

4

Integración Numérica en el Tiempo

4.1 Introducción

Antes de plantear el problema con múltiples grados de libertad, en esta sección estudiaremos la solución numérica de ecuaciones diferenciales del tipo:

$$y'(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} \quad (4.1)$$

Cuyo objetivo es encontrar la función $y(x,t)$.

La mayoría de los problemas de ingeniería, la solución analítica (exacta) de las ecuaciones en derivadas parciales no existe debido a la complejidad del problema propuesto. Pero, para una mejor comprensión de los métodos empleados trabajaremos con una función cuya solución analítica es de fácil obtención. Por ejemplo, consideremos la siguiente ecuación diferencial sólo dependiente del tiempo:

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -2t^3 + 12t^2 - 20t + 8,5 \quad (4.2)$$

La solución exacta obtenemos al integrar la expresión anterior, resultando que:

$$y = -0,5t^4 + 4t^3 - 10t^2 + 8,5t + C \quad (4.3)$$

donde C es la constante de integración. Observemos también que hay infinitudes de soluciones, dependiendo del valor de C , ver Figura 4.1. La solución será única para unas dadas condiciones de contorno e inicial. Para nuestro ejemplo (4.2) que es sólo dependiente del tiempo solamente tenemos la condición inicial, es decir, en $t = 0$ el valor de la función es conocido e igual a $y(t = 0) \equiv y_0 = 1 \Rightarrow C = 1$. Resultando así en la siguiente función:

$$y = -0,5t^4 + 4t^3 - 10t^2 + 8,5t + 1 \quad (4.4)$$

En $t = 0$ tenemos que:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y'_0 = 8,5 \end{cases} \quad (4.5)$$

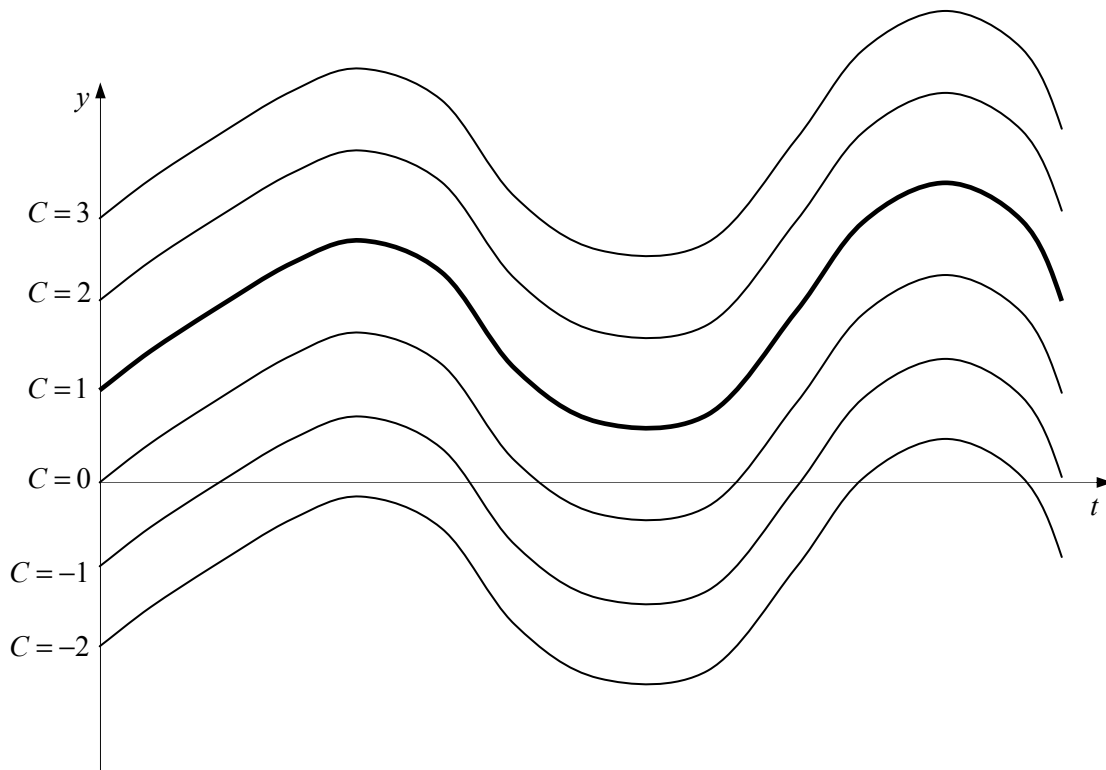


Figura 4.1: Infinitas soluciones.

