

# 4

## Viga sobre Base Elástica

### PRINCIPIO DEL VALOR ESTACIONARIO DE LA ENERGÍA POTENCIAL TOTAL

La energía potencial total ( $\Pi$ ) de un sistema elástico viene compuesto por dos partes:

- Energía potencial de los esfuerzos internos (energía de deformación ( $U$ )) y;
- Energía potencial de las fuerzas externas ( $\Omega$ ), donde se cumple que:

$$\Pi(u) = U(u) - \Omega(u) \quad (4.1)$$

Si la ecuación (4.1) representa la condición de energía potencial total estacionaria del sistema, se puede demostrar que el valor de  $u$  es un extremo de  $\Pi(u)$ . Éste es el *principio del valor estacionario de la energía potencial total*. Luego, buscamos los valores extremos (mínimos y máximos) de la función, es decir, cuando:

$$\frac{d\Pi(u)}{du} = 0 \quad (4.2)$$

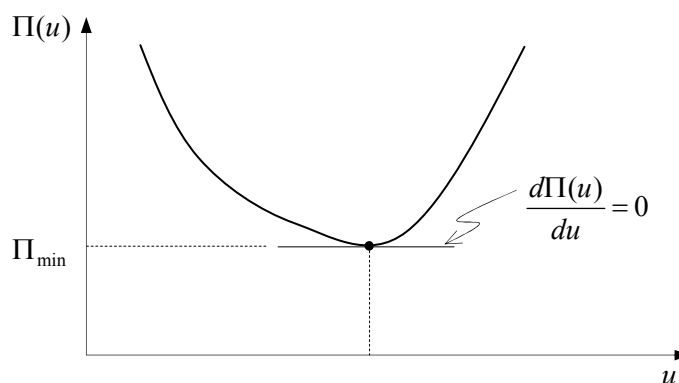


Figura 4.1: Mínimo de una función.

**NOTA:** Si estamos en el *régimen elástico lineal*, la energía de deformación  $U$  siempre será positiva y como consecuencia  $\frac{d^2\Pi(u)}{du^2} > 0$  se cumple. En este caso, la función energía potencial total será cóncava y el valor estacionario corresponde a un mínimo. En ésta situación principio del valor estacionario de la energía potencial total se conoce como *principio de la energía potencial mínima*.

### ENERGÍA DE DEFORMACIÓN - $U$

La energía de deformación para un sistema elástico viene dada por:

$$U(u) = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (4.3)$$

o se utilizamos la notación ingenieril por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (4.4)$$

Para nuestro ejemplo en particular la energía de deformación puede ser expresada a través del esfuerzo:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y} dx \quad (4.5)$$

Para la demostración de la expresión anterior ver Elementos 1D.

### ENERGÍA POTENCIAL REALIZADA POR LAS CARGAS EXTERNAS - $\Omega$

En general la energía potencial de las fuerzas externas viene representado por:

$$\Omega = Pu \quad (4.6)$$

donde  $P$  puede representar un sistema de fuerzas y/o momentos, y  $u$  puede representar un sistema de desplazamientos y/o rotaciones.

Para los siguientes tipos de cargas tenemos que:

- Carga Concentrada:  $\Omega = Pw_p$ , donde  $P$  - Carga concentrada y  $w_p$  - desplazamiento según dirección de  $P$ .

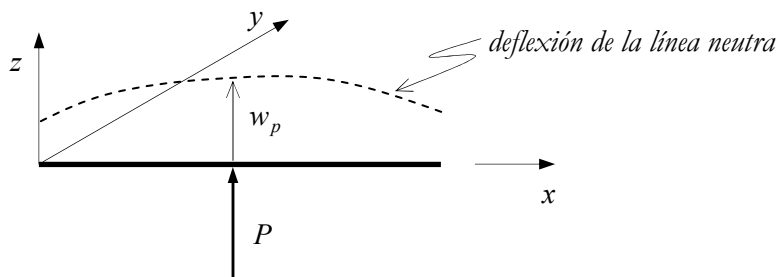


Figura 4.2

- Carga uniformemente distribuida:  $\Omega = \int_0^L q(x)w(x)dx$ , donde  $q(x)$  - Carga distribuida,  $w_p$  - desplazamiento según dirección de  $q(x)$ .

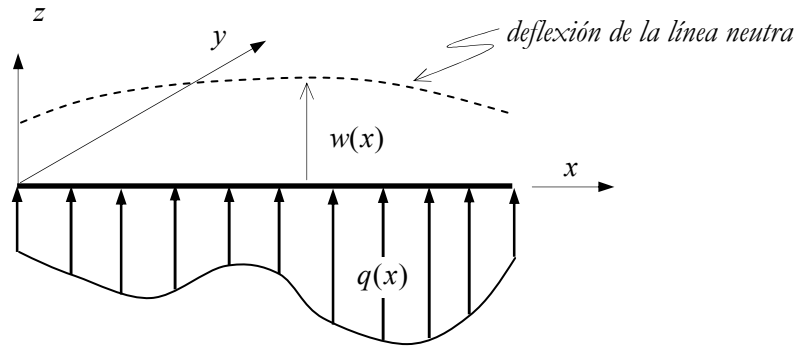


Figura 4.3: Carga uniformemente distribuida.

