Geometría Analítica

Tema 3: Cónicas

Cristina Solares

Universidad de Castilla-La Mancha

9 de octubre de 2021

Definición (3.1 Cónicas)

Se denominan cónicas a las curvas que resultan de la intersección de un plano con una superficie cónica o cilíndrica de revolución.

En un sistema de referencia métrico de coordenadas cartesianas del plano, las cónicas se representan mediante una ecuación de segundo grado en x_1 y x_2 de la forma

$$f(x_1, x_2) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0. \qquad (1)$$

La ecuación (1) también se puede expresar en forma matricial:

$$XAX^{'} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \qquad (2)$$

La ecuación (1) representa tanto a las cónicas propias (parábola, elipse e hipérbola) como a las degeneradas (un punto, una recta, dos rectas secantes o dos rectas paralelas).

Ante un cambio de sistema de referencia (traslación y/o giro de ejes, conservándose perpendiculares), las cónicas tienen los siguientes invariantes:

1. **Invariante lineal:**

$$I_1 = a_{11} + a_{22}. \tag{3}$$

2. **Invariante cuadrático:**

$$I_2 = A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

3. **Invariante proyectivo o principal:**

$$I_3 = |A|. \tag{5}$$

3.2 Clasificación Métrica

Cónicas propias

$$
I_3 \neq 0 \begin{cases}
I_2 > 0: & \text{Elipse} \begin{cases} I_3 I_1 < 0 & \text{real} \\ I_3 I_1 > 0 & \text{imaginaria} \end{cases} \\
I_2 < 0: & \text{Hiperbola real} \begin{cases} I_1 = 0 & \text{equilatera} \\ I_1 \neq 0 & \text{no equilatera} \end{cases} \\
I_2 = 0: & \text{Parabola real}
\end{cases}
$$

Cónicas degeneradas

$$
I_3 = 0 \begin{cases}
I_2 \neq 0: & \\
\text{Dos rectas secantes} \begin{cases} I_2 > 0 & \text{Imaginarias} \begin{cases} \text{Elipse} \\ \text{degenerada} \end{cases} \\ I_2 < 0 & \text{Reales} \begin{cases} \text{Hiperbola} \\ \text{degenerada} \end{cases} \begin{cases} I_1 = 0 & \text{equilatera} \\ I_1 \neq 0 & \text{no equilatera} \end{cases} \end{cases} & \\
I_2 = 0: \text{Parabola degenerada} \begin{cases} rg\ A = 2 & \begin{cases} \text{Dos rectas} \\ \text{paralelas} \end{cases} \begin{cases} A_{11} + A_{22} > 0 & \text{Imaginarias} \\ A_{11} + A_{22} < 0 & \text{Reales} \end{cases} \\ rg\ A = 1 & \text{Recta real doble} \end{cases} &
\end{cases}
$$

1. Clasifica la cónica $xy - 1 = 0$.
2. Clasifica la cónica $-x^2 - y^2 + 24x + 32y - 4xy - 112 = 0$.. **Sol:** Hipérbola

```
function tipo=clasifica(A)
    I1=A(1,1)+A(2,2);
    I2=det([A(1,1),A(1,2);A(1,2) A(2,2)]); I3=det(A);
    if I3~=0
        if I2>0
            if I3*I1<0 tipo='elipse real';
            end
        elseif I2<0
            if I1==0
                tipo='hiperbola real equilatera';
            else
                tipo='hiperbola real no equilatera';
            end
        else
            tipo='parabola real'
        end
    else
        tipo='conica imaginaria o degenerada'
    end
end
```

En la línea de comandos

```
A=[-1 -2 12;-2 -1 16; 12 16 -112];
clasifica(A)
```

Definición (3.2 Centro de una cónica)

El centro de una cónica es el centro de simetría de la misma, es decir el punto tal que, escogido un punto arbitrario de la curva, su simétrico con respecto al centro también pertenece a la cónica.

Definición (3.5 Ejes)

Se denominan ejes de una cónica a sus ejes de simetría. También se definen, en cónicas con centro, como dos diámetros conjugados ortogonales.

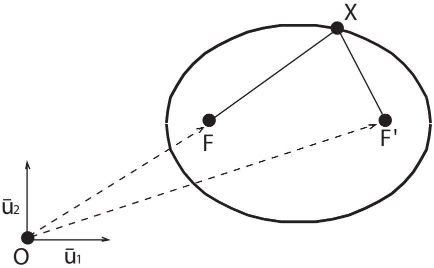
Definición (3.6 Vértices)

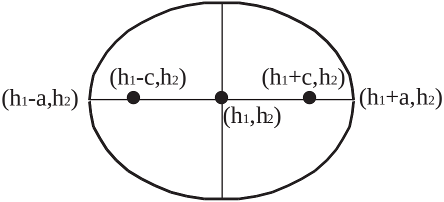
Los vértices son los puntos de intersección de la cónica con sus ejes.

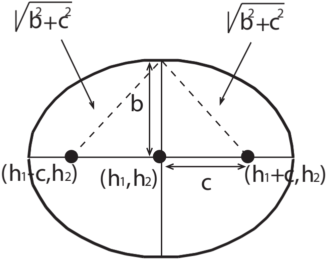
3.3 La Elipse

Definición (3.7 Elipse)

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.







Los *vértices* de la elipse son los puntos de corte de la misma con la recta que pasa por los focos. La cuerda que une dichos vértices se denomina *eje mayor* y su punto medio es el *centro*. La cuerda perpendicular al eje mayor y que pasa por el centro se denomina *eje menor*.