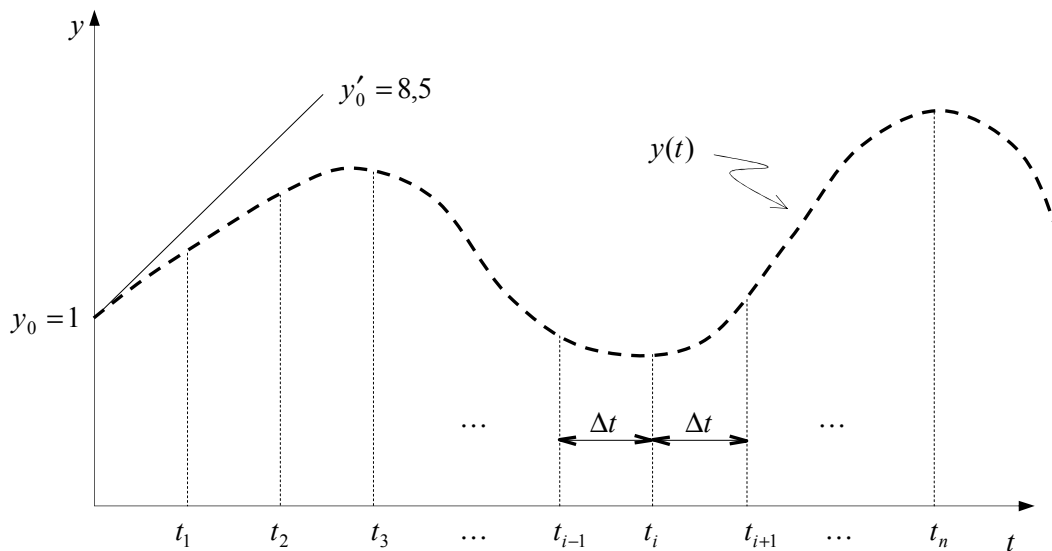


Figura 4.2: Discretización en el tiempo.

Unas de las técnicas numéricas más empleadas para la integración en el tiempo es la técnica de diferencia finita donde discretizamos el tiempo a través de valor finito Δt . A continuación expondremos algunos de estos métodos.

4.2 Método de Euler

Conocido el valor de la pendiente en el paso de tiempo t , y'_i , podemos obtener el valor aproximado de y_{i+1} a través de una aproximación lineal:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} \Rightarrow y_{i+1} = y_i + y'_i \Delta t \tag{4.6}$$

Como podemos verificar, la expresión anterior es la misma empleada por la diferencia finita por la derecha.

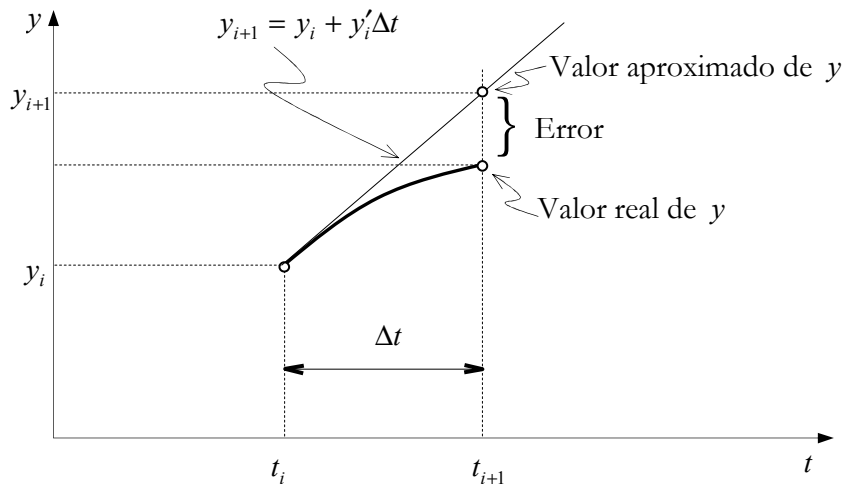


Figura 4.3: Diferencia finita hacia a delante.

