Instrumentos Matemáticos para la Ingeniería II

Tema 2: Funciones Reales de Varias Variables

Cristina Solares

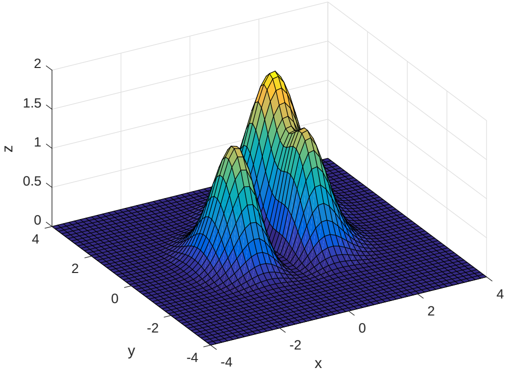
Universidad de Castilla-La Mancha

1 de febrero de 2023

Consideremos la función (gráfica de una montaña)

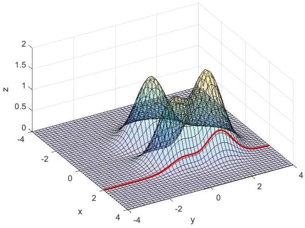
$$z = f(x, y) = 4x^2 e^{-x^2-y^2} + y^2 e^{-(x-1)^2-(y-1)^2};$$

para $x, y \in [-4, 4]$.

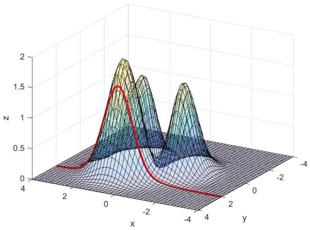


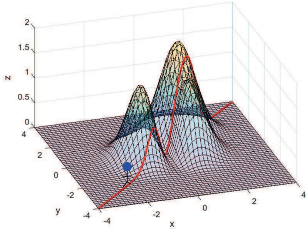
¿Qué significa $f(2, 2) = 0{,}5467$? ¿Qué significa $g = f(2, t)$? ¿Qué significa $h = f(t, 2)$? ¿Qué significa $f(t, t)$?

Curva $\{x = 2, y = t, z = 16e^{-4-t^2} + t^2 e^{-1-(t-1)^2}\}$, para $t \in [-4, 4]$:

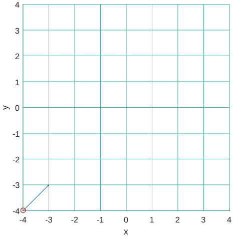


Curva $\{x = t, y = 2, z = 4t^2 e^{-t^2-4} + 4e^{-(t-1)^2-1};\}$, para $t \in [-4, 4]$:

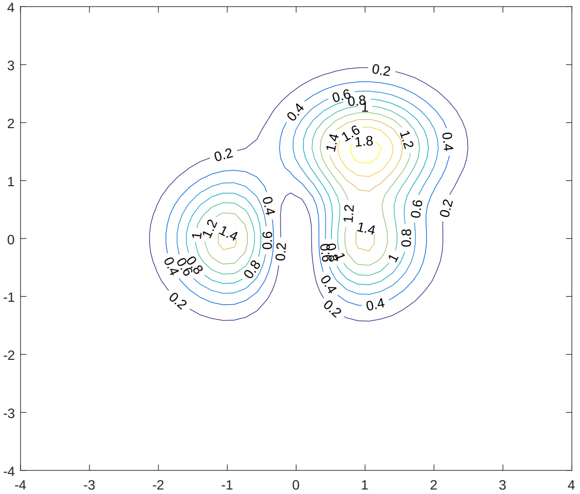




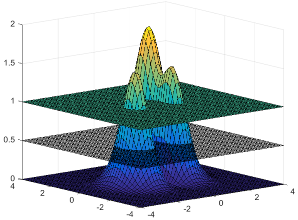
Suponiendo que el montañero se mueve por la curva $\{x = t, y = t, z = f(t, t)\}$ para $t \in [-4, 4]$. La posición inicial del montañero es $(x_0, y_0) = (-4, -4)$ y la dirección en la que se mueve es $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Dibujad otras posiciones iniciales y otras direcciones de recorrido.

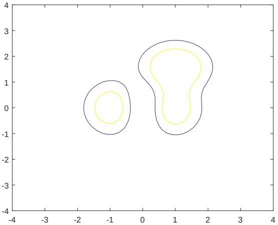


A continuación se muestran las curvas de nivel de z (analizar las curvas en las zonas de mayor altura):

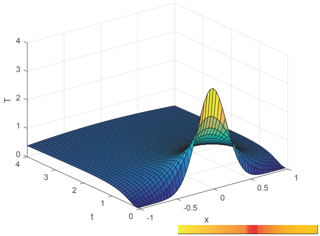


A continuación intersecamos la superficie con los planos horizontales para $z = 0{,}5$ y $z = 1$, para obtener dos curvas de nivel:



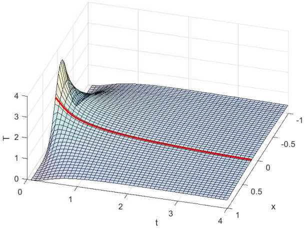


La función $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/t}$ modela la temperatura de una barra de metal (aislada) después de que se ha aplicado un intenso foco de calor en su punto central.

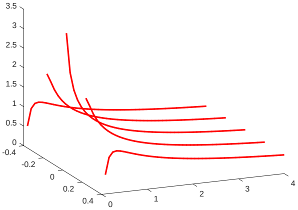


¿Qué significa $f(0'2,1)$? ¿Qué significa $f(0'2,t)$? ¿Qué significa $f(x,1)$?

Dibujamos la curva $\{x = 0'2, y = t, z = f(0'2, t)\}$:



Dibujamos varias curvas considerando el corte de la superficie por planos $x = -0'4, -0'2, 0, 0'2, 0'4$:



Dibujamos la superficie:

```
x=linspace(-1,1,50);
t=linspace(0,4,50);
[X,T]=meshgrid(x,t);
```
Z=(T.$^{-1/2}$). $* \, exp(-(X.^2)./T)$;
```
barratemp=surf(X,T,Z)
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('T');
hold on
```

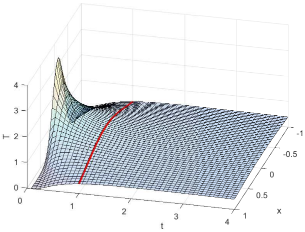
Dibujamos una curva sobre la superficie:

```
x=0.2+0.*t;
```
z=(t.$^{-1/2}$). $* \, exp(-(x.^2)./t)$;
```
p=plot3(x,t,z,'Color','r');
p.LineWidth=2;
```

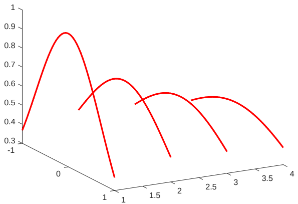
Dibujamos las curvas de nivel:

```
contour(X,T,Z,'ShowText','on')
```

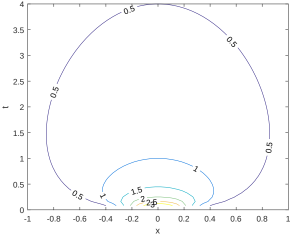
Dibujamos la curva $\{x = t, y = 1, z = f(t, 1)\}$:



Dibujamos varias curvas considerando el corte de la superficie por planos $t = 1, 2, 3, 4$:



Dibujamos las curvas de nivel $f(x, y) = C$ (curva plana expresada en forma implícita) de la función temperatura $z = f(x, y)$:

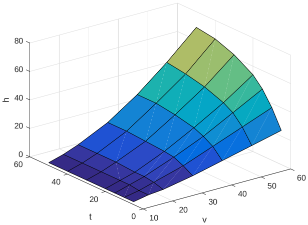


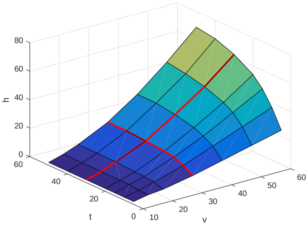
La altura h de las olas en mar abierto depende de la velocidad v del viento (en nudos) y de la duración del tiempo t (en horas) que el viento haya estado soplando a esa velocidad. En la siguiente tabla aparecen valores de la función $h = f(v, t)$ en pies (ft):

Duración

Velocidad: v \ t	**5**	**10**	**15**	**20**	**30**	**40**	**50**
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

¿Qué significa $f(40, 15)$?. ¿Qué significa $h = f(30, t)$?. ¿Qué significa $h = f(v, 30)$?. Hallar el valor de t tal que $f(30, t) = 16$, ¿qué significa?.


h
80
60
40
20
0
60
40
20
0
t
10
20
30
40
50
60
v


h
80
60
40
20
0
60
40
20
0
t
10
20
30
40
50
60
v

Definición (1.1Función real de dos variables)

Una `función de dos variables` *es una regla que asigna a cada par ordenado $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ un único número real $f(x, y)$,*

$$\begin{aligned} f: \quad & D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \longrightarrow f(x, y). \end{aligned} \tag{1}$$

D se denomina dominio de f, y el conjunto de valores posibles $f(x, y)$ es el rango de f.

Dada una función de dos variables f, se escribirá $z = f(x, y)$, y se llamará x e y variables independientes y z variable dependiente.