3.3.1 Ecuación Canónica de la Elipse

Para obtener la forma canónica de la ecuación de la elipse, supóngase que el centro, vértices y focos de la misma tienen como coordenadas: (h_1, h_2), $(h_1 \pm a, h_2)$, y $(h_1 \pm c, h_2)$ respectivamente.
Por definición de elipse, la suma de distancias de un punto cualquiera de la elipse a los dos focos es constante.
Para un vértice dicha suma es:

$$(a + c) + (a - c) = 2a, \tag{6}$$

que coincide con la longitud del eje mayor.
Sea $X \equiv (x_1, x_2)$ un punto cualquiera de la elipse, la suma de sus distancias a los focos será $2a$:

$$\sqrt{(x_1 - (h_1 - c))^2 + (x_2 - h_2)^2} + \sqrt{(x_1 - (h_1 + c))^2 + (x_2 - h_2)^2} = 2a, \tag{7}$$

que se reduce a

$$(a^2 - c^2)(x_1 - h_1)^2 + a^2(x_2 - h_2)^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{8}$$

Sin embargo se puede observar que $2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a$, entonces $b^2 = a^2 - c^2$.
Luego la ecuación de la elipse de centro (h_1, h_2), con ejes paralelos a los ejes coordenados, longitud del eje mayor $2a$ y longitud del eje menor $2b$, es:

$$\boxed{\frac{(x_1 - h_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - h_2)^2}{b^2} = 1.} \tag{9}$$

En toda elipse los focos yacen sobre el eje mayor, entre los vértices y el centro, a una distancia c del centro. Esto implica que $0 < c < a$.

Definición (3.8 Excentricidad de una elipse)

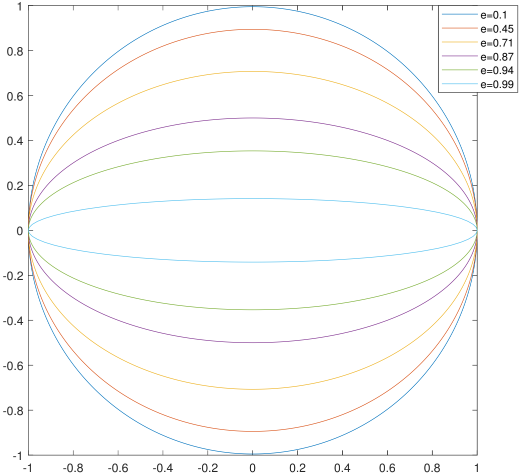
La excentricidad de una elipse se define como el cociente

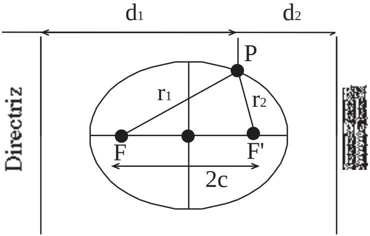
$$e = \frac{c}{a}. \tag{10}$$

Se cumple que $0 < e < 1$*, y a mayor valor de e la elipse es más "achatada".*

Si $c = 0$, los focos coinciden en el centro, $e = 0$, y se obtiene una circunferencia de centro (h_1, h_2) y radio a. Si $c = a$, los focos coincide con los vértices y la elipse degenera en el segmento que une los focos F y F'.

En la siguiente figura se muestran elipses con diferentes valores de la excentricidad e.





Las directrices de una elipse son rectas paralelas al eje menor, a una distancia $d = \frac{a}{e}$. Dado un punto arbitrario de la elipse $P = (x_1, x_2)$, se cumple que la distancia de P al foco dividida por la distancia de P a la directriz, es igual a la excentricidad, es decir

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{11}$$

Dado un foco $F' = (h_1 + c, h_2)$, la excentricidad $e = \frac{c}{a}$ y una directriz de la elipse, $x_1 = h_1 + \frac{a}{e}$, se puede construir la ecuación de la misma, dado un punto $P \equiv (x_1, x_2)$ cumple

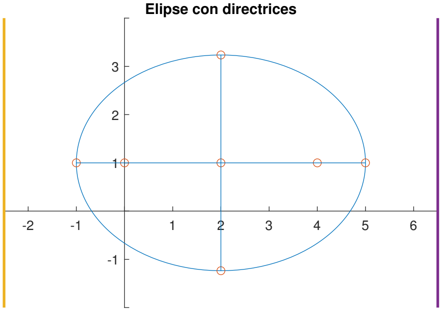
$$\frac{\sqrt{(x_1 - h_1 - c)^2 + (x_2 - h_2)^2}}{|h_1 + \frac{a^2}{c} - x_1|} = \frac{c}{a}. \tag{12}$$

Ejemplo

En la siguiente figura se muestra la elipse

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

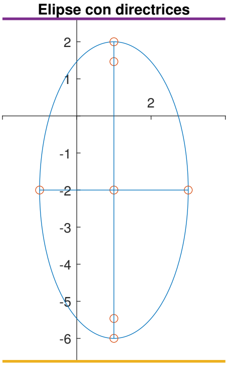
con exentricidad $e = 2/3$. Se muestra el centro, vértices, focos, ejes de simetría y directrices.



En la siguiente figura se muestra la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

con exentricidad $e = \sqrt{3}/2$. Se muestra el centro, vértices, focos, ejes de simetría y directrices.