A través de la Figura 4.3 podemos intuir que a medida que el incremento de tiempo tiende a cero nos aproximamos al valor real (exacto) de la función. En un problema de grandes dimensiones trabajar con incrementos de tiempo muy pequeños puede resultar en un alto coste computacional, por ellos se han desarrollado otros métodos más eficaces que aun que el incremento de tiempo sea grande el error es demasiado pequeño.

Fijemos que anteriormente aplicamos la diferencia finita hacia a delante, utilizando y'_i para obtener y_{i+1} . Podemos también hacer la siguiente aproximación: nos situamos en y_{i+1} y aplicamos diferencia finita hacia a tras, resultando que:

$$y'_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} \Rightarrow y_{i+1} = y_i + y'_{i+1} \Delta t \tag{4.7}$$

Este método también conocido como Método de Euler hacia adelante (método implícito). Podemos entonces resumir los métodos anteriores como:

$$y_{i+1} = y_i + y'_i \Delta t \quad (\text{Método Explícito}) \quad (4.8)$$

$$y_{i+1} = y_i + y'_{i+1} \Delta t \quad (\text{Método Implícito}) \quad (4.9)$$

Otra aproximación, más precisa que las anteriores, es adoptar la pendiente de la recta como un promedio de las pendientes y'_i y y'_{i+1} , resultando:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} \right) \Delta t \quad (4.10)$$

Esta última expresión se conoce en la literatura como el método de Crank-Nicolson o regla del punto medio.

4.3 Método Alfa

Podemos generalizar los métodos anteriores en una única expresión. Para ello consideremos que tenemos las siguientes aproximaciones para las funciones $y(t)$, $y'(t)$, ver Figura 4.4.