Teorema (1.1 Operaciones con funciones de dos variables)

Dadas $f(x, y)$ y $g(x, y)$ funciones reales de dos variables, se cumple

1. $$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y). \tag{2}$$
2. $$(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y). \tag{3}$$
3. $$\left(\frac{f}{g}\right)(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad g(x, y) \neq 0. \tag{4}$$

Ejemplo (1.1 Operaciones con funciones de dos variables)

Considérese un triángulo de altura h y base b, el área de dicho triángulo es una función de dos variables que depende de su altura y de su base

$$A(h, b) = \frac{1}{2} bh. \tag{5}$$

Definición (1.2 Función real de n-variables)

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Una `función de n-variables`*, es una regla que asigna a cada vector $(x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ un único número real $f(x_1, \ldots, x_n)$,*

$$\begin{aligned} f : \quad & D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow f(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{6}$$

D se denomina `dominio` *de f, y el conjunto de valores posibles $f(x_1, \ldots, x_n)$ es el* `rango` *de f. Normalmente se escribe $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$, las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llaman* `variables independientes` *y la variable x_{n+1} se llama* `variable dependiente`*.*

Nota

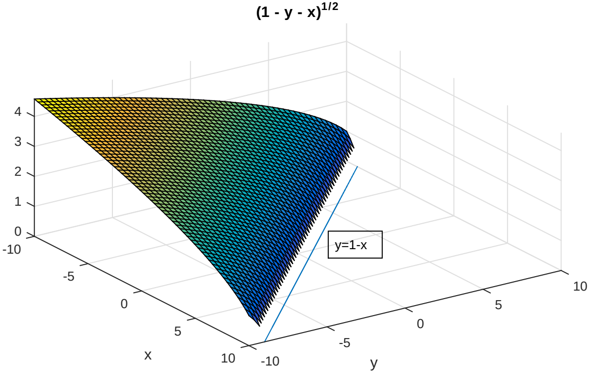
Las operaciones con funciones de dos variables que se muestran en el Teorema 1.1 se pueden extender a funciones de varias variables.

Ejemplo (1.3 Dominio de una función)

Dada la función de dos variables

$$f(x,y) = \sqrt{1-x-y}. \tag{7}$$

El dominio de f son los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en los cuales está definida la expresión $\sqrt{1-x-y}$ como un número real, es decir,el dominio es
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1-x-y \geq 0\}$.



Definición (1.3 Gráfica de una función de dos variables)

La `gráfica` *de una función $z = f(x, y)$ es la superficie formada por el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que (x, y) pertenece al dominio de f y $z = f(x, y)$.*

Ejemplo (Gráfica de una función)

Dada la función de dos variables

$$f(x, y) = 12 - 3x - 4y. \tag{8}$$

La gráfica de f es la superficie $z = 12 - 3x - 4y$ que es un plano

Ejemplo (Gráfica de una función)

Dada la función de dos variables

$$f(x, y) = 4x^2 + 9y^2. \tag{9}$$

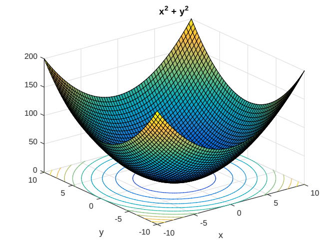
La gráfica de f es la superficie $z = 4x^2 + 9y^2$ que es un paraboloide elíptico.

Definición (1.4 Curva de nivel)

El conjunto de los puntos del plano (x, y) que verifican $f(x, y) = C$, se llama la `curva de nivel` *de f en C.*

Ejemplo (1.4 Curva de nivel)

Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, son circunferencias.




```
syms x y;
f=x^2+y^2;
ezsurfc(f,[-10 10],[-10 10])
```

Definición (1.6 Límite finito de una función en un valor finito)

Sea $z = f(x, y)$ función de dos variables. Se dice que esta función tiende al límite L en el punto (a, b) o que tiene en dicho punto por límite $L \in \mathbb{R}$, cuando

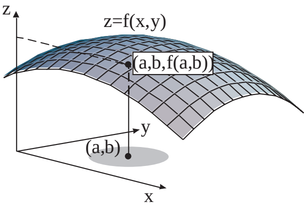
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) \text{ tal que } \forall (x, y) \in E((a, b), \delta),\ |f(x, y) - L| < \epsilon. \tag{10}$$

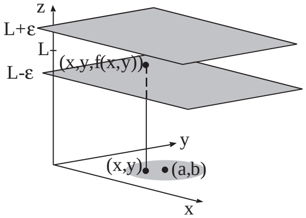
El límite anterior se denota

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L. \tag{11}$$

Nota

La función $z = f(x, y)$ no tiene porque estar definida en el punto (a, b), aunque si que tiene que estar definida en los demás puntos del entorno considerado.





Nota

Escribir $\lim_{(x,y)\to(a,b)}$ *significa que el punto* (x, y) *se puede aproximar a* (a, b) *a lo largo de cualquier camino.*
Para que exista el límite de $z = f(x, y)$ *en el punto* (a, b)*, es preciso que coincidan los límites de* $z = f(x, y)$ *en dicho punto, según todas las direcciones y a lo largo de todas las curvas.*
El cálculo del límite en la dirección $y = \phi(x)$ *se reduce al cálculo del límite de una función de una variable*

$$\lim_{(x,y=\phi(x))\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{x\to a} f(x, \phi(x)). \tag{12}$$

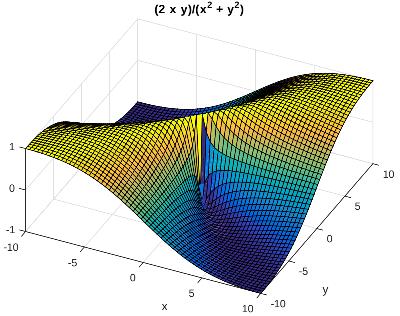
Ejemplo (1.5 Límites en una dirección)

Demostrar que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\,x\,y}{x^2 + y^2} \tag{13}$$

no existe, calculando este límite a lo largo del eje x $(y = 0)$*, del eje* y $(x = 0)$ *y a lo largo de la recta* $y = x$.

```
syms x y;
f=2*x*y/(x^2+y^2);
fsurf(f,[-10 10])
```




```
%Eje y
newf=subs(f,x,0);
limit(newf,y,0)
%Recta y=x
syms t
newf=subs(f,{x,y},{t,t});
limit(newf,t,0)
```

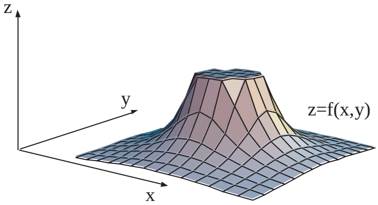
Completad la siguiente tabla con valores de la función $f = 2xy/(x^2 + y^2)$.

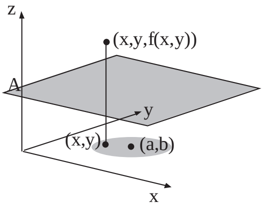
x \ y	-1'0	-0'5	-0'2	0	0'2	0'5	1'0
-1'0	1	0.8	0.3846	0	-0.3846	-0.8	-1
-0'5	0.8	1	0.6897	0	-0.6897	-1	-0.8
-0'2	0.3847	0.6897	1	0	-1	-0.6897	-0.3846
0	0	0	0		0	0	0
0'2	-0.3846	-0.6897	-1	0	1	0.6897	0.3846
0'5	-0.8	-1	-0.6897	0	0.6897	1	0.8
1'0	-1	-0.8	-0.3846	0	0.3846	0.8	1

Definición (1.7 Límite infinito en un valor finito)

Sea $z = f(x, y)$ función de dos variables. Se dice que esta función tiende al límite ∞ en el punto (a, b) cuando

$$\forall A > 0,\ \exists \delta = \delta(A) \text{ tal que } \forall (x, y) \in E((a, b), \delta),\ |f(x, y)| > A. \qquad (14)$$





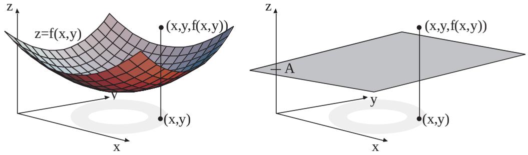
Ejemplo (1.6 Límite infinito de una función en un valor finito)

El límite de la función $z = \frac{1}{x^2+y^2}$ en el punto $(0, 0)$ es $L = +\infty$.

Definición (1.8 Límite infinito de una función en el infinito)

Sea $z = f(x,y)$ función de dos variables. Se dice que esta función tiende al límite ∞ en el punto del infinito P_∞ cuando

$$\forall A > 0,\ \exists H = H(A) \text{ tal que } \forall P, d(P,O) > H\ |f(x,y)| > A. \tag{15}$$



Ejemplo (1.6 Límite infinito de una función en el infinito)

El límite $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} (x^2 + y^2) = +\infty.$

Definición (1.9 Límite finito de una función en el infinito)

Sea $z = f(x,y)$ función de dos variables. Se dice que esta función tiende al límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto del infinito P_∞ cuando

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists H = H(\epsilon) \text{ tal que } \forall P, d(P,O) > H\ |f(x,y) - L| < \epsilon. \tag{16}$$

Ejemplo (1.7 Límite finito de una función en el infinito)

El límite de la función $z = \dfrac{1}{x\,y}$ *en el punto del infinito* P_∞ *es* 0*. Se puede utilizar la notación* $(x, y) \to P_\infty$ *o* $(x, y) \to \infty$*.*

Nota

Como caso particular se tienen los límites sucesivos o reiterados. En los límites sucesivos, como su nombre indica, se toma primeramente el límite con respecto a una de las variables, mientras la otra permanece con un valor cualquiera pero fijo. Una vez calculado, se determina el límite de este límite con respecto a la segunda variable

$$\lim_{y \to b} \left[\lim_{x \to a} f(x, y) \right]. \tag{17}$$

$$\lim_{x \to a} \left[\lim_{y \to b} f(x, y) \right]. \tag{18}$$

Nota

Si existen el límite doble y los reiterados, todos ellos son iguales. La igualdad de los límites reiterados no garantiza la existencia del límite.

