(x)$), se llama dominio de la función, x se llama variable independiente e y se llama variable dependiente. La imagen es el conjunto de valores $y \in Y$ para los que existe $x \in X$ con $y = f(x)$.

Definición (Función real de variable real.)

Una función f es una función real de variable real, si su dominio e imagen están contenidos en $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & y = f(x). \end{array} \tag{20}$$



La función de posición

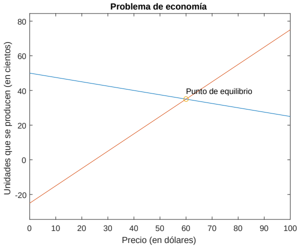
$$s(t) = -4{,}9t^2 + 200$$

da la altura (en metros) de un objeto que cae desde 200 m de altura. Calcular el límite

$$\lim_{t \to 4} \frac{s(4) - s(t)}{4 - t} = -39{,}2$$

que da la velocidad del objeto cuando $t = 4$.

Las funciones demanda y suministro de un producto son: $q_d(x) = 50 - (1/4) * x$ y $q_s(x) = x - 25$, siendo x el precio en dolares de cada unidad. En la siguiente gráfica se muestran las dos funciones y su punto de intersección (punto de equilibrio) $(60, 35)$. Interpretar el significado de las gráficas.



Una fábrica quema carbón para generar electricidad. El coste C en euros de eliminar p % de la polución en las emisiones de humo es

$$C = \frac{80000p}{100 - p}$$

con $0 \leq p < 100$. Calcular el coste de la eliminación del 15 %, 50 % y 90 %. Calcular el límite de C cuando $p \to 100^-$.

Teorema (Límite por sucesiones)

Una función $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende a c, si y sólo si para toda sucesión de valores $x_n \neq c$ del dominio de f, que tenga por límite c, la sucesión de los valores correspondientes, $f(x_n)$, tiene por límite L.

Ejemplo (Límite por sucesiones)

Dada la función real de variable real $f(x) = \sin x$, se puede demostrar que no tiene límite cuando x tiende a $+\infty$.
Tomando las sucesiones de términos generales

$$x_n = n\pi \;\; e \;\; y_n = \pi/2 + 2n\pi, \tag{21}$$

se tiene que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sin n\pi = 0; \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \sin \pi/2 + 2n\pi = 1, \tag{22}$$

luego $f(x)$ no tiene límite.

Definición (Límite de una función.)

Dada f una función real de variable real, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $c \in \mathbb{R}$ es $L \in \mathbb{R}$, y se denota,

$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = L, \tag{23}$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe un número $\Delta > 0$ tal que verifica

$$|f(x) - L| < \epsilon \;\; siempre \;\; que \;\; 0 < |x - c| < \Delta. \tag{24}$$

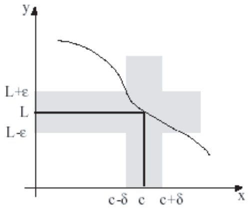
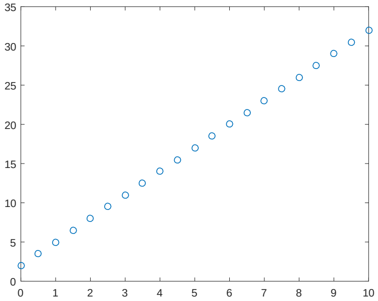


Figura: Definición formal de límite de una función.

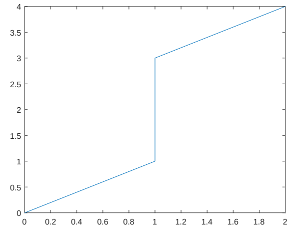


A continuación dibujamos valores (x, y) de la función $y = 3x + 2$:

```
x=0:0.5:10;
y=3.*x+2;
plot(x,y,'o')
```

Se puede observar que el

$$\lim_{x \longrightarrow 5} 3x + 2 = 17.$$



Vamos a dibujar la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$$

con Matlab:

```
x1=0:0.1:1;
y1=x1;
x2=1:0.1:2;
y2=x2+2;
x=[x1 x2];
y=[y1 y2];
plot(x,y)
```

¿Qué ocurre con el límite?