En el caso que  $q(x)$  sea constante dentro del dominio, es decir no es una función de  $x$ , el potencial queda  $\Omega = q \int_0^L v(x)dx$

- Momento concentrado:  $\Omega = M_y^A \left( \frac{dw}{dx} \right)_A = M_y^A w'_A$

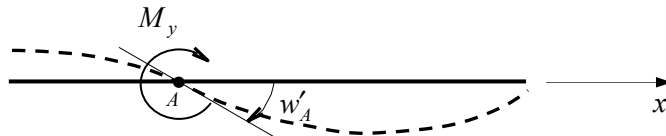
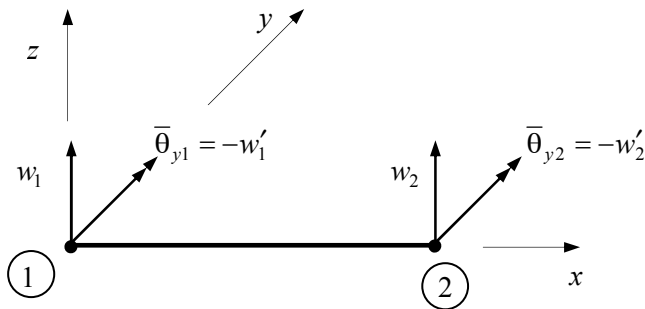


Figura 4.4: Momento concentrado en el punto A.

### ELEMENTO FINITO VIGA

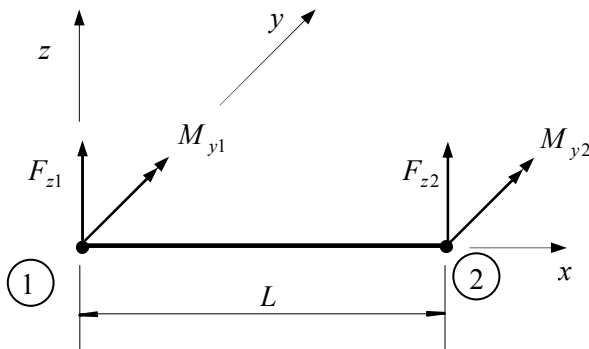
Vamos considerar que a cada nodo esté asociado a dos “desplazamientos”: desplazamiento vertical ( $w$ ) y una rotación ( $\bar{\theta}_y = -\frac{dw}{dx} \equiv -w'$ ).

Para la demostración vamos considerar los siguientes grados de libertad en el elemento de viga:



$$\{\mathbf{u}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \bar{\theta}_{y1} \\ w_2 \\ \bar{\theta}_{y2} \end{Bmatrix}$$

a) Desplazamientos



$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{y2} \end{Bmatrix}$$

b) Esfuerzos

Figura 4.5: elemento finito tipo viga.

Vamos adoptar como función aproximada para la deflexión de la viga un polinomio de tercer grado:

$$w = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (4.7)$$

La primera derivada viene dada por:

$$\frac{dw}{dx} = w' = 3ax^2 + 2bx + c \quad (4.8)$$

Luego, para los extremos de la viga quedamos con:

$$\begin{aligned} x=0 \quad (w = w_1) &\Rightarrow w_1 = d \\ x=0 \quad (w' = w'_1) &\Rightarrow \frac{dw}{dx} = w'_1 = c \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} x=L \quad (w = w_2) &\Rightarrow w_2 = aL^3 + bL^2 + cL + d \\ x=L \quad (w' = w'_2) &\Rightarrow w'_2 = 3aL^2 + 2bL + c \end{aligned} \quad (4.10)$$

Resultando en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} 2L & L^2 & -2L & L^2 \\ -3L^2 & -2L^3 & 3L^2 & -L^3 \\ 0 & L^4 & 0 & 0 \\ L^4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Con eso concluimos que:

$$a = \frac{2}{L^3}(w_1 - w_2) + \frac{1}{L^2}(w_2' + w_1') \quad (4.12)$$

$$b = \frac{3}{L^2}(w_2 - w_1) - \frac{1}{L}(w_2' + 2w_1') \quad (4.13)$$

$$c = w_1' \quad (4.14)$$

$$d = w_1 \quad (4.15)$$

Sustituyendo los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  en la expresión de la deflexión de la viga (4.7), obtenemos que:

$$w = w_1 \left[ 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 1 \right] + w_2 \left[ -2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] + w_1' \left[ \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \right] + w_2' \left[ \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right] \quad (4.16)$$

Recordar que hemos adoptado como grados de libertad en los nodos la rotación  $\bar{\theta}_y$  y no la primera derivada de la deflexión  $w'$ . Pero, ellas están relacionadas entre si a través de la expresión  $\bar{\theta}_y = -w'$ . Con eso, la expresión de la deflexión queda:

$$w = w_1 \left[ 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 1 \right] + w_2 \left[ -2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] - \bar{\theta}_{y1} \left[ \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \right] - \bar{\theta}_{y2} \left[ \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right] \quad (4.17)$$

La primera derivada viene dada por:

$$w' = w_1 \left[ \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} \right] + w_2 \left[ -\frac{6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2} \right] - \bar{\theta}_{y1} \left[ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 \right] - \bar{\theta}_{y2} \left[ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L} \right] \quad (4.18)$$