Ejemplo (1.8 Límites sucesivos o reiterados)

No existe el límite de la función $z(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ *en el punto* $(0,0)$.

```
syms x y;
f=(x-y)/(x+y);
limit(limit(f,x,0),y,0)
limit(limit(f,y,0),x,0)
```

Ejemplo (Límites sucesivos o reiterados)

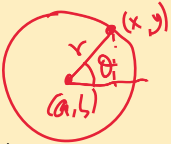
Los límites reiterados de la función $z(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$ *en el punto* $(0,0)$ *existen y son distintos. En consecuencia, no existe el límite de la función* $z(x,y)$ *en el punto* $(0,0)$.

```
syms x y;
f=(x^2+y^3)/(x^2+y^2);
fsurf(f,[-1 1])
```

2.5 Límites de funciones de varias variables

Nota

Si pasamos a coordenadas polares con origen en (a,b)*, es decir,* $x = a + r\cos\theta, y = b + r\sin\theta$*, y calculamos el límite*



$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} F(r,\theta).$$

Si la función $F(r,\theta)$ *verifica que* $F(r,\theta) = g(r)h(\theta)$ *con* $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$ *y la función* $h(\theta)$ *está acotada para* $\theta \in [0, 2\pi]$ *entonces podemos asegurar que*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0.$$

Ejemplo

Calculamos el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{r\to 0} r \ \sin^2\theta \ \cos^2\theta = 0.$$

Teorema (1.2 Propiedades de los límites)

Sean f y g funciones reales de dos variables, supóngase que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L, \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M, \tag{19}$$

entonces se cumple

1. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [af](x,y) = aL, \ \forall a \in \mathbb{R} \ \textit{constante}. \tag{20}$$
2. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f+g](x,y) = L + M. \tag{21}$$
3. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [fg](x,y) = LM. \tag{22}$$
4. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [\frac{f}{g}](x,y) = \frac{L}{M}, \ \textit{si } M \neq 0. \tag{23}$$

Ejemplo (1.9 Propiedades de los límites)

Calcular el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x + x^2\, y + y) = 5. \tag{24}$$

Ejemplo (1.10 Propiedades de los límites)

Calcular el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x\ +\ y}{x} = 2 \tag{25}$$

Definición (1.10 Función continua)

Sea $z = f(x,y)$ función de dos variables, se dice que f `es continua` *en un punto (a,b) de su dominio si*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b). \tag{26}$$

$\boxed{f(x,y) = \frac{x^2}{y}}$

Nota

La suma, diferencia, producto y cociente de funciones continuas de varias variables es una función continua, en todo punto que no anule el denominador.

Teorema (1.3 Composición de funciones continuas)

Sea $E, F \subseteq R^2$ y $G \subseteq R$. Si las funciones $f : E \to F$ y $g : F \to G$ son continuas en $(a,b)\epsilon E$ y $f(a,b)\epsilon F$, respectivamente, entondes $g \circ f : E \to G$ es continua.

Ej) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

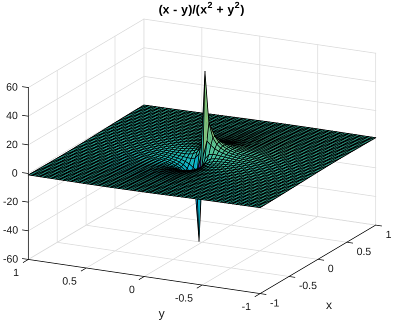
$(x,y) \longmapsto (x^2, y^2)$; $(x,y) \longmapsto x+y$

$\Rightarrow g \circ f(x,y) = g(f(x,y)) = x^2 + y^2$

Ejemplo (1.11 Continuidad de funciones de varias variables)

La función es continua en todo $\mathbb{R}^2$ salvo en el origen

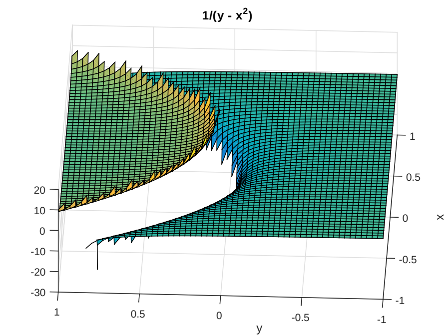
$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}. \tag{27}$$



Ejemplo (1.12 Continuidad de funciones de varias variables)

La siguiente función es continua en todo $\mathbb{R}^2$ *salvo en los puntos de la parábola* $y = x^2$

$$f(x, y) = \frac{1}{y - x^2}. \tag{28}$$



Ejemplo (Continuidad de funciones de varias variables)

La siguiente función

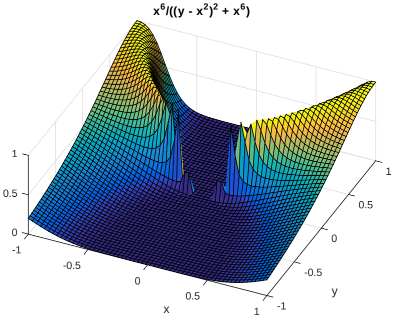
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6} & si (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

está definida en el $(0,0)$, *pero no es continua en dicho punto.*

```
function val=func(x,y)
if (x~=0) || (y~=0)
    val=x^6/((x^2-y)^2+x^6);
else
    val=0;
end
end
syms x y;
fsurf(func(x,y),[-1,1])
```

$¿\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{0}?$

$\nexists \lim$




```
>> limit(subs(func(x,y),{x,y},{t,t}),t,0)

ans =

0
>> limit(subs(func(x,y),{x,y},{t,t^2}),t,0)

ans =

1
```

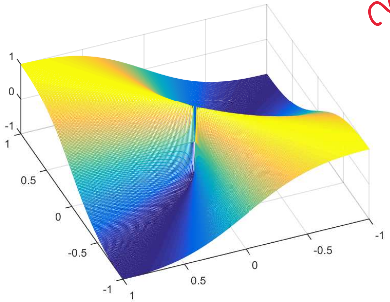
La siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

está definida en el $(0,0)$, pero no es continua en dicho punto.

$$¿\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)?$$

$$\nexists \lim$$



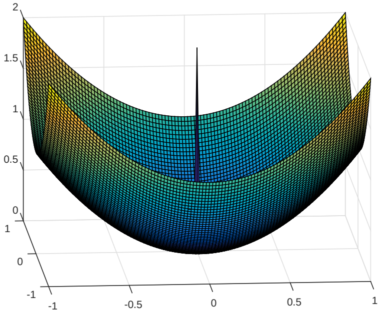
La siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si}(x,y) \neq (0,0), \\ 2 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

está definida en el $(0,0)$, pero no es continua en dicho punto.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

$$f(0,0) = 2$$



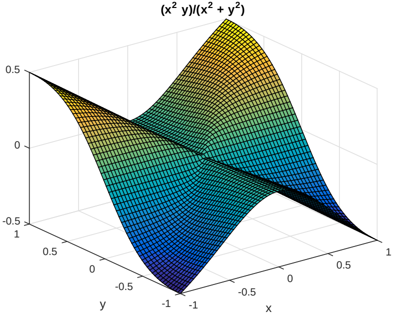
Ejemplo (Continuidad de funciones de varias variables)

La siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 * y}{x^2+y^2} & si(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

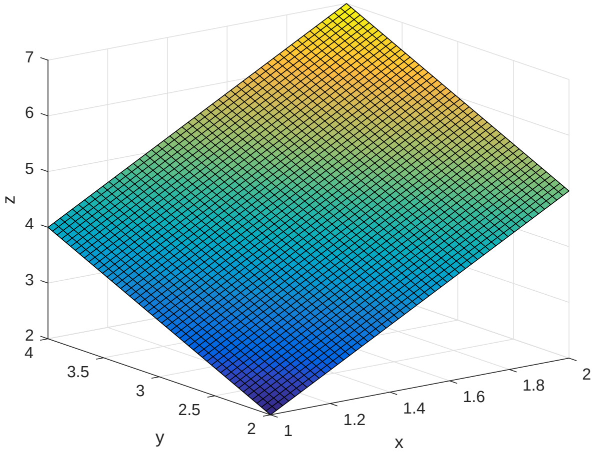
es continua en el $(0,0)$.

```
function val=func(x,y)
if (x~=0) || (y~=0)
    val=(x^2*y)/(x^2+y^2);
else
    val=0;
end
end
syms x y;
fsurf(func(x,y),[-1,1])
```



(x2 y)/(x2 + y2)
0.5
0
-0.5
1
0.5
0
-0.5
-1
y
-1
-0.5
0
0.5
1
x

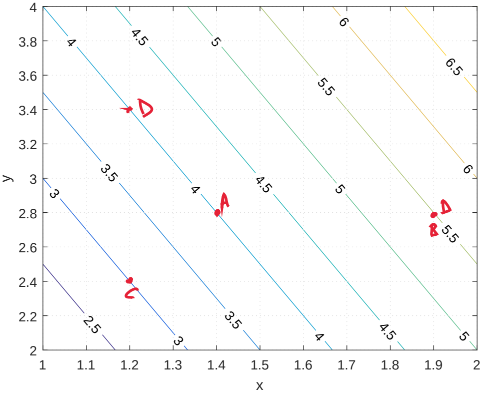
A continuación se muestra la gráfica de una función de dos variables continua (un plano)



¿Cómo son las curvas de nivel de la función $z = f(x, y)$ cuya gráfica es el plano ?