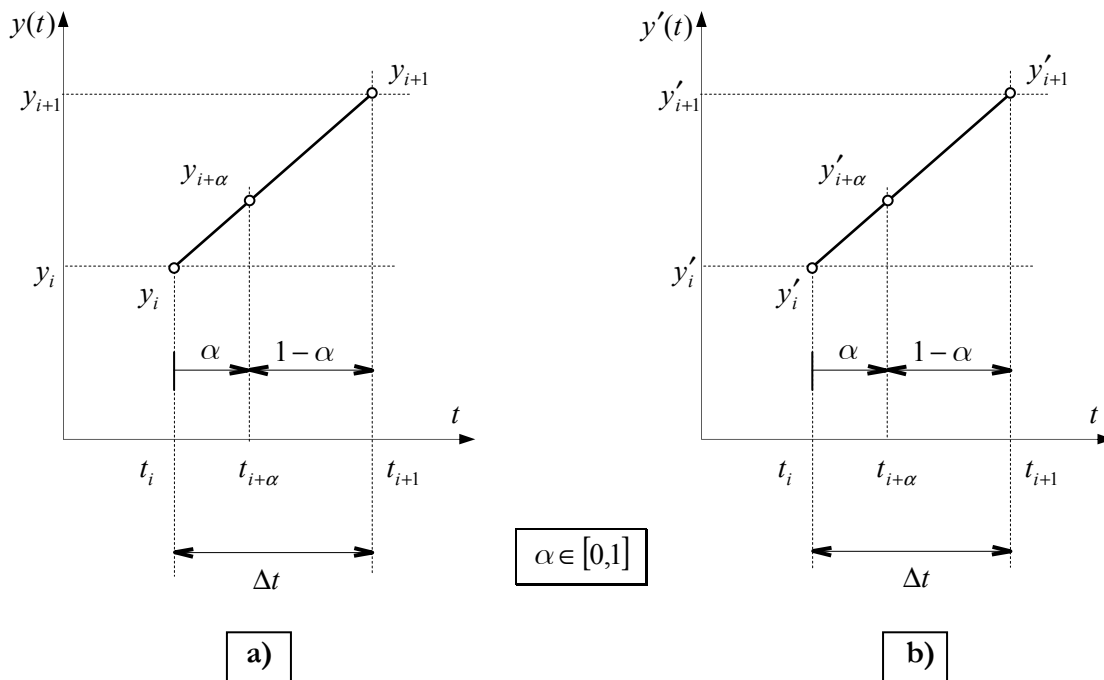


Figura 4.4: Método Alfa.

A través de la linealización de las funciones $y(t)$, $y'(t)$, podemos decir que:

$$y'_{i+\alpha} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} \quad (4.11)$$

Con lo cual sacamos que:

$$y_{i+1} = y_i + y'_{i+\alpha} \Delta t \tag{4.12}$$

A través de semejanza de triángulo, Figura 4.4(b), podemos expresar $y'_{i+\alpha}$ como:

$$\frac{y'_{i+1} - y'_i}{1} = \frac{y'_{i+\alpha} - y'_i}{\alpha} \Rightarrow y'_{i+\alpha} = y'_i + \alpha(y'_{i+1} - y'_i) \tag{4.13}$$

o aún:

$$y'_{i+\alpha} = \alpha y'_{i+1} + (1 - \alpha)y'_i \tag{4.14}$$

Resumimos entonces el Método Alfa:

$$\boxed{\begin{cases} y_{i+1} = y_i + y'_{i+\alpha} \Delta t \\ y'_{i+\alpha} = \alpha y'_{i+1} + (1 - \alpha)y'_i \end{cases}} \tag{4.15}$$

Dependiendo del valor de α recaemos en uno u otro método presentado anteriormente, por ejemplo:

- $\alpha = 0$ (Explícito)

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + y'_{i+\alpha} \Delta t \\ y'_{i+\alpha} = (1)y'_i \end{cases} \Rightarrow y_{i+1} = y_i + y'_i \Delta t \tag{4.16}$$

- $\alpha = 1$ (Implícito)

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + y'_{i+\alpha} \Delta t \\ y'_{i+\alpha} = y'_{i+1} \end{cases} \Rightarrow y_{i+1} = y_i + y'_{i+1} \Delta t \tag{4.17}$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$ (Crank-Nicolson)

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + y'_{i+\frac{1}{2}} \Delta t \\ y'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} y'_{i+1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) y'_i = \frac{y'_{i+1} + y'_i}{2} \end{cases} \Rightarrow y_{i+1} = y_i + \left(\frac{y'_{i+1} + y'_i}{2}\right) \Delta t \tag{4.18}$$

También el método de Crank-Nicolson se conoce como el Método de Heun. Geométricamente podemos interpretar como se indica según la Figura 4.5. En t_i hacemos una predicción para obtener $y_{i+1}^0 = y_i + y'_i \Delta t$ y a su vez podemos obtener y'_{i+1}^0 . A continuación hallamos el valor de la nueva pendiente:

$$\bar{y}'_i = \frac{y'_{i+1}^0 + y'_i}{2} \tag{4.19}$$

Volvemos entonces a obtener el nuevo valor de y_{i+1} teniendo en cuenta el valor de la pendiente \bar{y}'_i :

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{y'_{i+1}^0 + y'_i}{2}\right) \Delta t \tag{4.20}$$