La segunda derivada queda:

$$w'' = w_1 \left[ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right] + w_2 \left[ -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \right] - \bar{\theta}_{y1} \left[ \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right] - \bar{\theta}_{y2} \left[ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] \quad (4.19)$$

Será de utilidad obtener los siguientes valores

$$\int_0^L w(x) dx = \frac{L}{2} w_1 + \frac{L}{2} w_2 - \frac{L^2}{12} \bar{\theta}_{y1} + \frac{L^2}{12} \bar{\theta}_{y2} \quad (4.20)$$

$$\int_0^L w^2 dx = \frac{13L}{35} w_1^2 + \frac{13L}{35} w_2^2 + \frac{L^3}{105} \bar{\theta}_{y1}^2 + \frac{L^3}{105} \bar{\theta}_{y2}^2 + \frac{9L}{35} w_1 w_2 - \frac{11L^2}{105} w_1 \bar{\theta}_{y1} + \frac{13L^2}{210} w_1 \bar{\theta}_{y2} + \dots$$

$$\dots - \frac{13L^2}{210} w_2 \bar{\theta}_{y1} + \frac{11L^2}{105} w_2 \bar{\theta}_{y2} - \frac{L^3}{70} \bar{\theta}_{y1} \bar{\theta}_{y2}$$
(4.21)

$$\int_0^L w'^2 dx = \frac{6}{5L} w_1^2 + \frac{6}{5L} w_2^2 + \frac{2L}{15} \bar{\theta}_{y1}^2 + \frac{2L}{15} \bar{\theta}_{y2}^2 - \frac{12}{5L} w_1 w_2 - \frac{1}{5} w_1 \bar{\theta}_{y1} - \frac{1}{5} w_1 \bar{\theta}_{y2} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{5} w_2 \bar{\theta}_{y1} + \frac{1}{5} w_2 \bar{\theta}_{y2} - \frac{L}{15} \bar{\theta}_{y1} \bar{\theta}_{y2}$$
(4.22)

$$\int_0^L w''^2 dx = \frac{12}{L^3} w_1^2 + \frac{12}{L^3} w_2^2 + \frac{4}{L} \bar{\theta}_{y1}^2 + \frac{4}{L} \bar{\theta}_{y2}^2 - \frac{24}{L^3} w_1 w_2 - \frac{12}{L^2} w_1 \bar{\theta}_{y1} - \frac{12}{L^2} w_1 \bar{\theta}_{y2} + \dots$$

$$\dots + \frac{12}{L^2} w_2 \bar{\theta}_{y1} + \frac{12}{L^2} w_2 \bar{\theta}_{y2} + \frac{4}{L} \bar{\theta}_{y1} \bar{\theta}_{y2}$$
(4.23)

$$\int_0^L x w(x) dx = \frac{3L^3}{20} w_1 + \frac{7L^2}{20} w_2 - \frac{L^3}{30} \bar{\theta}_{y1} + \frac{L^3}{20} \bar{\theta}_{y2}$$
(4.24)

## EJEMPLOS

### Ejemplo 1

Consideremos un elemento de viga, con la rigidez a flexión  $EI_y$  constante, sometido a una carga uniformemente distribuida de intensidad  $q$ .

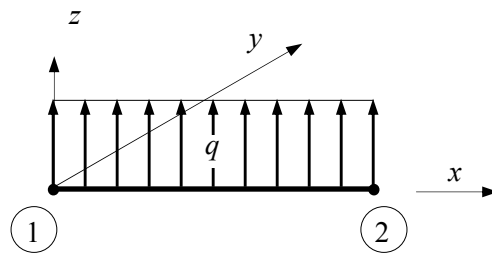


Figura 4.6: Viga sometida a una carga uniforme.

La energía potencial total del sistema viene dada por:

$$\Pi = U - \Omega = \int_0^L \frac{EI_y}{2} w''^2 dx - \int_0^L q w(x) dx$$
(4.25)

Si estamos considerando que  $q$  es independiente de  $x$ , la energía potencial de las fuerzas externas resulta:

$$\Omega = \int_0^L qw(x)dx = q \int_0^L w(x)dx \quad (4.26)$$

Sustituyendo la ecuación (4.20) en la ecuación anterior obtenemos la expresión de  $\Omega$  en función de los parámetros nodales  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $\bar{\theta}_{y1}$  y  $\bar{\theta}_{y2}$ , *i.e.*:

$$\Omega = q \int_0^L w(x)dx = q \left( \frac{L}{2} w_1 + \frac{L}{2} w_2 - \frac{L^2}{12} \bar{\theta}_{y1} + \frac{L^2}{12} \bar{\theta}_{y2} \right) \quad (4.27)$$