Los puntos de intersección de una elipse

$$\frac{(x_1 - h_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - h_2)^2}{b^2} = 1, \tag{13}$$

y una recta

$$Ax_1 + Bx_2 + C = 0, \tag{14}$$

se obtienen resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas. Al eliminar una de las incógnitas, se obtiene una ecuación de segundo grado. Analizando el discriminante Δ de esta ecuación resulta

- Si $\Delta > 0$, la recta es secante, hay dos soluciones distintas.
- Si $\Delta = 0$, la recta es tangente, hay una solución doble.
- Si $\Delta < 0$, no hay soluciones reales.

Dada la elipse de ecuación

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{15}$$

La tangente a la misma en un punto P de coordenadas (p_1, p_2) es una recta que pasa por dicho punto con pendiente igual a la derivada de la función en P:

$$\boxed{x_2 - p_2 = \left(-\frac{f'_{x_1}}{f'_{x_2}}\right)_P (x_1 - p_1),} \tag{16}$$

donde

$$\left(-\frac{f'_{x_1}}{f'_{x_2}}\right)_P = \left(-\frac{b^2 x_1}{a^2 x_2}\right)_P = -\frac{b^2 p_1}{a^2 p_2}, \tag{17}$$

y por tanto la ecuación de la normal es:

$$\boxed{x_2 - p_2 = \left(\frac{f'_{x_2}}{f'_{x_1}}\right)_P (x_1 - p_1),} \tag{18}$$

donde

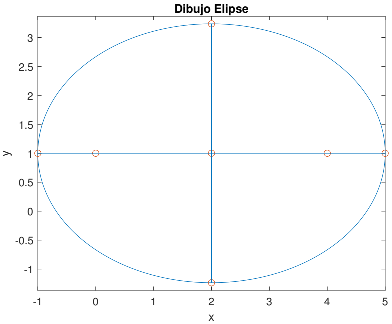
$$\left(\frac{f'_{x_2}}{f'_{x_1}}\right)_P = \left(\frac{a^2 x_2}{b^2 x_1}\right)_P = \frac{a^2 p_2}{b^2 p_1}. \tag{19}$$

1. Hallar la ecuación canónica de la elipse con focos en $F \equiv (0,1)$ y $F' \equiv (4,1)$ cuyo eje mayor tiene longitud 6. **Sol:** $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$.
2. Hallar el centro, vértices y focos de la elipse determinada por la ecuación $4x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 + 4x_2 - 8 = 0$. **Sol:** centro: $(1,-2)$; vértices eje mayor: $(1,-6),(1,2)$;focos: $(1,-2-2\sqrt{3}),(1,-2+2\sqrt{3})$.
3. Hallar la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas $0 \equiv (0,0)$, que pasa por el punto $P \equiv (1, \frac{8\sqrt{6}}{5})$ y tiene excentricidad $e = \frac{3}{5}$.
4. Hallar la ecuación de la elipse de focos $F \equiv (-6,0)$ y $F' \equiv (6,0)$ y excentricidad $e = \frac{3}{5}$. **Sol:** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.
5. Hallar la ecuación de la elipse de focos $F \equiv (-2,0)$ y $F' \equiv (2,0)$ y ecuaciones directrices $x = \pm 8$.
6. Determinar el valor de n para que la recta de ecuación $y = 2x + n$ sea tangente a la elipse:
$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} = 1. \tag{20}$$
7. Hallar las tangentes a la elipse
$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} = 1, \tag{21}$$
desde el punto $P \equiv (5,0)$. **Sol:**$x - 2y - 5 = 0, x + 2y - 5 = 0$.
8. Hallar la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas $0 \equiv (0,0)$, que pasa por los puntos $P \equiv (5,0)$ y $Q \equiv (2,2)$
9. Hallar la ecuación de la cónica cuya excentricidad es $1/3$, tiene el foco en el punto $(2,0)$ y por directriz la recta $x = 6$. **Sol:** $-6x + 2x^2 + \frac{9y^2}{4} = 0$.

La ecuación canónica de la elipse con focos en $F \equiv (0,1)$ y $F' \equiv (4,1)$ cuyo eje mayor tiene longitud 6, es $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$. Si queremos dibujar la elipse y todos sus elementos:

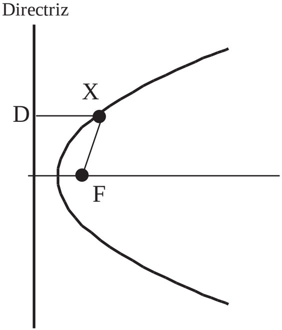
```
elipse(3,sqrt(5),[2,1],'h')
```

El comando elipse(a,b,centro,orientacion) se encuentra definido en el fichero elipse.m. Para utilizarlo tenemos que pasar como argumentos: a (2a longitud eje mayor), b (2b longitud eje menor), centro (centro de la elipse), orientación (sus valores pueden ser 'h' o 'v').



Definición (3.4 La Parábola)

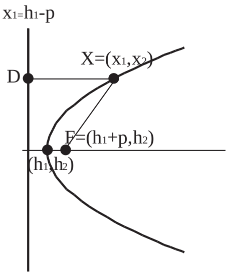
Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.



Dado un punto $X = (x_1, x_2)$ de la parábola, cumple por definición (véase la Figura **??**)

$$d(X, F) = d(X, D). \tag{22}$$

El punto medio entre el foco y la directriz es el *vértice de la parábola* y la recta que pasa por el foco y el vértice es el *eje de la parábola*.