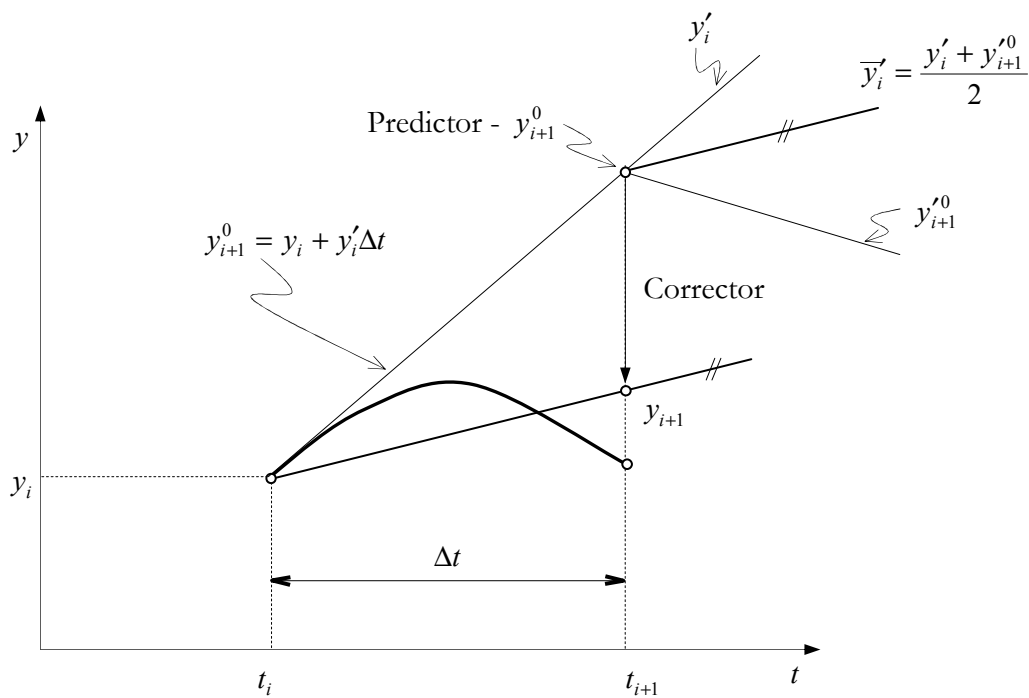


Figura 4.5: Método de Heun (predictor-corrector).

Regresando al nuestro ejemplo inicialmente planteado cuya ecuación diferencial es:

$$y' = \frac{dy}{dt} = -2t^3 + 12t^2 - 20t + 8,5 \quad (4.21)$$

con las siguientes condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad ; \quad y_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y'_0 = 8,5 \quad (4.22)$$

Aplicaremos el Método de Euler y el Método de Heun con un incremento de $\Delta t = 0,5s$. Para el primer paso de tiempo ($t = 0,5$) el valor exacto de la función se puede obtener a través de la función (4.4) resultando:

$$y(t = 0,5) = -0,5 \times 0,5^4 + 4 \times 0,5^3 - 10 \times 0,5^2 + 8,5 \times 0,5 + 1 = 3,21875 \quad (4.23)$$

El procedimiento numérico sigue a continuación.

Predictor $i + 1$

$$y_1^0 = y_0 + y'_0 \Delta t = 1 + 8,5 \times 0,5 = 5,25 \quad (\text{Paramos aquí si utilizamos el Método de Euler})$$

Corrector

$$y'(t = 0,5) = y_1^0 = -2t^3 + 12t^2 - 20t + 8,5 = -2(0,5)^3 + 12(0,5)^2 - 20(0,5) + 8,5 = 1,25$$

$$\bar{y}'_i = \frac{y_{i+1}^0 + y'_i}{2} = \frac{1,25 + 8,5}{2} = 4,875$$

$$y_1 = y_0 + \bar{y}'_i \Delta t = 1 + 4,875 \times 0,5 = 3,4375$$

4.4 Método de Euler Modificado

En el método de Euler modificado utilizamos el método de Euler para predecir el valor en el medio del intervalo:

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + y'_i \frac{\Delta t}{2} \tag{4.24}$$

A continuación obtenemos el valor de la pendiente $y'_{i+\frac{1}{2}}$, en el punto medio, que será utilizada para obtener y_{i+1} :

$$y_{i+1} = y_i + y'_{i+\frac{1}{2}} \Delta t \tag{4.25}$$

Aplicando esta metodología para el ejemplo propuesto (4.21) obtenemos que:

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + y'_i \frac{\Delta t}{2} = 1 + 8,5 \times \frac{0,5}{2} = 3,125$$