Considerando que  $EI_y$  es constante dentro del elemento, la energía potencial de las fuerzas internas viene dada por:

$$U = \frac{EI_y}{2} \int_0^L w''^2 dx \quad (4.28)$$

Utilizando la expresión obtenida en (4.23) la ecuación anterior resulta:

$$\begin{aligned} U = \frac{EI_y}{2} \int_0^L w''^2 dx = \frac{EI_y}{2} \left( \frac{12}{L^3} w_1^2 + \frac{12}{L^3} w_2^2 + \frac{4}{L} \bar{\theta}_{y1}^2 + \frac{4}{L} \bar{\theta}_{y2}^2 - \frac{24}{L^3} w_1 w_2 - \frac{12}{L^2} w_1 \bar{\theta}_{y1} - \frac{12}{L^2} w_1 \bar{\theta}_{y2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{12}{L^2} w_2 \bar{\theta}_{y1} + \frac{12}{L^2} w_2 \bar{\theta}_{y2} + \frac{4}{L} \bar{\theta}_{y1} \bar{\theta}_{y2} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Luego, la energía potencial (4.25) total queda:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{EI_y}{2} \left( \frac{12}{L^3} w_1^2 + \frac{12}{L^3} w_2^2 + \frac{4}{L} \bar{\theta}_{y1}^2 + \frac{4}{L} \bar{\theta}_{y2}^2 - \frac{24}{L^3} w_1 w_2 - \frac{12}{L^2} w_1 \bar{\theta}_{y1} - \frac{12}{L^2} w_1 \bar{\theta}_{y2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{12}{L^2} w_2 \bar{\theta}_{y1} + \frac{12}{L^2} w_2 \bar{\theta}_{y2} + \frac{4}{L} \bar{\theta}_{y1} \bar{\theta}_{y2} \right) - q \left( \frac{L}{2} w_1 + \frac{L}{2} w_2 - \frac{L^2}{12} \bar{\theta}_{y1} + \frac{L^2}{12} \bar{\theta}_{y2} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Según el principio del valor estacionario de la energía potencial total hay que cumplir que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI_y}{2} \left\{ \frac{24}{L^3} w_1 - \frac{24}{L^3} w_2 - \frac{12}{L^2} \bar{\theta}_{y1} - \frac{12}{L^2} \bar{\theta}_{y2} \right\} - q \frac{L}{2} = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\theta}_{y1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI_y}{2} \left\{ \frac{8}{L} \bar{\theta}_{y1} - \frac{12}{L^2} w_1 + \frac{12}{L^2} w_2 + \frac{4}{L} \bar{\theta}_{y2} \right\} + q \frac{L^2}{12} = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI_y}{2} \left\{ \frac{24}{L^3} w_2 - \frac{24}{L^3} w_1 + \frac{12}{L^2} \bar{\theta}_{y1} + \frac{12}{L^2} \bar{\theta}_{y2} \right\} - q \frac{L}{2} = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\theta}_{y2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI_y}{2} \left\{ \frac{8}{L} \bar{\theta}_{y2} - \frac{12}{L^2} w_1 + \frac{12}{L^2} w_2 + \frac{4}{L} \bar{\theta}_{y1} \right\} - q \frac{L^2}{12} = 0 \quad (4.34)$$

Reestructurando las expresiones anteriores en forma de matriz, obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{-12EI_y}{L^3} & \frac{-6EI_y}{L^2} \\ \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \frac{-12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \bar{\theta}_{y1} \\ w_2 \\ \bar{\theta}_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ -qL^2 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

o aun de forma más compacta:

$$[\mathbf{Ke}^{(1)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\} = \{\mathbf{f}^{(e)}\} \quad (4.36)$$

con:

$$[\mathbf{Ke}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{-12EI_y}{L^3} & \frac{-6EI_y}{L^2} \\ \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \frac{-12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ \frac{-6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}; \quad \{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ -qL^2 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

donde  $[\mathbf{Ke}^{(1)}]$  es la matriz de rigidez del elemento finito propuesto. Es interesante destacar que la matriz  $[\mathbf{Ke}^{(1)}]$  no tiene inversa ( $\det[\mathbf{Ke}^{(1)}] = 0$ ), ya que estamos tratando con una estructura hipoestática, en este caso la estructura tiene infinitas soluciones ya que no hemos restringido ninguno de sus movimientos. Para que (4.36) tenga solución única tenemos que aplicar las condiciones de contorno. Podemos llegar al mismo resultado (4.35) por medio del teorema de los trabajos virtuales, ver Chaves & Mínguez(2010) pg. 296.

Considerando el mismo ejemplo, ver Figura 4.6 y con las siguientes condiciones de contorno tal y como se muestran en la Figura 4.7.

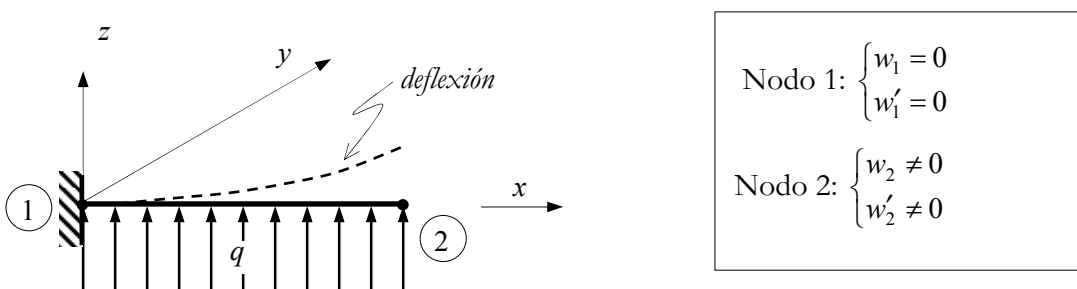


Figura 4.7: Viga empotrada sometida a una carga uniforme.