Un punto $X \equiv (x_1, x_2)$ pertenece a la parábola de vértice (h_1, h_2) y directriz paralela al eje X_2, $x_1 = h_1 - p$ con $p > 0$ (abierta hacia la derecha), si cumple:

$$\sqrt{(x_1 - (h_1 + p))^2 + (x_2 - h_2)^2} = x_1 - (h_1 - p), \tag{23}$$

de donde se obtiene

$$\boxed{(x_2 - h_2)^2 = 4p(x_1 - h_1).} \tag{24}$$

Si el vértice de la parábola coincide con el origen de coordenadas, la ecuación anterior queda,

$$\boxed{x_2^2 = 4px_1.} \tag{25}$$

Si $p < 0$ la parábola es abierta hacia la izquierda.

1. Si se toma como directriz una recta paralela al eje X_1, $x_2 = h_2 - p$, la ecuación de la parábola queda:

$$\boxed{(x_1 - h_1)^2 = 4p(x_2 - h_2).} \tag{26}$$

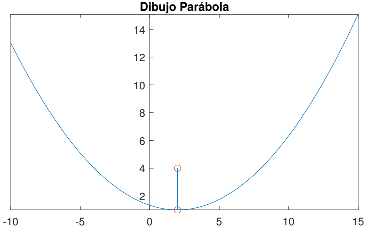
2. Sea la directriz dada por la recta $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$ y el foco F de coordenadas (h_1, h_2), dado un punto $X \equiv (x_1, x_2)$, se cumple que la distancia del punto X al foco coincide con su distancia a la directriz, lo cual se puede expresar

$$\boxed{\sqrt{(x_1 - h_1)^2 + (x_2 - h_2)^2} = \frac{Ax_1 + Bx_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.} \tag{27}$$

En la siguiente figura se muestra la parábola

$$(x-2)^2 = 12(y-1)$$

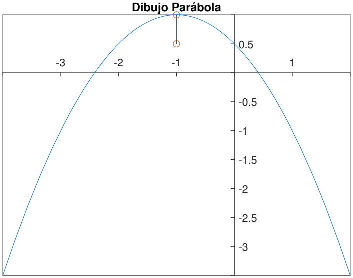
con vértice $V = (2,1)$, foco $F = (2,4)$ y $p = 3$.



En la siguiente figura se muestra la parábola

$$(x+1)^2 = -2(y-1)$$

con vértice $V = (-1, 1)$, foco $F = (-1, 1/2)$ y $p = -1/2$.

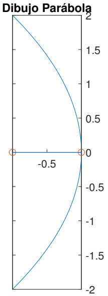


Ejemplo

En la siguiente figura se muestra la parábola

$$y^2 = -4x$$

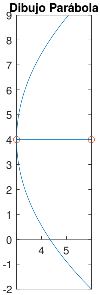
con vértice $V = (0, 0)$, foco $F = (-1, 0)$ y $p = -1$.



En la siguiente figura se muestra la parábola

$$(y-4)^2 = 12(x-3)$$

con vértice $V=(3,4)$, foco $F=(6,4)$ y $p=3$.



Para hallar los puntos de intersección de una parábola y una recta, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de ambas, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_2 - h_2)^2 = 4\,p\,(x_1 - h_1) \\ x_2 = m\,x_1 + b, \end{array} \right. \tag{28}$$

al eliminar una incógnita se obtiene una ecuación de segundo grado. Analizando el discriminante Δ de esta ecuación resulta

- Si $\Delta > 0$, la recta es secante, hay dos soluciones distintas.
- Si $\Delta = 0$, la recta es tangente, hay una solución doble.
- Si $\Delta < 0$, no hay soluciones reales.

Sea la parábola de ecuación

$$f(x_1, x_2) \equiv x_2^2 - 4\,p\,x_1 = 0. \tag{29}$$

La tangente a la misma en un punto P de coordenadas (p_1, p_2), es una recta que pasa por dicho punto con pendiente igual a la derivada de la función en P:

$$\boxed{x_2 - p_2 = \left(-\frac{f'_{x_1}}{f'_{x_2}}\right)_P (x_1 - p_1),} \tag{30}$$

donde

$$\left(-\frac{f'_{x_1}}{f'_{x_2}}\right)_P = \left(\frac{2p}{x_2}\right)_P = \frac{2p}{p_2}, \tag{31}$$

y por tanto la ecuación de la normal es:

$$\boxed{x_2 - p_2 = \left(\frac{f'_{x_2}}{f'_{x_1}}\right)_P (x_1 - p_1),} \tag{32}$$

donde

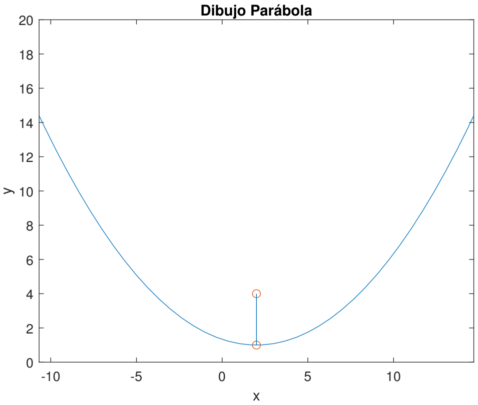
$$\left(\frac{f'_{x_2}}{f'_{x_1}}\right)_P = \left(-\frac{x_2}{2p}\right)_P = -\frac{p_2}{2p}. \tag{33}$$