2.7 Ejemplo Introductorio

A continuación se muestra las curvas de nivel del plano (rectas paralelas)

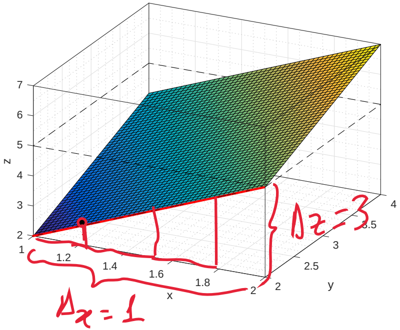


$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{5.5-4}{0.5} = 3$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{4-3}{1} = 1$$

Considerad los puntos $A(1'4, 2'8)$ y $B(1'9, 2'8)$ pertenecientes al dominio del plano, calcular el cociente incremental entre dichos puntos $\Delta z/\Delta x = 3$. Considerad los puntos $C(1'2, 2'4)$ y $D(1'2, 3, 4)$ pertenecientes al dominio del plano, calcular el cociente incremental entre dichos puntos $\Delta z/\Delta y = 1$.

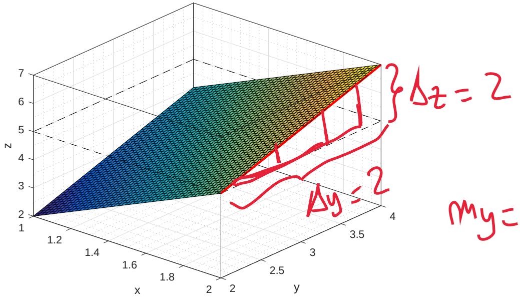
A continuación se muestra la intersección de dicho plano con el plano $y = 2$ (se obtiene una recta)



$m_x = \frac{\Delta z}{\Delta x} = 3$

Considerad los puntos $A(1'2, 2)$ y $B(1'6, 2)$ pertenecientes al dominio del plano, calcular el incremento $\Delta z = f(B) - f(A)$ siendo $z = f(x, y)$ la ecuación del plano. El valor $\Delta z/\Delta x$ coincide con la pendiente de la recta (color rojo), $m_x = 3$.

A continuación se muestra la intersección de dicho plano con el plano $x = 2$ (se obtiene una recta)



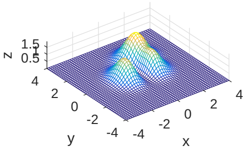
$m_y = \frac{\Delta z}{\Delta y} = 1$

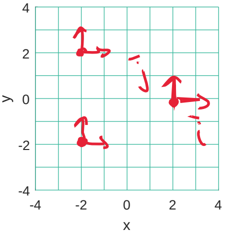
Considerad los puntos $A(2, 2'5)$ y $B(2, 3)$ pertenecientes al dominio del plano, calcular el incremento $\Delta z = f(B) - f(A)$ siendo $z = f(x, y)$ la ecuación del plano. El valor $\Delta z/\Delta x$ coincide con l pendiente de la recta (color azul), $m_y = 1$.

Consideremos la función (gráfica de una montaña)

$$z = f(x, y) = 4x^2 e^{-x^2-y^2} + y^2 e^{-(x-1)^2-(y-1)^2};$$

para $x, y \in [-4, 4]$.



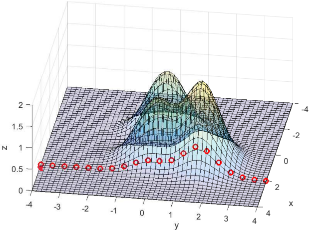


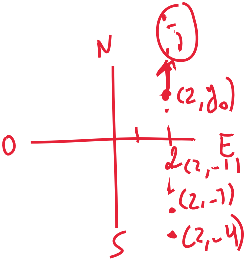
Situaros en el punto $(2, 0)$ del dominio y dibujad el vector $\mathbf{j} = (0, 1)$. Situaros en el punto $(0, 2)$ del dominio y dibujad el vector $\mathbf{i} = (1, 0)$.

Supongamos que un montañero se encuentra en el punto $(x, y) = (2, y_0)$ con $-4 \leq y_0 \leq 4$, y se mueve en la dirección del vector $\mathbf{j} = (0, 1)$ (dirección norte) incrementando la coordenada y_0 en Δy. Rellenad la siguiente tabla con los incrementos de altura $\Delta f = f(2, y_0 + \Delta y) - f(2, y_0)$ del montañero y el cociente incremental $\Delta f / \Delta y$ (razón promedio de cambio en la dirección $\mathbf{j}$).

$(2, y_0)$	Δy	$\Delta f = f(2, y_0 + \Delta y) - f(2, y_0)$	$\Delta f / \Delta y$
$(2, -1)$	$0'5$	0'1234	0'2468
$(2, 0)$	$0'2$	-0'0037	-0'0187
$(2, 1)$	$0'5$	0'1998	0'3997
$(2, 2)$	$0'2$	-0'1225	-0'6127

En la siguiente figura se muestran puntos $(2, h, f(2, h))$ para diferentes valores $-4 \leq h \leq 4$, sobre la superficie.



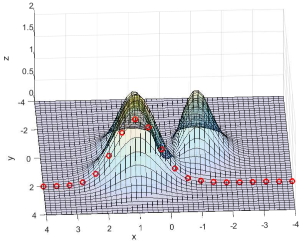


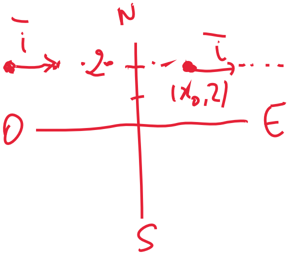
2.9 Derivadas Parciales

Supongamos que un montañero se encuentra en el punto $(x, y) = (x_0, 2)$ para $-4 \leq x_0 \leq 4$, y se mueve en la dirección del vector $\mathbf{i} = (1, 0)$ (dirección este) incrementando la coordenada x_0 en Δx. Rellenad la siguiente tabla con los cambios de altura $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, 2) - f(x_0, 2)$ del montañero y el cociente incremental $\Delta f / \Delta x$ (razón promedio de cambio en la dirección $\mathbf{i}$).

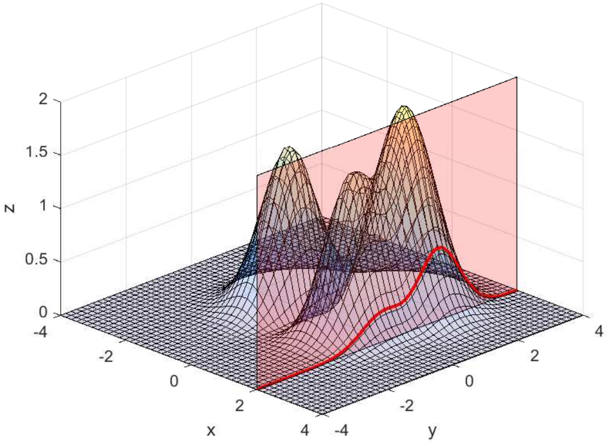
$(x_0, 2)$	Δx	$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, 2) - f(x_0, 2)$	$\Delta f / \Delta x$
$(-1, 2)$	$0'5$	0'1155	0'2309
$(0, 2)$	$0'2$	0'2374	1'1870
$(1, 2)$	$0'5$	-0'3351	-0'6702
$(2, 2)$	$0'2$	-0'1953	-0'9763

En la siguiente figura se muestran puntos $(h, 2, f(h, 2))$ para diferentes valores $-4 \leq h \leq 4$, sobre la superficie.



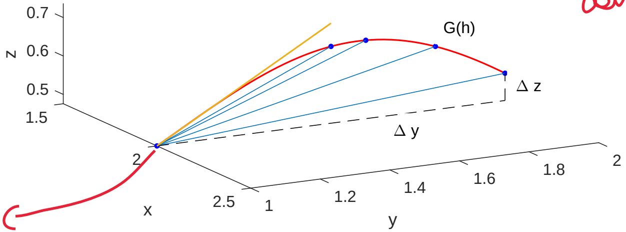


Supongamos que un montañero se encuentra en el punto de coordenadas $(2, 0)$ del dominio y se mueve en la dirección del vector $\mathbf{j} = (0, 1)$, es decir con coordenadas $(2, h)$. Si consideramos $G(h) = f(2, h)$ obtenemos una función de una variable $G(h) = 16e^{-4-h^2} + h^2 e^{-1-(h-1)^2}$ cuya gráfica se obtiene intersecando la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = 2$.