Aplicando las condiciones de contorno a la ecuación (4.35) resulta que:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \bar{\theta}_{y1} \\ w_2 \\ \bar{\theta}_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Al resolver el sistema anterior obtenemos que:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \bar{\theta}_{y1} \\ w_2 \\ \bar{\theta}_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qL^4}{8EI_y} \\ -\frac{qL^3}{6EI_y} \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

El momento en el nodo 1 viene dado por  $M_{y1} = -EI_y w_1''$ . Utilizando la ecuación (4.19) obtenemos:

$$\begin{aligned} w'' &= w_1 \left[ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right] + w_2 \left[ -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \right] - \bar{\theta}_{y1} \left[ \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right] - \bar{\theta}_{y2} \left[ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] \\ \Rightarrow w''(x=0) &= w_1'' = w_2 \left[ \frac{6}{L^2} \right] - \bar{\theta}_{y2} \left[ -\frac{2}{L} \right] \\ \Rightarrow w_1'' &= \frac{qL^4}{8EI_y} \left[ \frac{6}{L^2} \right] - \frac{qL^3}{6EI_y} \left[ \frac{2}{L} \right] \\ \Rightarrow w_1'' &= \left( \frac{5}{6} \right) \frac{qL^2}{2EI_y} \end{aligned}$$

Luego, el momento queda:

$$M_{y1} = -EI_y w_1'' = -EI_y \left( \frac{5}{6} \right) \frac{qL^2}{2EI_y} = -\left( \frac{5}{6} \right) \frac{qL^2}{2} \quad (4.40)$$

Si comparamos con el valor exacto  $M_{y1}^{exacto} = -\frac{qL^2}{2}$ , verificamos que hay un error de 16,6%.

### Esfuerzos en el Elemento Viga

Una vez obtenido los desplazamientos (4.39) llega el momento de obtener los esfuerzos en el elemento de viga. A través de los desplazamientos, calculamos las fuerzas internas según la expresión (4.36), *i.e.*:

$$\{\bar{\mathbf{f}}^{(e)}\} = [\mathbf{K}^{(1)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\} \quad (4.41)$$

resultando:

$$\{\bar{f}^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qL^4}{8EI_y} \\ -\frac{qL^3}{6EI_y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{5qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

Si estuviéramos tratando con elemento finito tradicional, los esfuerzos en el elemento de viga serían el proporcionado por  $\{\bar{f}^{(e)}\}$ , ver Figura 4.8(a). A medida que refinamos el error disminuye. A través del Análisis de Estructuras, la solución exacta de este ejemplo viene dada por la Figura 4.8(c), y verifiquemos que las “reacciones” en las extremidades del elemento viga vienen dados por:

$$\{R^{(e)}\} = \{\bar{f}^{(e)}\} + \{\tilde{f}^{(e)}\} = \{\bar{f}^{(e)}\} - \{f^{(e)}\} \quad (4.43)$$