1. Determinar la ecuación canónica de la parábola de vértice $(2, 1)$ y foco $(2, 4)$.
   Sol: $y = (1/12)(x^2 - 4x + 16)$.
2. Hallar el foco de la parábola $x_2 = 1/2(1 - 2x_1 - x_1^2)$.
3. Se pide:
   1. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x_2^2 = 4x_1$ en el punto $P \equiv (1, 2)$. **Sol:** $-x + y - 1 = 0$.
   2. Hallar la ecuación del eje de la parábola $y = x^2 - 6x + 5$.
4. Hallar la ecuación de la parábola que tiene por vértice el punto $(3, 4)$ y por directriz la recta $x = 0$. **Sol:** $(y - 4)^2 = 12(x - 3)$.
5. Una parábola tiene el eje paralelo al eje x_2 y pasa por los puntos $A \equiv (2, 0)$, $B \equiv (6, 0)$ y $C \equiv (0, 6)$.
   Se pide:
   1. Ecuación de dicha parábola.
   2. Vértice, foco y directriz de la misma.
6. Hallar la ecuación de la parábola de foco $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y directriz $x = -y$.
   Sol:$x^2 + y^2 - 2xy - 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 8 = 0$.
7. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x, y) que son equidistantes del origen y de la recta de ecuación $x + y - 1 = 0$.

La ecuación de la parábola de vértice $(2,1)$ y foco $(2,4)$ es
$y = (1/12)(x^2 - 4x + 16)$. Si queremos dibujar la parábola y todos sus elementos:

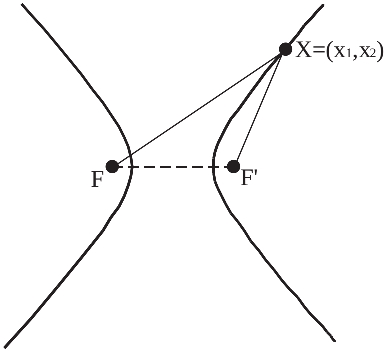
```
parabola(3,[2 1],'v',[-10,10])
```

El comando parábola(p,vertice,orientacion,rango) se encuentra definido en el fichero parabola.m. Para utilizarlo tenemos que pasar como argumentos: p (lo introducimos positivo o negativo), vertice (vértice de la parábola), orientacion ('h' si el eje de simetría es horizonal y 'v' si es vertical), dominio (rango de dibujo en la forma [tmin,tmax]).

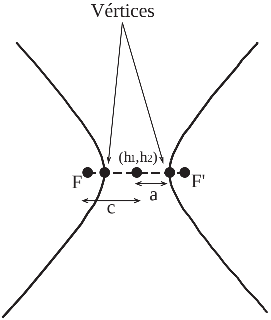


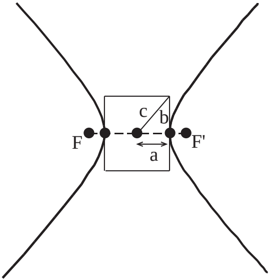
Definición (3.10 La Hipérbola)

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.



Las gráficas de las hipérbolas se caracterizan por la existencia de dos ramas distintas. La recta que une los focos corta a la hipérbola en dos puntos que se denominan *vértices*. El segmento que une los vértices recibe el nombre de *eje transversal o real* y su punto medio se denomina *centro* de la hipérbola.


Vértices
(h1,h2)
F
F'
a
c


c
b
F
F'
a

Para obtener la forma canónica de la ecuación de la hipérbola, supóngase que el centro, vértices y focos de la misma tienen como coordenadas: (h_1, h_2), $(h_1 \pm a, h_2)$,y $(h_1 \pm c, h_2)$ respectivamente.
Las dos ramas de la hipérbola determinan un rectángulo comprendido entre ellas y con centro en el centro de la hipérbola.
La longitud de los lados de dicho rectángulo es $2a$ y $2b$, cumpliéndose que $b^2 = c^2 - a^2$. El segmento que une los puntos $(h_1, h_2 \pm b)$, se denomina *eje imaginario* de la hipérbola.
Por definición de hipérbola, la diferencia de distancias de un punto cualquiera de la misma a los dos focos es constante.
Para un vértice dicha suma es:

$$(a + c) - (c - a) = 2a. \tag{34}$$

Sea $X = (x_1, x_2)$ un punto cualquiera de la hipérbola, la diferencia de sus distancias a los focos será $2a$:

$$\sqrt{(x_1 - (h_1 - c))^2 + (x_2 - h_2)^2} - \sqrt{(x_1 - (h_1 + c))^2 + (x_2 - h_2)^2} = 2a, \tag{35}$$

que se reduce a

$$\boxed{\frac{(x_1 - h_1)^2}{a^2} - \frac{(x_2 - h_2)^2}{b^2} = 1,} \tag{36}$$

donde $b^2 = c^2 - a^2$.
Si el centro de la hipérbola coincide con el origen de coordenadas, la ecuación (36) queda

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1.} \tag{37}$$

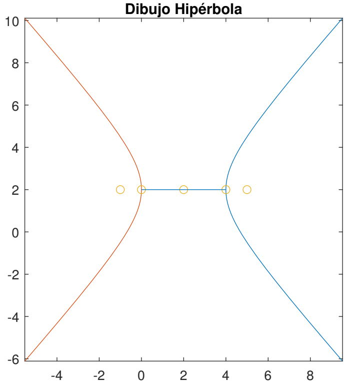
Si $a = b$ se dice que la hipérbola es equilátera. En este caso, la ecuación (36) quedaría

$$\boxed{(x_1 - h_1)^2 - (x_2 - h_2)^2 = a^2.} \tag{38}$$

En la siguiente figura se muestra la hipérbola

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

con centro $(2, 2)$, $c = 3$, focos $(-1, 2)$, $(5, 2)$ y vértices $(0, 2)$, $(4, 2)$.