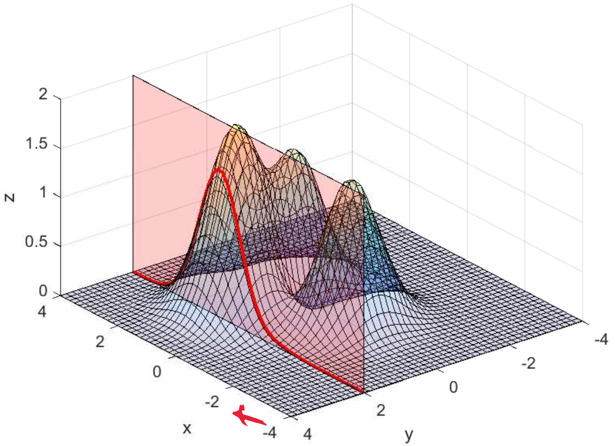
Consideremos $G(h)$ para $1 \leq h \leq 2$:

- $(2, 1+h)$ puntos
- Segmentos con pendiente $\frac{\Delta z}{\Delta y}$

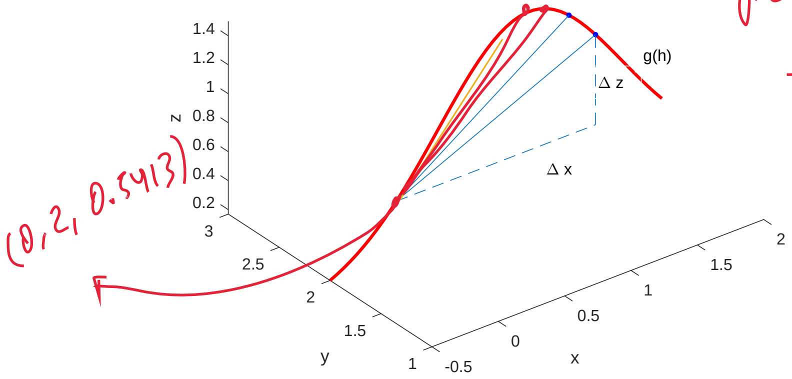


$(2, 1, 0.4757)$

Supongamos que un montañero se encuentra en el punto $(0, 2)$ del dominio y se mueve en la dirección del vector $\mathbf{i} = (1, 0)$, es decir con coordenadas $(h, 2)$.
Obtenemos una función de una variable $g(h) = f(h, 2) = 4h^2 e^{-4-h^2} + 4e^{-1-(h-1)^2}$ cuya gráfica se obtiene intersecando la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = 2$.



Consideremos $g(h)$ para $-0{,}5 \leq h \leq 2$:



• Puntos $(0+h, 2)$

• Segmentos con pendiente $\frac{\Delta z}{\Delta x}$

2.9 Derivadas Parciales

Definición (1.11 Derivada parcial (primera))

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. La derivada parcial (primera) de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es el número

$\vec{i}$ (x_0, y_0)

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \qquad \frac{\Delta z}{\Delta x} \tag{29}$$

siempre que exista el límite.

La derivada parcial (primera) de f con respecto a y en el punto (x_0, y_0) es el número

$\vec{j}$ (x_0, y_0)

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \qquad \frac{\Delta z}{\Delta y} \tag{30}$$

siempre que exista el límite.

Definición (1.12 Funciones derivadas parciales)

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. Las funciones derivadas parciales de f con respecto a x y a y, son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$
$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}, \quad (31)$$

siempre que existan dichos límites.

Ejemplo (1.13 Funciones derivadas parciales)

Dada la función

$$f(x, y) = x\,y \;+\; x\,y^2, \quad (32)$$

calcular las funciones f_x , f_y y particularizar las expresiones para el punto $(9, 3)$

```
syms x y
f=x*y+x*y^2;
diff(f,x)
diff(f,y)
subs(diff(f,x),{x,y},{9,3})
subs(diff(f,y),{x,y},{9,3})
```

Nota

Si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se denotan por

$f'_x(x,y)$

z'_x

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = z_x,$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = z_y. \tag{33}$$

z'_y

$f'_y(x,y)$

Los valores de las derivadas parciales de $f(x, y)$ en el punto (a, b) se designan por:

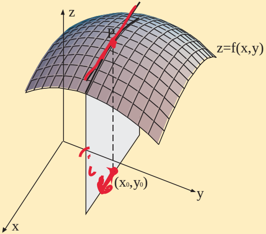
$$f_x(a, b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}, f_y(a, b) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}. \tag{34}$$

Nota (Interpretación Geométrica)

La recta tangente en el plano $y = y_0$ *a la curva*

$$\{z = f(x,y), \quad y = y_0\} \tag{35}$$

en el punto $P = f(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *tiene pendiente* $f_x(x_0, y_0)$



$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \Rightarrow$$

Cuando $\Delta x \to 0$

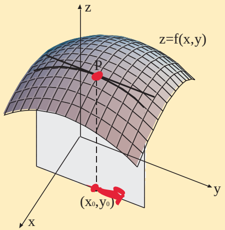
$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) \sim \Delta x \, f_x(x_0,y_0)$$

Nota (Interpretación Geométrica)

La recta tangente en el plano $x = x_0$ a la curva

$$\{z = f(x, y), \quad x = x_0\} \tag{36}$$

en el punto $P = f(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tiene pendiente $f_y(x_0, y_0)$



$f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y} \Rightarrow$ Cuando $\Delta y \to 0$

$f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \sim \Delta y\, f_y(x_0,y_0)$

Nota

- *Una función puede tener derivadas parciales en un punto y no ser continua en dicho punto.*
- *Una función puede ser continua en un punto y no tener derivadas parciales en dicho punto.*

Teorema

Si una función f tiene derivadas parciales continuas $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en una región, entonces f es continua en dicha región.

Ejemplo

Hallar las derivadas parciales primeras de la función $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$.

Ejemplo

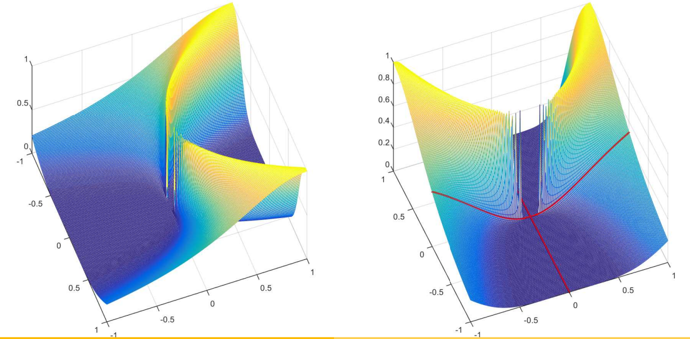
Hallar las derivadas parciales primeras de la función $z = -3 + 3x + y$ cuya gráfica es el plano con el que hemos estado trabajando a lo largo del tema.

Ejemplo (Derivadas parciales)

La siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6} & si (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

no es continua en el $(0,0)$ *pero sí tiene derivadas parciales* $f_x(0,0)$ *y* $f_y(0,0)$ *.*



Nota

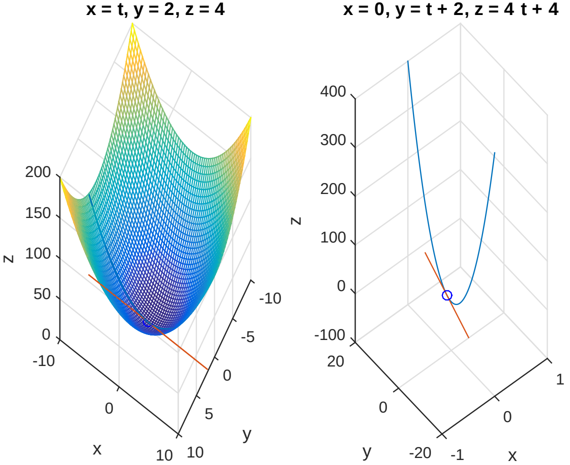
Estudio geométrico de las derivadas parciales primeras de la función $z = x^2 + y^2$

$z_x = 2x$

$z_y = 2y$

$P = (0,2,4)$

```
syms x y t
%Dibujamos superficie en explícitas
subplot(1,2,1)
f=x^2+y^2;
fmesh(f,[-10 10],[-10 10])
hold on
%Dibujamos curva en paramétricas obtenida al cortar por el plano y=2
fplot3(t,2,subs(f,{x,y},{t,2}),[-10,10])
%Dibujamos el punto (0,2,4)
plot3(0,2,4,'ob')
%Dibujamos recta tangente en el punto (0,2,4)
fplot3(0+t,2,4+t*subs(diff(f,x),{x,y},{0,2}),[-20,20])
hold off
subplot(1,2,2)
%Dibujamos curva en paramétricas obtenida al cortar por el plano x=0
fplot3(0,t,subs(f,{x,y},{0,t}),[-20,20])
hold on
%Dibujamos recta tangente en el punto (0,2,4)
fplot3(0,2+t,4+t*subs(diff(f,y),{x,y},{0,2}),[-10,10])
%Dibujamos el punto (0,2,4)
plot3(0,2,4,'ob')
```


x = t, y = 2, z = 4
200
150
100
50
0
z
-10
0
10
x
10
5
0
-5
-10
y
x = 0, y = t + 2, z = 4 t + 4
400
300
200
100
0
-100
z
20
0
-20
y
-1
0
1
x

2.9.1 Derivadas parciales de orden superior

Si $f(x,y)$ tiene derivadas parciales en cada punto (x,y) de una región, f_x y f_y son a su vez funciones de x e y que pueden tener también derivadas parciales, estas segundas derivadas se denotan

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}, \\ f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \tag{37}$$

Nota

Derivando parcialmente las derivadas segundas se obtienen las derivadas terceras, y así sucesivamente se obtienen las derivadas parciales n-ésimas.