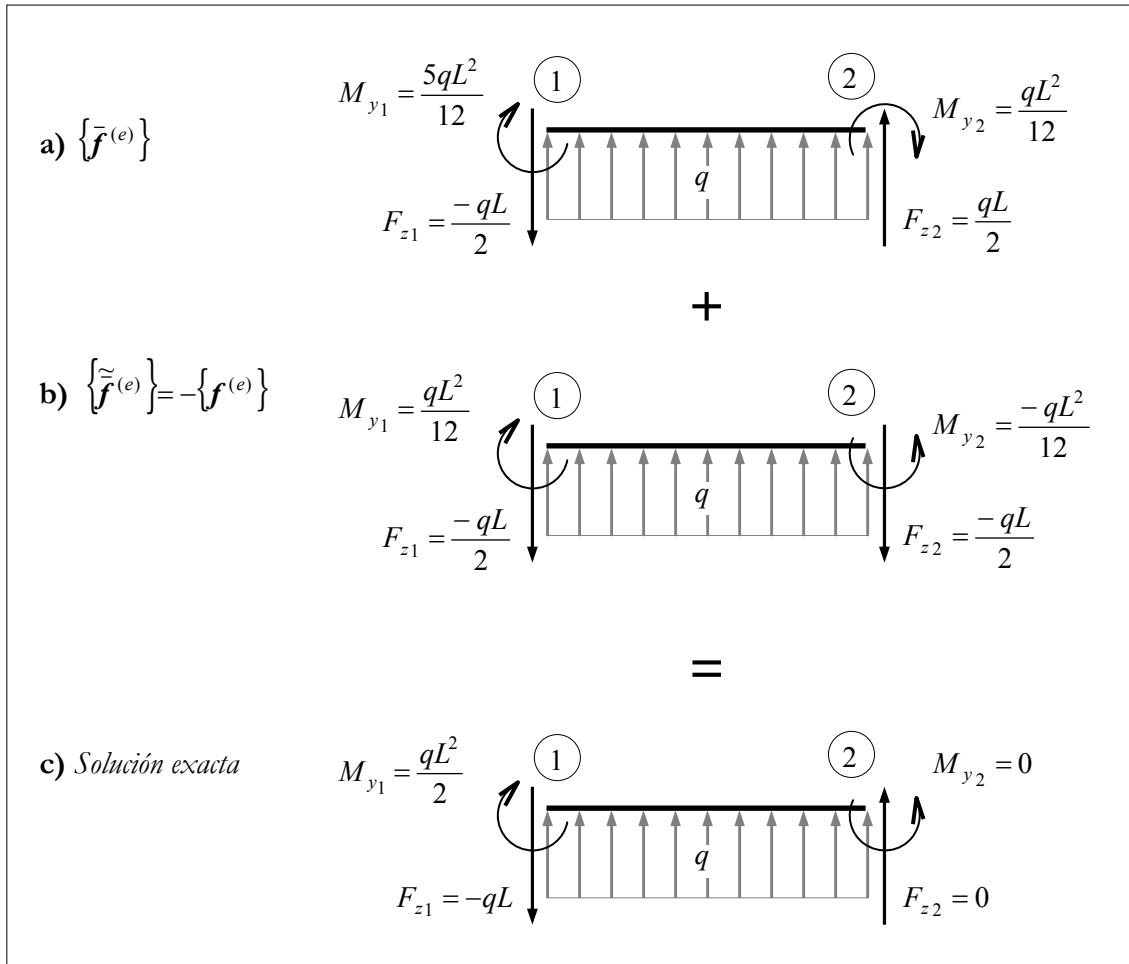


Figura 4.8: Reacciones en el elemento viga.

El vector  $\{\tilde{f}^{(e)}\} = -\{f^{(e)}\}$ , ver ecuación (4.37), en el Análisis de Estructuras, recibe el nombre de acciones de extremidad para miembros restringidos. Es decir, la solución proporcionada por la Figura 4.8(b) son las reacciones que surgen si la viga estuviera

empotrada en las dos extremidades, Gere&Weaver (1965), ver Figura 4.9. Y estas reacciones son las mismas obtenidas para el vector de fuerzas nodales equivalentes, ver ecuación (4.37).

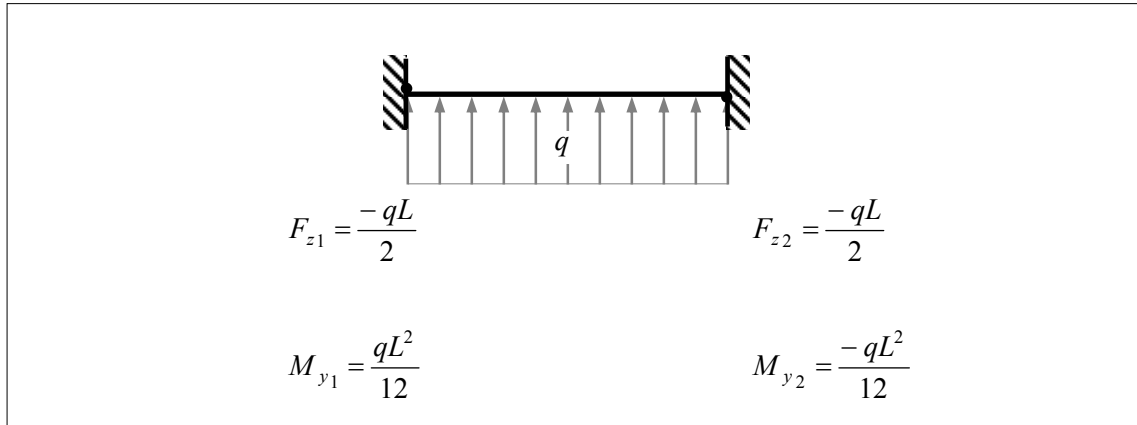


Figura 4.9: Reacciones en viga biempotrada.

### Ejemplo 2

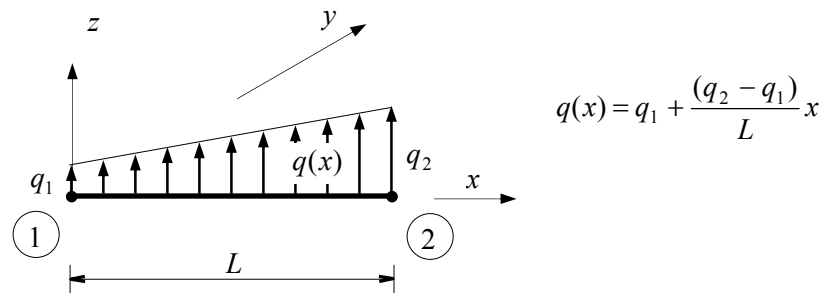


Figura 4.10: Viga sometida a una carga trapezoidal.

Para la situación de la Figura 4.10 tenemos que:

$$\frac{dU}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} - \frac{d\Omega}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{ke}^{(1)}] \{\mathbf{u}^{(e)}\} = \frac{d\Omega}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} = \{\mathbf{f}^{(e)}\} \quad (4.44)$$

Como podemos ver la matriz de rigidez es la misma que para el ejemplo anterior ya que no hemos cambiado la aproximación de la deflexión. El único término que cambia es el vector de fuerzas nodales equivalentes ya que la carga varía linealmente  $q(x) = q_1 + \frac{(q_2 - q_1)}{L}x$ .