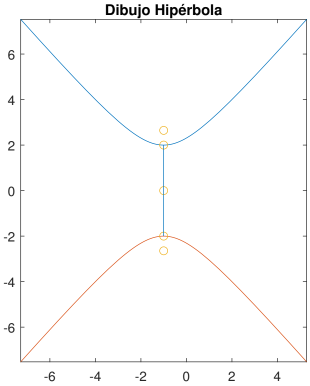


Ejemplo

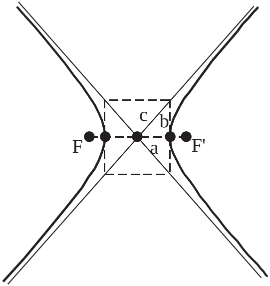
En la siguiente figura se muestra la hipérbola

$$\frac{y^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{3} = 1$$

con centro $(-1, 0)$, $c = \sqrt{7}$, focos $(-1, \sqrt{7})$, $(-1, -\sqrt{7})$ y vértices $(-1, 2)$, $(-1, -2)$.



Cada hipérbola posee dos asíntotas que son dos rectas que se cruzan en el centro de la hipérbola. Además las asíntotas pasan por los vértices del rectángulo de lados con longitudes $2a$ y $2b$ y centro en (h_1, h_2) que está comprendido entre las dos ramas de la hipérbola.



La ecuación de las asíntotas a una hipérbola de eje transversal horizontal es

$$x_2 = h_2 \pm \frac{b}{a}(x_1 - h_1). \tag{39}$$

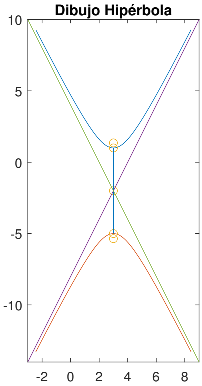
Si el eje transversal es vertical, sus asíntotas son las rectas

$$x_2 = h_2 \pm \frac{a}{b}(x_1 - h_1). \tag{40}$$

En la siguiente figura se muestra la hipérbola

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{9/4} = 1$$

con centro $(3, -2)$, $a = 3$, vértices $(3, -5)$, $(3, 1)$ y asíntotas $y = 2x - 8$ e $y = -2x + 4$.



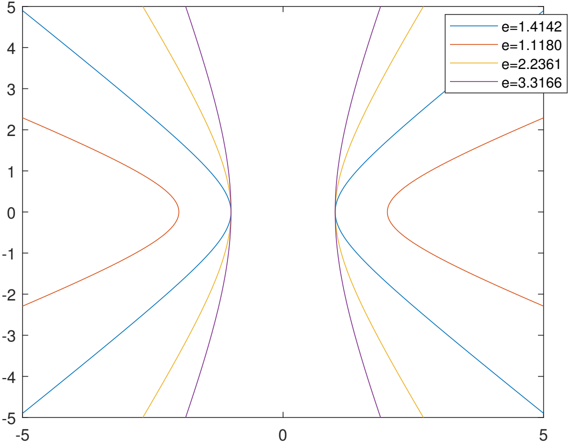
Definición (3.12 Excentricidad de una hipérbola)

La excentricidad de una hipérbola se define como el cociente

$$e = \frac{c}{a}. \tag{41}$$

Se cumple que $1 < e < \infty$, *y a mayor valor de* e *la hipérbola se acerca más al eje imaginario.*

Si $a = 0$, los vértices coinciden con el centro, $e = \infty$, y la hipérbola degenera en una recta coincidente con el eje imaginario. Si $c = a$, los focos coinciden con los vértices y la elipse degenera en dos semirectas situadas sobre el eje real.


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5
0
5
e=1.4142
e=1.1180
e=2.2361
e=3.3166

Los puntos de intersección de la hipérbola de ecuación (36) y la recta $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$ se obtienen resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones. Al eliminar una de las incógnitas, se obtiene una ecuación de segundo grado. Según que el discriminante Δ de esta ecuación sea mayor, igual o menor que cero se tiene

- Si $\Delta > 0$, la recta es secante, hay dos soluciones distintas.
- Si $\Delta = 0$, la recta es tangente, hay una solución doble.
- Si $\Delta < 0$, no hay soluciones reales.