Teorema (1.5 Teorema de Schwartz)

Si $f(x,y)$ tiene derivadas segundas cruzadas en (a,b) y estas son continuas en un abierto que contiene dicho punto, entonces

$$f_{yx}(a,b) = f_{xy}(a,b). \tag{38}$$

Ejemplo (1.14 Derivadas parciales de orden superior)

Si $f(x,y) = x^2 y \cos x$*, hallar* f_{xy}, f_{yx}, f_{xx} *y* f_{xxy}.

```
syms x y
f=x^2*y*cos(x);
fx=diff(f,x,1)
fy=diff(f,y,1)
fxx=diff(f,x,2)
fxy=diff(fx,y,1)
fyx=diff(fy,x,1)
fxxy=diff(fxx,y,1)
```

- $f'_x = 2xy\cos x + x^2 y(-\operatorname{sen} x)$

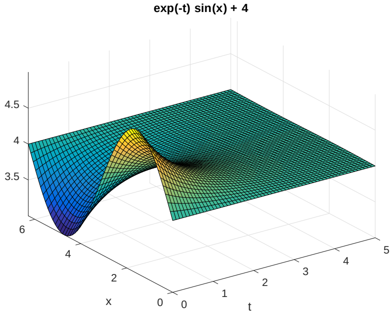
$f''_{xy} = 2x\cos x - \operatorname{sen} x\, x^2$

- $f'_y = x^2 \cos x$

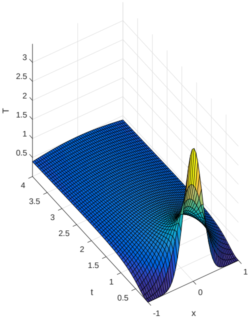
$f''_{yx} = 2x\cos x + x^2(-\operatorname{sen} x)$

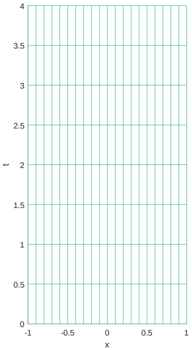
$f''_{xy} = f''_{yx}$

La ecuación unidimensional del calor es $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ con $c \in \mathbb{R}$, donde $u(x,t)$ representa la temperatura de una varilla delgada en un punto que ocupa la posición x en el instante t. Demostrar que para $c = 1$ la función $u(x,t) = 4 + e^{-t}\sin x$ satisface la ecuación del calor. Analizar el comportamiento de $u(x,t) = 4 + e^{-t}\sin x$ cuando $t \to \infty$ e interpretarlos.



La función $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/t}$ modela la temperatura de una barra de metal (aislada) después de que se ha aplicado un intenso foco de calor en su punto central.

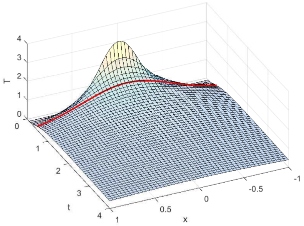




Situaros en los puntos $(-1,0), (-1,1), (-1,2)$ del dominio y dibujad en cada uno de ellos el vector $\mathbf{i} = (1,0)$.

A continuación vamos a estudiar la temperatura de la barra en diferentes instantes de tiempo t. Rellenad la siguiente tabla y observad cómo varía en magnitud el incremento de temperatura Δf y su signo:

(x_0, t_0)	$(x_0 + \Delta x, t_0)$	Δx	$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, t_0) - f(x_0, t_0)$	$\Delta f / \Delta x$
$(-1, 0'2)$	$(-0'5, 0{,}2)$	0'5	0'6256	1'251
$(0'2, 0'5)$	$(0'5, 0'5)$	0'3	-0'4477	-1'4923
$(-0'5, 1'5)$	$(0, 1'5)$	0'5	0'1253	0'2508
$(0, 2)$	$(0'5, 2)$	0'5	-0'0831	-0'1662

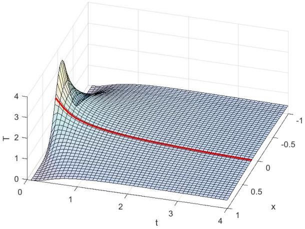


Se cumple $\frac{\partial f}{\partial x} = -(2xe^{-x^2/t})/t^{3/2}$. Particularizando, se obtiene $\frac{\partial f}{\partial x}(0'2, 0'5) = -1{,}0444$.

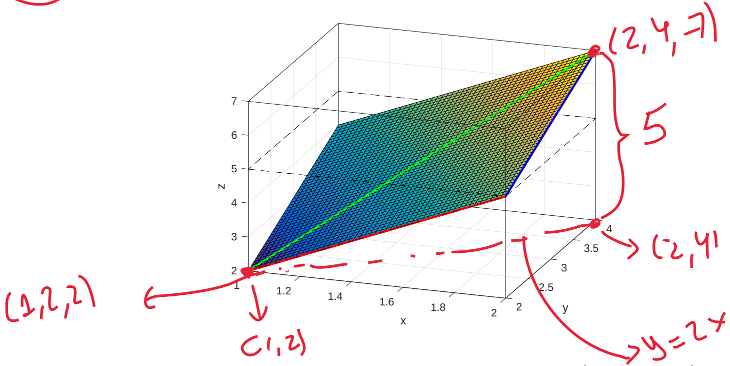
A continuación vamos a estudiar la temperatura de la barra en diferentes instantes de tiempo t. Rellenad la siguiente tabla y observad cómo varía en magnitud el incremento de temperatura Δf y su signo:

(x_0, t_0)	$(x_0, t_0 + \Delta t)$	Δt	$\Delta f = f(x_0, t_0 + \Delta t) - f(x_0, t_0)$	$\Delta f / \Delta t$
$(0'2, 1)$	$(0'2, 1'5)$	0'5	-0'1658	-0'3316
~~$(0'2, 2'5)$~~	~~$(0'2, 2)$~~	~~-0'5~~	~~0'0707~~	~~-0'1414~~
$(0'2, 0'5)$	$(0'2, 1)$	0'5	-0'3447	-0'6894

Se cumple $\frac{\partial f}{\partial t} = (x^2 e^{-x^2/t})/t^{5/2} - e^{-x^2/t}/(2t^{3/2})$. Particularizando: $\frac{\partial f}{\partial t}(0'2, 2'5) = -0{,}1205$.



A continuación se muestra la intersección del plano $z = -3 + 3x + y$ con el plano $y = 2x$ (se obtiene una recta)

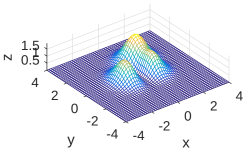


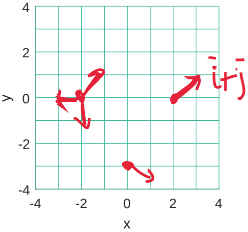
¿Cuál es la pendiente de la recta que aparece sobre el plano (color verde)?
Se puede observar que la pendiente es $\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 5/\sqrt{5}$. Se puede observar que $\Delta z = m_x \Delta x + m_y \Delta y$, siendo m_x la pendiente de la recta roja y m_y la pendiente de la recta azul. ¿Qué relación tienen estas pendientes con las derivadas parciales de z?.

Consideremos la función (gráfica de una montaña)

$$z = f(x,y) = 4x^2 e^{-x^2-y^2} + y^2 e^{-(x-1)^2-(y-1)^2};$$

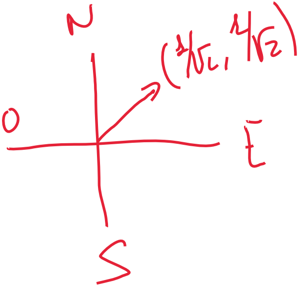
para $x, y \in [-4, 4]$.

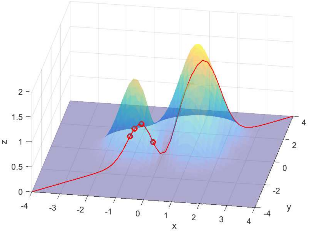


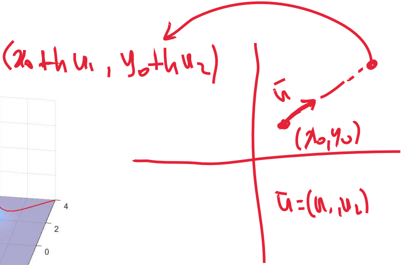


Situaros en el punto $(2,0)$ del dominio y dibujad los vectores $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ y $-\mathbf{i}-\mathbf{j}$.

2.11 Ejemplo Introducción







Suponiendo que el montañero se encuentra en el punto $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ y se mueve en la dirección noreste dada por el vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Rellenad la siguiente tabla:

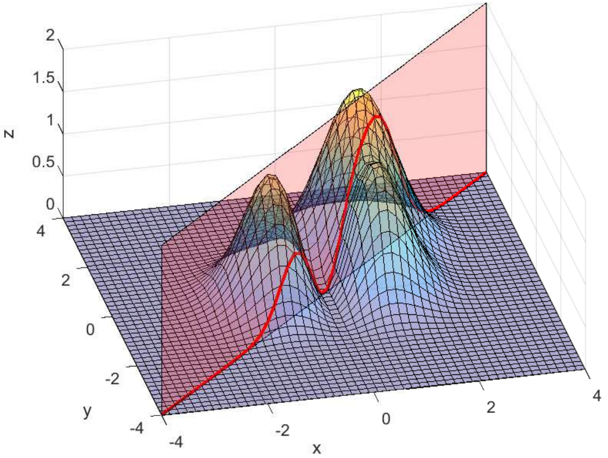
h	$\Delta f = f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)$	$\Delta f / h$
1	-0.2496	-0.2496
0,5	0.1849	0.3698
0,2	0.1341	0.6705

$h=1$

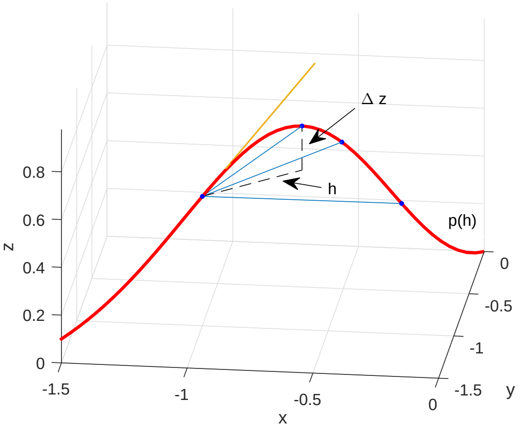
① $f(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}, -1+1/\sqrt{2}) - f(-1,-1) = -0.2496$; $\frac{\Delta f}{h} = \frac{-0.2496}{1}$

2.11 Ejemplo Introducción

Supongamos que un montañero se encuentra en el punto $(-4,-4)$ del dominio y se mueve en la dirección del vector $\mathbf{u}=(1/\sqrt{2},\sqrt{2})$, es decir con coordenadas $(-4+h\frac{1}{\sqrt{2}},-4+h\frac{1}{\sqrt{2}})$. Obtenemos una función de una variable $p(h)=f(h,h)=4h^2e^{-2h^2}+h^2e^{-2(h-1)^2}$ cuya gráfica se obtiene intersecando la superficie $z=f(x,y)$ con el plano $y=x$.