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x)$$

Además se tiene que:

$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow c^-} f(x) = L. \tag{25}$$

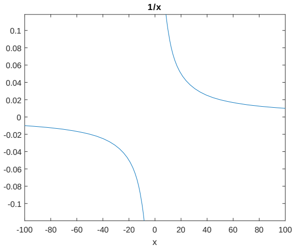
Definición (Límite de una función en el infinito.)

Dada f una función real de variable real, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ $(-\infty)$ es L, y se denota,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = L, \ \left(\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = L \right), \tag{26}$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe un número positivo $N = N(\epsilon)$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \ \textit{siempre que} \ x > N \ \ (|f(x) - L| < \epsilon \ \textit{siempre que} \ x < N). \tag{27}$$



Sea la función $f(x) = 1/x$, calculamos su valor para $x = 1, 10, 100, 1000$

```
x=[1,10,100,1000];
1./x
ans =
1.0000 0.1000 0.0100 0.0010
```

Se cumple que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Teorema

Dadas dos funciones reales de variable real $f(x)$ y $g(x)$, si

$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = L_1 \;\; y \;\; \lim_{x \longrightarrow c} g(x) = L_2, \tag{28}$$

entonces:

1. *El límite de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los límites,*

$$\lim_{x \longrightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = (L_1 \pm L_2). \tag{29}$$

2. *El límite del producto es el producto de los límites,*

$$\lim_{x \longrightarrow c} (f(x)\; g(x)) = (L_1 \; L_2). \tag{30}$$

3. *Si $L_2 \neq 0$, el límite del cociente es el cociente de los límites,*

$$\lim_{x \longrightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}. \tag{31}$$

Definición (Función divergente.)

Una función f que crece o decrece de manera no acotada cuando x tiende a c se dice que es divergente en c. En este caso se escribirá:

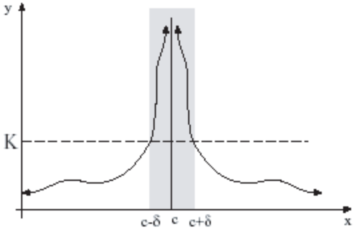
$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = +\infty \quad si \quad f \quad crece \quad de \quad manera \quad no \quad acotada, \tag{32}$$

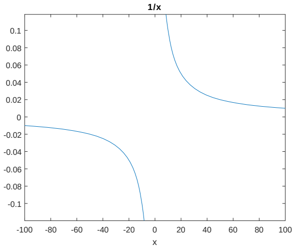
$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = -\infty \quad si \quad f \quad decrece \quad de \quad manera \quad no \quad acotada. \tag{33}$$

Definición (Límite infinito.)

Una función $f(x)$ tiene límite $+\infty$ $(-\infty)$ cuando x tiende a c, si para todo número real $K > 0$, existe otro número real $\Delta > 0$, tal que si

$$0 < |x - c| < \Delta \Longrightarrow f(x) > K \;\; (f(x) < -K). \tag{34}$$





Sea la función $f(x) = 1/x$, calcular los límites

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x).$$

1. Calcular los límites
$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{1}{x-2} + 3, \quad \lim_{x \longrightarrow 3} \frac{1}{x-2} + 3$$
2. Para una cantidad de gas a temperatura constante, la presión P es inversamente proporcional al volumen V, hallar el límite de P cuando $V \to 0^+$.
3. Según la teoría de la relatividad, la masa m de una partícula depende de su velocidad
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{(1-(v^2/c^2))}}$$
donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. Calcular el límite de la masa cuando v tiende a c^-.

Definición (Infinitésimos (infinitos) equivalentes)

Dadas f y g, dos infinitésimos (infinitos) en el punto a, se dicen equivalentes si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

y se denota $f \sim g$.

Nota

Se puede sustituir un infinitésimo o un infinito por otro equivalente en un producto o en un cociente.

Ejemplo (Infinitésimos equivalentes)

Las siguientes funciones son infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0$*:*

1. $\log(1+x) \sim x$.
2. $\sin x \sim x$.
3. $1 - \cos x \sim \dfrac{(x)^2}{2}$.
4. $\tan x \sim x \sim \arctan x$.

Otras equivalencias son:

1. $\log x \sim x - 1$ *cuando* $x \to 1$.