3.5.6 Tangente y Normal a una Hipérbola

Sea la hipérbola de ecuación

$$f(x_1, x_2) \equiv \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{42}$$

La tangente a la misma en un punto P de coordenadas (p_1, p_2) es una recta que pasa por dicho punto con pendiente igual a la derivada de la función en X:

$$\boxed{x_2 - p_2 = \left(-\frac{f'_{x_1}}{f'_{x_2}}\right)_P (x_1 - p_1),} \tag{43}$$

donde

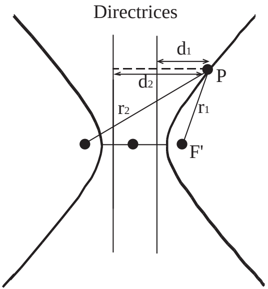
$$\left(-\frac{f'_{x_1}}{f'_{x_2}}\right)_P = \left(\frac{b^2 x_1}{a^2 x_2}\right)_P = \frac{b^2 p_1}{a^2 p_2}, \tag{44}$$

y por tanto la ecuación de la normal es:

$$\boxed{x_2 - p_2 = \left(\frac{f'_{x_2}}{f'_{x_1}}\right)_P (x_1 - p_1),} \tag{45}$$

donde

$$\left(\frac{f'_{x_2}}{f'_{x_1}}\right)_P = \left(-\frac{a^2 x_2}{b^2 x_1}\right)_P = -\frac{a^2 p_2}{b^2 p_1}. \tag{46}$$



Las directrices de una hipérbola son rectas paralelas al eje imaginario a una distancia $d = \frac{a}{e}$ del centro. Dado un punto arbitrario de la hipérbola $P \equiv (x_1, x_2)$, se cumple que la distancia de P al foco dividida por la distancia de P a la directriz, es igual a la excentricidad, es decir

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e. \tag{47}$$

Dado un foco $F' = (h_1 + c, h_2)$, la excentricidad $e = \frac{c}{a}$ y una directriz $x_1 = h_1 + \frac{a}{e}$, se puede construir la ecuación de la hipérbola, dado un punto $P \equiv (x_1, x_2)$ cumple

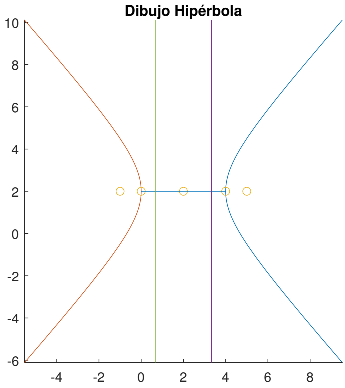
$$\frac{\sqrt{(x_1 - h_1 - c)^2 + (x_2 - h_2)^2}}{|h_1 + \frac{a^2}{c} - x_1|} = \frac{c}{a}. \tag{48}$$

Ejemplo

En la siguiente figura se muestra la hipérbola

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

con centro $(2,2)$, $a = 2$, $c = 3$, $e = c/a = 3/2$, focos $(-1,2)$, $(5,2)$, vértices $(0,2)$, $(4,2)$ y directrices $x = 2/3$, $x = 10/3$.



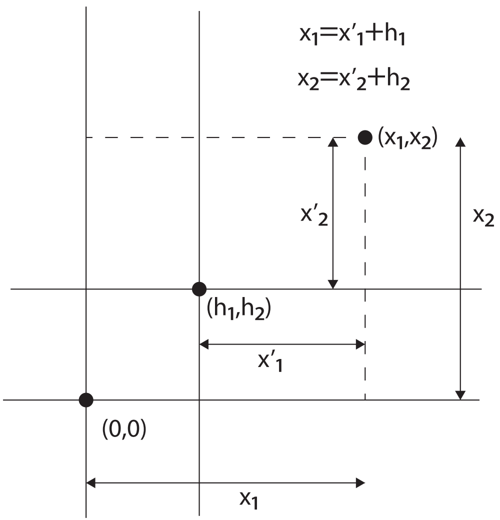
1. Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con focos $(-1,2)$ y $(5,2)$ y con vértices $(0,2)$ y $(4,2)$. **Sol:** $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$.
2. Hallar el centro, vértices y asíntotas de la hipérbola de ecuación
$$4x_1^2 + 8x_1 - 3x_2^2 + 16 = 0 \tag{49}$$
3. Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con vértices $(3,-5)$ y $(3,1)$, cuyas asíntotas son $x_2 = 2x_1 - 8$ y $x_2 = -2x_1 + 4$
4. Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen de coordenadas, sabiendo que
   - Su excentricidad es $5/4$ y la distancia del centro a un foco es 5.
   - Su excentricidad es $\sqrt{13}/3$ y el punto $P \equiv (5, 8/3$ pertenece a la hipérbola.
   - Los puntos $P \equiv (25/4, 3)$ y $Q \equiv (5,0)$ pertenecen a la hipérbola.
5. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que su distancia al punto $(0,6)$ es $3/2$ de su distancia a la recta de ecuación $3y = 8$.
   Sol: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$.
6. Hallar la ecuación de la hipérbola de directriz $2x - y + 3 = 0$, foco en $(3,-1)$ y excentricidad $e = 3$.
7. Hallar el lugar geométrico de los puntos (x,y) cuya distancia al punto fijo $(0,4)$ sea igual a $4/3$ de la correspondiente a la recta $4y - 9 = 0$.