Consideremos $p(h)$ para $-1{,}5 \leq h \leq 0$:



Definición (1.15 Derivada direccional)

Sea f una función de dos variables y sea $\overline{u} = u_1\overline{i} + u_2\overline{j}$ un vector unitario. La derivada direccional de f en $P(x_0, y_0)$ respecto de $\overline{u}$ es

$$D_{\overline{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\,u_1, y_0 + h\,u_2) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{39}$$

siempre y cuando este límite exista.

Ejemplo

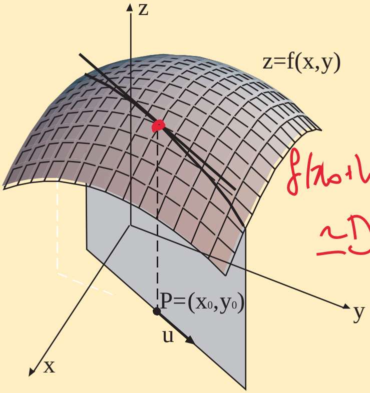
Hallar las derivadas parciales y direccionales de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & si (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

en el punto $(0, 0)$.

Nota (Interpretación geométrica)

Para hallar la pendiente buscada se toma la intersección de la superficie con el plano vertical que pasa por P y contiene al vector $\overline{u}$. Este plano vertical corta a la superficie en una curva C, se define la pendiente de la superficie en P en la dirección de $\overline{u}$ como la pendiente de la tangente a la curva C definida por $\overline{u}$ en ese punto.



Cuando $h \to 0$

$f(x_0+hu_1, y_0+hu_2) - f(x_0,y_0) \simeq$

$\simeq D_{\overline{u}} f(x_0,y_0)\, h$

Definición (1.13 Diferencial Total)

Si $z = f(x, y)$ y Δx, Δy son incrementos de x e y respectivamente, tomando $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$, se llaman diferencial de x e y respectivamente, la diferencial total de $f(x, y)$ es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy. \tag{40}$$

De manera análoga, se define la diferencial total para una función de n variables.

Nota

La diferencial total es útil porque es fácil de calcular y aproxima el incremento Δf de f, que en general no es fácil de calcular.

Definición (1.14 Función diferenciable)

El incremento de una función de dos variables se puede expresar

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\, \Delta x + f_y(x_0, y_0)\, \Delta y + \epsilon_1\, \Delta x + \epsilon_2\, \Delta y \tag{41}$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Se dice que una función $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) si su incremento se puede expresar en la forma anterior.
Se dice que f es diferenciable en una región del plano si lo es en cada uno de sus puntos.

Nota

Si llamamos $y = y_0 + \Delta y$, $x = x_0 + \Delta x$, la expresión anterior se puede escribir como

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y-y_0) + \epsilon_1\,(x-x_0) + \epsilon_2\,(y-y_0) \tag{42}$$

Definición (Función diferenciable)

La función $f(x,y)$ es diferenciable en el punto (x_0,y_0) si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)^T \bullet (x-x_0, y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \tag{43}$$

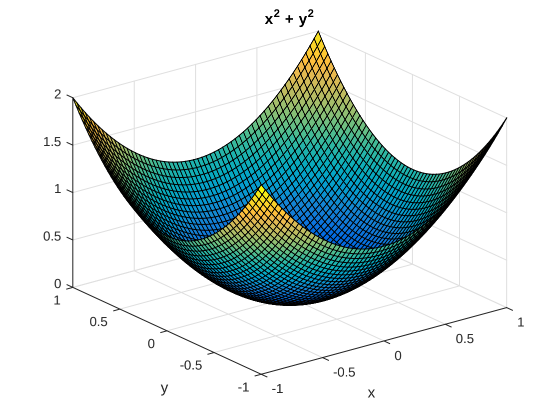
donde $\nabla f(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$.

Nota

- *Si una función es diferenciable en un punto, entonces es continua en dicho punto.*
- *Si una función es diferenciable en un punto, existen las derivadas parciales en dicho punto.*
- *Si una función es diferenciable en un punto, existe la derivada direccional en cualquier dirección.*
- *Si una función y sus derivadas parciales primeras, son continuas en un entorno de un punto, entonces la función es diferenciable en dicho punto.*

Ejemplo

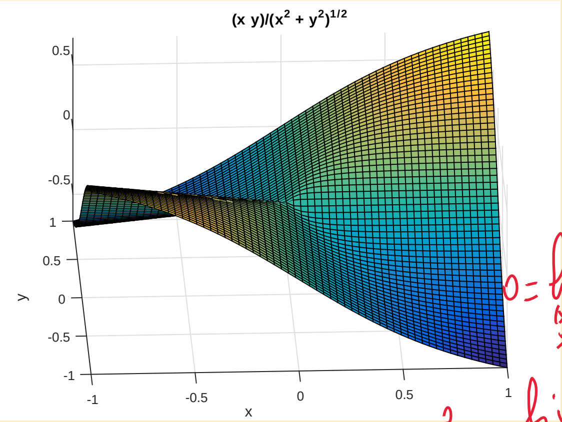
La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ *es diferenciable en el* $(0, 0)$



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0. \tag{44}$$

Ejemplo

La función $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *no es diferenciable en el* $(0,0)$



$$0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{2}{2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\nexists \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \tag{45}$$

Nota

Si $z = f(x, y)$ *es diferenciable en* (x_0, y_0), *el incremento de la función* Δf *o* Δz, *se puede aproximar mediante el valor de la diferencial,* dz, *así*

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y \tag{46}$$

para $(\Delta x, \Delta y) \to 0$.

Ejemplo

Un cajón abierto tiene longitud 3 m, anchura 1 m, y altura 2 m. Está construido con un material que cuesta 20 euros por m^2 *de lateral y 30 euros por* m^2 *de fondo. Calcular el coste total del cajón y utilizar incrementos para estimar la variación del coste cuando la longitud y anchura aumentan 3 cm y la altura decrece en 4 cm.*

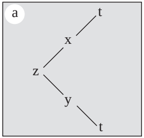
Ejemplo

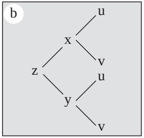
Analizar si la función $f(x, y) = x^2 \sin y + y \cos x$ *es diferenciable en todo punto de* $\mathbb{R}^2$.

Teorema (1.6 Regla de la cadena para un parámetro independiente)

Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable de x e y y sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ funciones derivables de t. Entonces $z = f(x(t), y(t)) = f(t)$ es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{47}$$





Ejemplo (1.15 Derivación de funciones compuestas)

Sea $z = x + y$, *con* $x = \dfrac{1}{t}$ *e* $y = t^2$.

Hallar $\dfrac{dz}{dt}$ *de las dos formas:*

1. *Expresando* z *en términos de* t.
2. *Utilizando la regla de la cadena.*

Ejemplo (Derivación de funciones compuestas)

Un cilindro circular recto varía de tal manera que su radio r *crece a la tasa de 3 cm/min, y su altura* h *decrece a la tasa de 5 cm/min. ¿A qué tasa varía el volumen cuando el radio es de 10 cm y la altura de 8 cm?.*

Teorema (1.7 Regla de la cadena para dos parámetros independientes)

Supóngase que $z = f(x, y)$ *es diferenciable en* (x, y) *y que existen las derivadas parciales de* $x = x(u, v)$ *e* $y = y(u, v)$ *en* (u, v)*. Entonces la función compuesta* $z = f(x(u, v), y(u, v))$ *es derivable en (u,v) y*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{48}$$

Ejemplo (1.16 Regla de la cadena para dos parámetros independientes)

Sea $z = 4\,x - y^2$*, con* $x = u\,v$ *e* $y = u^2\,v$*.*
Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ *y* $\dfrac{\partial z}{\partial v}$*.*

Nota

Los resultados anteriores se pueden generalizar a funciones de más de dos variables. Si $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es una función diferenciable de las* n *variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, las cuales son a su vez, funciones diferenciables de* m *variables* $t_1, t_2, \ldots, t_m$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t_1} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \ldots \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}, \\ \ldots, \\ \frac{\partial w}{\partial t_m} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \ldots \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}. \end{aligned} \tag{49}$$

Primer Caso

Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable de x e y y sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ funciones derivables de t. Entonces $z = f(x(t), y(t)) = f(t)$ es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{50}$$

Si $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ son funciones diferenciables de x e y, $\dfrac{dx}{dt}(t)$ y $\dfrac{dy}{dt}(t)$ son funciones derivables de t podemos derivarlas nuevamente aplicando la regla de la cadena para un parámetro independiente y obtener las derivadas segundas $\dfrac{d^2z}{dt^2}$.