Cálculo de la pendiente en el punto medio:

$$y'(t = 0,25) = y'_{0+\frac{1}{2}} = -2t^3 + 12t^2 - 20t + 8,5 = -2(0,25)^3 + 12(0,25)^2 - 20(0,25) + 8,5 = 4,21875$$

$$y_1 = y_0 + y'_{\frac{1}{2}} \Delta t = 1 + 4,21875 \times 0,5 = 3,1093$$

En la Figura 4.6 se muestra la integración numérica de la función empleada anteriormente, $y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -2t^3 + 12t^2 - 20t + 8,5$ con $y'(0) = 1$. Fueron utilizados el método de Euler, Euler modificado y el de Heun con un incremento de tiempo $\Delta t = 0,5$.

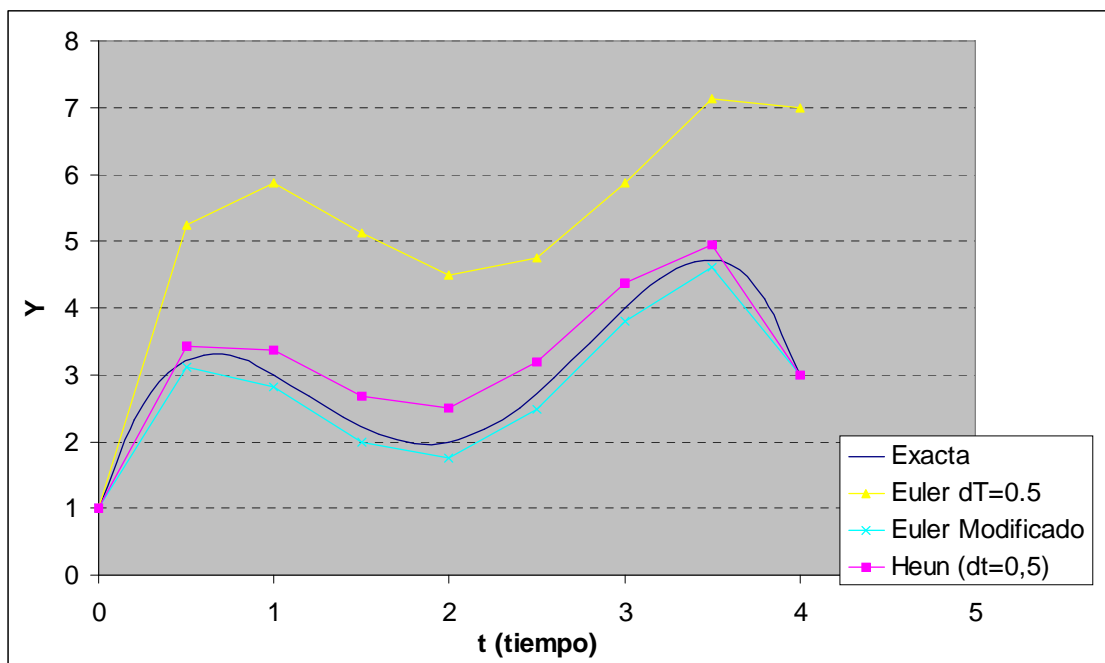


Figura 4.6: Gráfica comparativa de los métodos.

Como podemos ver el método de Heun (H) siempre superestima el valor mientras que el método de Euler Modificado (EM) subestima el valor. Podemos hacer la siguiente aproximación para el valor de y_{i+1} :

$$y_{i+1} = \frac{1}{3}(y_{i+1}^H + 2y_{i+1}^{EM}) \quad (4.26)$$

Utilizando las expresiones (4.20) y (4.25) en la ecuación anterior, obtenemos que:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \frac{1}{3}(y_{i+1}^H + 2y_{i+1}^{EM}) \\ &= \frac{1}{3} \left[y_i + \left(\frac{y_{i+1}'^0 + y_i'}{2} \right) \Delta t + 2 \left(y_i + y_{i+\frac{1}{2}}' \Delta t \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[y_i + \frac{y_{i+1}'^0}{2} \Delta t + \frac{y_i'}{2} \Delta t + 2y_i + 2y_{i+\frac{1}{2}}' \Delta t \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[3y_i + \frac{y_{i+1}'^0}{2} \Delta t + \frac{y_i'}{2} \Delta t + 2y_{i+\frac{1}{2}}' \Delta t \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Resultando que:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{6} \left[y_i' + 4y_{i+\frac{1}{2}}' + y_{i+1}'^0 \right] \quad (4.28)$$

cuya expresión es la conocida como el Método de Integración de Runge-Kutta de tercer orden, y resulta ser una buena aproximación, como se muestra en la Figura 4.7.