Si queremos dibujar la hipérbola $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$. y todos sus elementos (incluyendo directrices o as´íntotas):

```
figure(1)
hiperbola(2,sqrt(5),[2,2],'v',[-2,2])
hold on
syms t
fplot(2/3+0*t,t,[-6,10])
fplot(10/3+0*t,t,[-6,10])
box off
axis equal
```

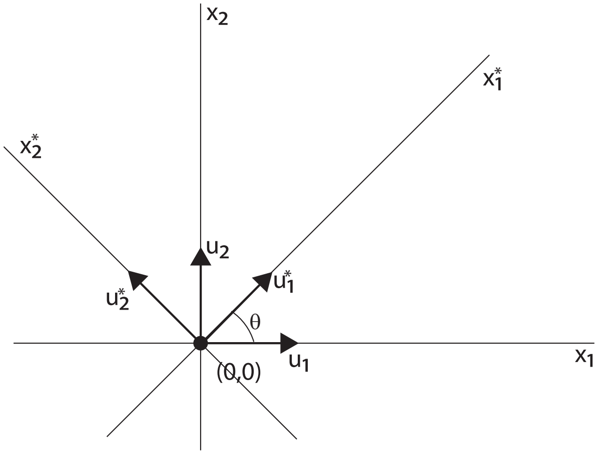
```
figure(2)
hiperbola(2,sqrt(5),[2,2],'v',[-2,2])
hold on
syms t
fplot(t,2+(sqrt(5)/2)*(t-2),[-5,9])
fplot(t,2-(sqrt(5)/2)*(t-2),[-5,9])
box off
axis equal
```

El comando hiperbola(a,b,centro,orientacion,rango) se encuentra definido en el fichero hiperbola.m. Para utilizarlo tenemos que pasar como argumentos: a, b, centro (centro de la hiperbola), orientacion ('h' si el eje transversal es vertical y 'v' si es horizontal dicho eje), rango (rango de dibujo en la forma [tmin,tmax]).


$x_1 = x'_1 + h_1$
$x_2 = x'_2 + h_2$
(x_1, x_2)
x'_2
x_2
(h_1, h_2)
x'_1
$(0,0)$
x_1

Ejercicios

1. Dada la cónica $9y^2 + 36x - 6y - 23 = 0$. Trasladar el origen del sistema de referencia al punto $(2/3, 1/3)$ y escribir la nueva ecuación.
2. Dada la cónica $9x^2 - 4y^2 - 18x - 24y - 63 = 0$. Trasladar el origen del sistema de referencia al punto $(1, -3)$ y escribir la nueva ecuación.
3. Dada la cónica $25x^2 + 4y^2 - 150x + 125 = 0$. Trasladar el origen del sistema de referencia al punto $(3, 0)$ y escribir la nueva ecuación.

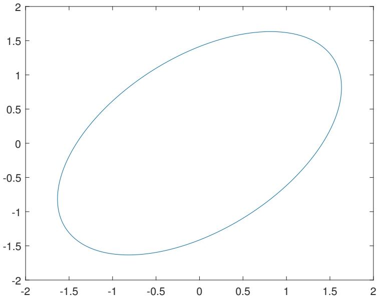


Considérense los dos sistemas de referencia $\{O = (0,0); \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (0,1)\}\}$ y $\{O = (0,0); \{\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*\}\}$, donde (α_1, α_2) y (β_1, β_2) son las componentes de los vectores $\vec{u}_1^*$ y $\vec{u}_2^*$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, respectivamente. Suponemos que las dos bases son métricas. El sistema de referencia $\{O = (0,0); \{\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*\}\}$ se obtiene rotando el sistema $\{O; \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}\}$ un ángulo θ.

Entonces se tiene $\alpha_1 = \cos\theta, \alpha_2 = \sin\theta$ y $\beta_1 = -\sin\theta, \beta_2 = \cos\theta$:

$$\boxed{\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1^* \\ x_2^* \\ 1 \end{array}\right)} \tag{50}$$

Ejercicio: Hallar una nueva representación de la elipse $x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 2 = 0$ después de rotar los ejes un ángulo $\pi/4$.
Solución: $(x_1^*)^2 + 3(x_2^*)^2 = 4$.



Si se trabaja con un sistema de referencia métrico, tomando como origen el $O \equiv (0,0)$ para simplificar los cálculos, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema

La ecuación

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0, \tag{51}$$

se reduce a la forma

$$A'(x_1')^2 + C'(x_2')^2 + D'x_1' + E'x_2' + F' = 0, \tag{52}$$

mediante una rotación de ángulo λ de los ejes, siendo

$$\frac{\cos 2\lambda}{\sin 2\lambda} = \frac{A - C}{B}. \tag{53}$$

Los coeficientes de la nueva ecuación vienen determinados por:

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\lambda + B\ \cos\lambda\ \sin\lambda + C\ \sin^2\lambda \\
C' &= A\sin^2\lambda - B\ \cos\lambda\ \sin\lambda + C\ \cos^2\lambda \\
D' &= D\ \cos\lambda + E\ \sin\lambda \\
E' &= -D\ \sin\lambda + E\ \cos\lambda \\
F' &= F.
\end{aligned} \tag{54}$$

1. Dada la cónica de ecuación

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 4 = 0$$

   1. Identificar el tipo de cónica.
   2. Girar los ejes coordenados de forma que éstos sean paralelos a los ejes de la cónica. Obtener la ecuación canónica de la cónica en este nuevo sistema de referencia.

2. Dada la cónica de ecuación

$$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 12 = 0$$

   1. Identificar el tipo de cónica.
   2. Girar los ejes coordenados de forma que éstos sean paralelos a los ejes de la cónica. Obtener la ecuación canónica de la cónica en este nuevo sistema de referencia.

3. Sea la cónica de ecuación

$$x_1^2 - 10x_1x_2 + x_2^2 + 1 = 0.$$

   1. Identificar el tipo de cónica.
   2. Girar los ejes coordenados de forma que éstos sean paralelos a los ejes de la cónica. Obtener la ecuación canónica de la cónica en este nuevo sistema de referencia.