Con eso tenemos que:

$$\Omega = \int_0^L q(x)w(x)dx = \int_0^L \left[ q_1 + \frac{(q_2 - q_1)}{L}x \right] w(x)dx = q_1 \int_0^L w(x)dx + \frac{(q_2 - q_1)}{L} \int_0^L xw(x)dx \quad (4.45)$$

Teniendo en cuenta las integrales (4.20) y (4.24) obtenemos que:

$$\Omega = \left( \frac{7}{20}q_1 + \frac{3}{20}q_2 \right) Lw_1 + \left( \frac{3}{20}q_1 + \frac{7}{20}q_2 \right) Lw_2 + \left( \frac{-1}{20}q_1 - \frac{1}{30}q_2 \right) L^2\bar{\theta}_{y1} + \left( \frac{1}{30}q_1 + \frac{1}{20}q_2 \right) L^2\bar{\theta}_{y2} \quad (4.46)$$

Derivando con respecto a los valores nodales, obtenemos que:

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{7L}{20}q_1 + \frac{3L}{20}q_2 \\ -L^2q_1 + \frac{L^2}{30}q_2 \\ \frac{3L}{20}q_1 + \frac{7L}{20}q_2 \\ \frac{L^2}{30}q_1 + \frac{L^2}{20}q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

Observar que cuando  $q_1 = q_2 = q$  recuperamos el vector de fuerzas nodales equivalentes dada por (4.37).

### ELEMENTO FINITO DE VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA

Consideremos ahora que la viga está sobre una base elástica, ver Figura 4.11.

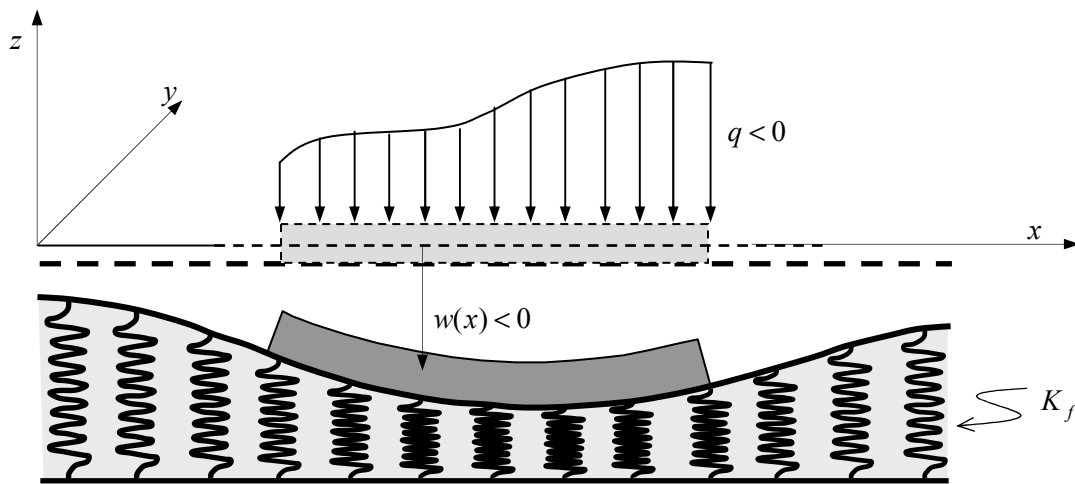


Figura 4.11: Viga sobre base elástica.

En esta situación, la energía potencial total del sistema viene dada por:

$$\Pi = U - \Omega = U_{viga} + U_{muelle} - \Omega \quad (4.48)$$

Según el principio del valor estacionario de la energía potencial total hay que cumplir que:

$$\frac{d\Pi}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} (U_{viga} + U_{muelle} - \Omega) = 0 \Rightarrow \frac{dU_{viga}}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} + \frac{dU_{muelle}}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} - \frac{d\Omega}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} = 0 \quad (4.49)$$

o aún

$$\frac{dU_{viga}}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} + \frac{dU_{muelle}}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} - \frac{d\Omega}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} = 0 \Rightarrow [\mathbf{ke}^{(1)}]\{\mathbf{u}^{(e)}\} + \frac{dU_{muelle}}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} = \{\mathbf{f}^{(e)}\} \quad (4.50)$$

donde  $[\mathbf{ke}^{(1)}]$  es la misma matriz de rigidez dada en (4.37). Luego, solo falta determinar el término  $\frac{dU_{muelle}}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}}$ . Para un muelle, ver Figura 4.12, la energía de deformación viene dada por:

$$U_{muelle} = \int_0^L \frac{1}{2} K_f w^2 dx \quad (4.51)$$

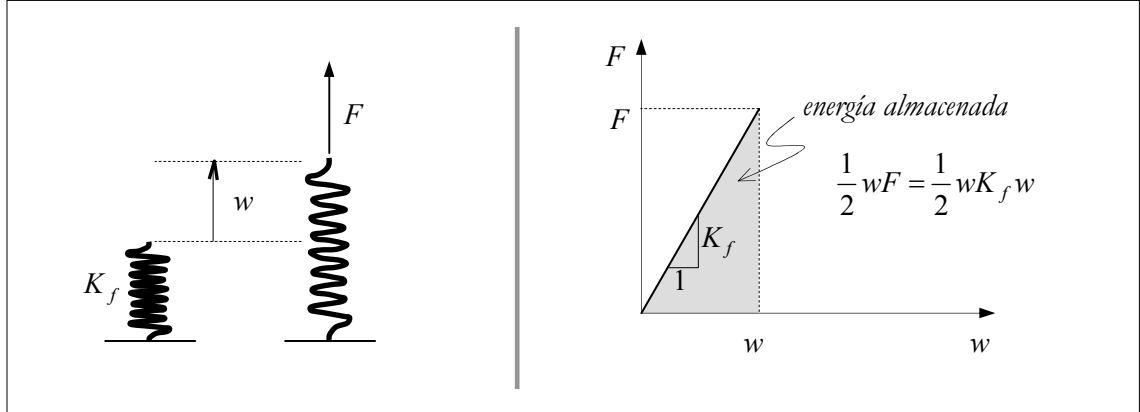


Figura 4.12: Elemento tipo muelle.

Considerando que el coeficiente de muelle  $K_f$  es constante dentro del elemento, la expresión (4.51) queda:

$$U_{muelle} = \frac{K_f}{2} \int_0^L w^2 dx \quad (4.52)$$

Además utilizando la ecuación (4.21) obtenemos que:

$$U_{muelle} = \frac{K_f}{2} \left( \frac{13L}{35} w_1^2 + \frac{13L}{35} w_2^2 + \frac{L^3}{105} \bar{\theta}_{y1}^2 + \frac{L^3}{105} \bar{\theta}_{y2}^2 + \frac{9L}{35} w_1 w_2 - \frac{11L^2}{105} w_1 \bar{\theta}_{y1} + \frac{13L^2}{210} w_1 \bar{\theta}_{y2} + \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{13L^2}{210} w_2 \bar{\theta}_{y1} + \frac{11L^2}{105} w_2 \bar{\theta}_{y2} - \frac{L^3}{70} \bar{\theta}_{y1} \bar{\theta}_{y2} \right) \quad (4.53)$$

Luego

$$\frac{\partial U_{muelle}}{\partial w_1} = \frac{K_f}{2} \left\{ \frac{26L}{35} w_1 + \frac{9L}{35} w_2 - \frac{11L^2}{105} \bar{\theta}_{y1} + \frac{13L^2}{210} \bar{\theta}_{y2} \right\} \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial U_{muelle}}{\partial \bar{\theta}_{y1}} = \frac{K_f}{2} \left\{ \frac{2L^3}{105} \bar{\theta}_{y1} - \frac{11L^2}{105} w_1 - \frac{13L^2}{210} w_2 - \frac{L^3}{70} \bar{\theta}_{y2} \right\} \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial U_{muelle}}{\partial w_2} = \frac{K_f}{2} \left\{ \frac{26L}{35} w_2 + \frac{9L}{35} w_1 - \frac{13L^2}{210} \bar{\theta}_{y1} + \frac{11L^2}{105} \bar{\theta}_{y2} \right\} \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial U_{muelle}}{\partial \bar{\theta}_{y2}} = \frac{K_f}{2} \left\{ \frac{2L^3}{105} \bar{\theta}_{y2} + \frac{13L^2}{210} w_1 + \frac{11L^2}{105} w_2 - \frac{L^3}{70} \bar{\theta}_{y1} \right\} \quad (4.57)$$

Reestructurando las expresiones anteriores en forma de matriz, obtenemos que:

$$\frac{dU_{muelle}}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} = K_f L \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{-11L}{210} & \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} \\ \frac{-11L}{210} & \frac{L^2}{105} & \frac{-13L}{420} & \frac{-L^2}{140} \\ \frac{9}{70} & \frac{-13L}{420} & \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} \\ \frac{13L}{420} & \frac{-L^2}{140} & \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \bar{\theta}_{y1} \\ w_2 \\ \bar{\theta}_{y2} \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

$$\frac{dU_{muelle}}{d\{\mathbf{u}^{(e)}\}} = [Ke^{(2)}]\{\mathbf{u}^{(e)}\}$$

donde

$$[Ke^{(2)}] = K_f L \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{-11L}{210} & \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} \\ \frac{-11L}{210} & \frac{L^2}{105} & \frac{-13L}{420} & \frac{-L^2}{140} \\ \frac{9}{70} & \frac{-13L}{420} & \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} \\ \frac{13L}{420} & \frac{-L^2}{140} & \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

## REFERENCIA

- CHAVES, E.W.V. (2007). *Mecánica del medio continuo: Conceptos básicos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería - CIMNE - Barcelona. ISBN: 978-84-96736-38-2 (3ª Edición).
- GERE, J.M. & WEAVER JR., W. (1965). *Analysis of Framed Structures*. Van Nostrand Reinhold, U.S.
- SECHLER, E.E. (1952). *Elasticity in engineering*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- LAIER, J.E.; BAREIRO, J.C., (1983). *Complemento de resistência dos materiais*. Publicação 073/92 São Carlos - USP - EESC.
- UGURAL, A.C.; FENSTER, S.K., (1984). *Advanced strength and applied elasticity - The SI version*. Elsevier Science Publishing Co. Inc., New York.