Segundo Caso

Supóngase que $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x, y) y que existen las derivadas parciales de $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ en (u, v). Entonces la función compuesta $z = f(x(u, v), y(u, v))$ es derivable en (u,v) y

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned} \tag{51}$$

Supóngase que $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ son diferenciables en (x, y) y que existen las derivadas parciales de $\frac{\partial x}{\partial v}(u, v)$, $\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$ y $\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$ en (u, v). Aplicando nuevamente la regla de la cadena para dos parámetros independientes, se pueden calcular las derivadas $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

Teorema

Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en $P(x_0, y_0)$. Entonces f tiene derivada direccional en la dirección de cualquier vector $\overline{u} = u_1\overline{i} + u_2\overline{j}$ que viene dada por

$$D_{\overline{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\; u_1 + f_y(x_0, y_0)\; u_2. \tag{52}$$

$\bar{u}$ vector unitario

Definición (1.15 Derivada direccional)

Sea f una función de dos variables y sea $\overline{u} = (\Delta x, \Delta y)/\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ un vector unitario. La derivada direccional de f en $P(x_0, y_0)$ respecto de $\overline{u}$ es

$$D_{\overline{u}}f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0)\; \Delta x + f_y(x_0, y_0)\; \Delta y)/\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{53}$$

La derivada direccional anterior es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la dirección del vector $\overline{u}$. Relacionemos el valor anterior con el problema estudiado de un plano.

Definición (1.16 Gradiente)

Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en (x, y). Se define la función `gradiente`

$$\bigtriangledown f(x,y) = f_x(x,y)\,\bar{i} + f_y(x,y)\,\bar{j}. \tag{54}$$

Nota

La derivada direccional se puede expresar en términos de una función vectorial llamada gradiente

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_0, y_0) \longmapsto (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$$

Teorema

Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en (x,y). La derivada direccional de f en el punto (x,y) en la dirección del vector $\overline{u} = u_1\overline{i} + u_2\overline{j}$ es

$$D_{\overline{u}}f(x,y) = \bigtriangledown f(x,y) \bullet \overline{u}. \tag{55}$$

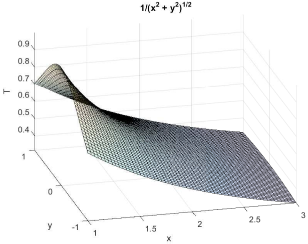
Ejemplo (1.24 Derivada direccional)

Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = 4 - x^2 - (1/4)y^2$ en $(1,2)$ en la dirección de $\overline{u} = (\cos\pi/3, \sin\pi/3)$.

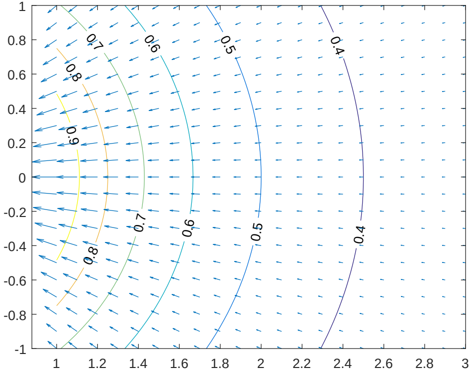
```
syms x y
f=4-x^2-(1/4)*y^2;
%Punto
a=1;
b=2;
%Vector dirección
u1=cos(pi/3); u2=sin(pi/3);
fx=diff(f,x,1);
fy=diff(f,y,1);
%Gradiente
gx=subs(fx,{x,y},{a,b});
gy=subs(fy,{x,y},{a,b});
%Derivada direccional
deriv=u1*gx+u2*gy
```

Supongamos que, en un instante de tiempo fijo, la temperatura en cada punto de una placa rectangular está dada por la función $T = f(x, y)$

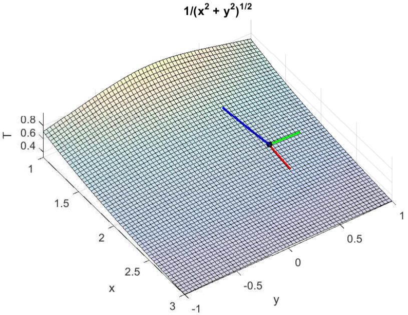
$$f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}.$$



A continuación dibujamos las curvas de nivel y el vector gradiente en cada punto del dominio



A continuación, dibujamos el punto de la placa $(2, 0{,}5, 0{,}4851)$ y tres curvas sobre la superficie que pasan por dicho punto. La curva roja se ha obtenido moviéndose a partir del punto $(2, 0{,}5)$ en la dirección del vector $\mathbf{i}$. La curva verde se ha obtenido moviéndose a partir del punto $(2, 0{,}5)$ en la dirección del vector $\mathbf{j}$. La curva azul se ha obtenido moviéndose a partir del punto $(2, 0{,}5)$ en la dirección del vector gradiente normalizado $-0{,}9701\mathbf{i} - 0{,}2425\mathbf{j}$ (vector gradiente de $f(x, y)$ particularizado en el punto $(2, 0{,}5)$.



Se puede comprobar que $f'_x(2, 0'5) = -0{,}2283$, $f'_y(2, 0'5) = -0{,}0571$ y la derivada direccional en la dirección del vector gradiente $\mathbf{u} = \bigtriangledown f(2, 0'5)/\| \bigtriangledown f(2, 0'5)\|$ es $0{,}2353$.

Ejemplo (Derivada direccional)

Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = x^2 \sin(2y)$ *en* $(1, \pi/4)$ *en la dirección de* $\overline{v} = 3\overline{i} - 4\overline{j}$.

Teorema (1.10 Propiedad del gradiente de dirección óptima)

Sea f *una función diferenciable y se denotará al gradiente de* f *en* $P_0(x_0, y_0)$ *como* $\bigtriangledown f_0$. *Si* $\bigtriangledown f_0 \neq \overline{0}$, *entonces:*

1. *El máximo valor de la derivada direccional* $D_{\overline{u}}f$ *es* $\| \bigtriangledown f_0\|$ *y el vector* $\overline{u}$ *es entonces el unitario asociado a* $\bigtriangledown f_0$.
2. *El mínimo valor de la derivada direccional* $D_{\overline{u}}f$ *es* $-\| \bigtriangledown f_0\|$ *y el vector* $\overline{u}$ *es entonces el unitario asociado a* $- \bigtriangledown f_0$.

Ejemplo

La energía potencial V *en* (x,y,z) *es* $V(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.

- *Hallar la tasa de cambio de* V *en* $P(2,-1,3)$ *en la dirección de* P *al origen.*
- *Hallar la dirección que produce la mayor tasa de cambio de* V *en* P.
- *¿Cuál es la mayor tasa de cambio de* V *en* P?.

Teorema (Propiedades del gradiente)

Sean f y g dos funciones diferenciables:

1. *Regla de la constante*
$$\triangledown\, C = \overline{0},\ \forall C \in \mathbb{R}\ cte. \tag{56}$$
2. *Regla de la linealidad*
$$\triangledown\,(a\, f + b\, g) = a\ \triangledown\,(f) + b\ \triangledown\,(g),\ \forall a, b \in \mathbb{R}\ ctes. \tag{57}$$
3. *Regla del producto*
$$\triangledown\,(f\ g) = f\ \triangledown\,(g) + g\ \triangledown\,(f). \tag{58}$$
4. *Regla del cociente*
$$\triangledown\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\ \triangledown\,(f) - f\ \triangledown\,(g)}{g^2},\ g \neq 0. \tag{59}$$
5. *Regla de la potencia*
$$\triangledown\,(f^n) = n\ f^{(n-1)}\ \triangledown\, f,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{60}$$

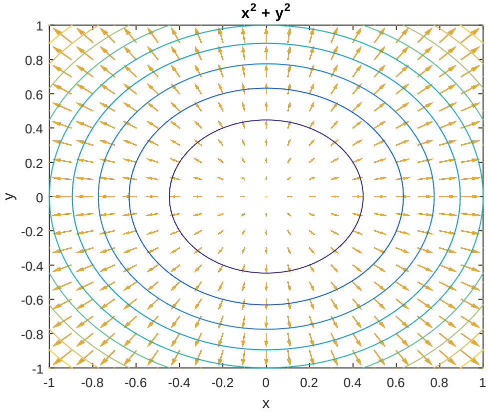
Teorema (1.12 Normalidad del gradiente)

Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable en el punto $P_0(x_0, y_0)$ y tal que el gradiente $\triangledown f_0 \neq \overline{0}$. Entonces $\triangledown f_0$ es ortogonal a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por P_0.

Ejemplo

Dibujamos las curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ *y el vector gradiente en cada punto* (x,y) *de la región* $[-1,1 \times [-1,1]$.

```
%Función diferenciable
syms x y; f=x^2+y^2;
%Gradiente de f en (x,y)
g=gradient(f,[x,y])
%Digujamos el gradiente de f en los puntos de la región dada
[X, Y] = meshgrid(-1:.1:1,-1:.1:1);
G1 = subs(g(1), [x y], {X,Y});
G2 = subs(g(2), [x y], {X,Y});
quiver(X, Y, G1, G2)
%Dibujamos las curvas de nivel de f
hold on; fcontour(f,[-1,1])
```



Ejemplo (1.25 Normalidad del gradiente)

Considérese la función $f(x,y) = x^2 - y^2$. *Hallar el vector normal a la curva de nivel correspondiente a* $z = 1$ *en el punto* $(2, \sqrt{3})$.

Ejemplo

La altura h de una montaña con respecto al nivel del mar, viene dada por la expresión $h(x, y) = 1000 - 0{,}01x^2 - 0{,}05y^2$ *donde* x *representa la dirección Este e* y *representa la dirección Norte. Un montañero está en el punto de la montaña de coordenadas* $(x, y) = (200, 100)$. *Se pide:*

- *Analizar si el montañero asciende o desciende cuando camina en las direcciones Norte, Noreste y Sur respectivamente.*
- *Hallar las direcciones de ascenso y descenso más rápido.*
- *Hallar la dirección para la cual no cambia de altura.*