1. Calcular el límite de $f(x) = (x^2 + x^3)\log(1 + \frac{1}{x^3})$ cuando $x \to \infty$.
2. Calcular el límite de $f(x) = \frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}$ cuando $x \to a$.
3. Calcular el límite de $f(x) = (\cos x)^{1/\sin x}$ cuando $x \to 0$.

La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(r) = \begin{cases} GMr/R^3, & r < R \\ GM/r^2, & r \geq R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R es su radio y G es la constante gravitacional. ¿F es una función continua de r?.

Una fábrica suministra un cierto material a diferentes empresas. Si la empresa realiza un pedido de x unidades siendo $x \leq 100$, entonces el precio es de 10 euros por unidad de material. Si la empresa realiza un pedido superior a 100 unidades, entonces el precio es de 7 euros por unidad. La función precios se puede definir como.

$$p(x) = \begin{cases} 10x, & 0 < x \leq 100 \\ 7x, & x > 100 \end{cases}$$

¿Es continua la función $p(x)$ en $x = 100$?. Hallar el valor de a en la siguiente función para que sea continua en $x = 100$

$$p(x) = \begin{cases} 10x, & 0 < x \leq 100 \\ 7x + a, & x > 100 \end{cases}$$

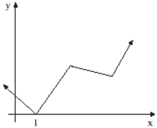
Definición (Función continua en un punto.)

Una función f real de variable real se dice que es continua en un punto c si

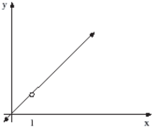
1. $f(c)$ *está definido,*
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow c} f(x)$ *existe,*
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow c} f(x) = f(c)$.

Una función que no es continua en c se dice que tiene una discontinuidad en ese punto.

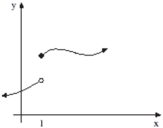
Continuidad de Funciones



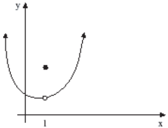
(a) Continua en x=1



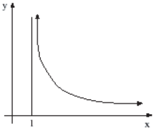
(b) Discontinua en x=1



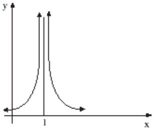
(c) Discontinua en x=1



(d) Discontinua en x=1



(e) Discontinua en x=1



(f) Discontinua en x=1

Teorema (Propiedades de las funciones continuas)

Dado $s \in \mathbb{R}$, y f y g funciones continuas en $x = c$, entonces las siguientes funciones son continuas en $x = c$:

1. sf.
2. $f \pm g$.
3. f/g *si* $g(c) \neq 0$.
4. $f \circ g$ *si* f *es continua en* $g(c)$.

Teorema (Composición de funciones continuas)

Si f es continua en c y g es continua en $f(c)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en c.

Definición (Continuidad en un intervalo.)

Dada f una función real de variable real, se dice que es continua en el intervalo abierto (a, b) si es continua en todos los puntos del mismo.

Ejemplo (Continuidad en un intervalo)

La función $h(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ es continua en todo $x \in \mathbb{R}$, salvo en $x = n\pi, \;\; n \in \mathbb{Z}$, ya que en estos puntos no está definida. Es decir, h es continua en la unión de los intervalos $\cdots \cup (-2\pi, -\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \cup \ldots$.

1. Calcular los siguientes límites:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4\sin^2(1/n)\log(1+\frac{1}{n})}{(n+5)\cos(\dfrac{n\pi+5}{4n+1})}$.
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$.
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n^2+1)(1-\cos(1/n))}{(n^2-2)\log(1+\frac{1}{n^2})}$.
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{\dfrac{n^2-1}{n}}$.
   (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$.
   (g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sin(\alpha)+2^2\sin(\alpha/2)+\cdots+n^2\sin(\alpha/n)}{n^2}$.

(h) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{30n^2}{2n+1}$.

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$.

(j) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^3}{2n^2+3}+\dfrac{1-5n^2}{5n+1}\right)$.

3. Calcular los siguientes límites utilizando el criterio de Stolz

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log n}.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}.$$

4. Estudiar la sucesión recurrente definida como

$$x_1=\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}},\ldots,x_n=\sqrt{3+x_{n-1}}$$