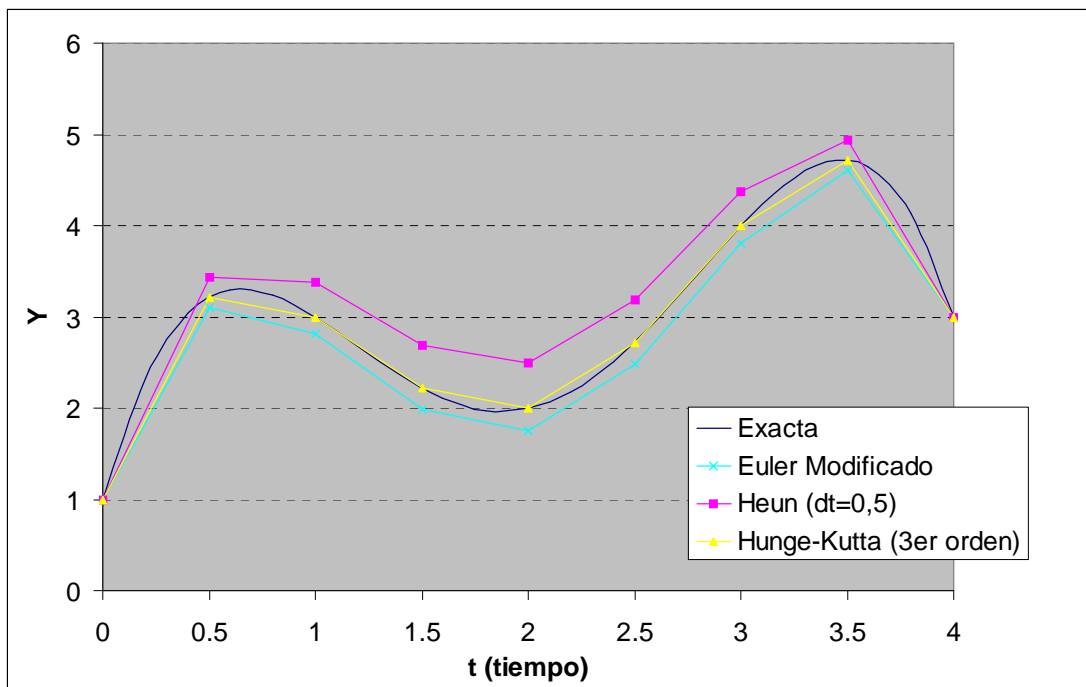


Figura 4.7: Gráfica comparativa de los métodos (Runge-Kutta).

4.5 Caso Transitorio con Múltiples Grados de Libertad

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{F} \quad (4.29)$$

Para el problema térmico \mathbf{C} es la matriz de capacitancia, \mathbf{K} es la matriz de conductividad, y \mathbf{T} es el vector con los valores nodales de la temperatura.

Considerando que:

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}_{t+1} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \quad (4.30)$$

Además aplicando el método alfa:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\alpha &= \alpha \mathbf{T}_{t+1} + (1 - \alpha) \mathbf{T}_t \\ \mathbf{F}_\alpha &= \alpha \mathbf{F}_{t+1} + (1 - \alpha) \mathbf{F}_t \end{aligned} \quad (4.31)$$

Reemplazando (4.30) y (4.31) en la expresión (4.29), obtenemos que:

$$\mathbf{C} \left(\frac{\mathbf{T}_{t+1} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \right) + \mathbf{K} \mathbf{T}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \quad (4.32)$$

$$\mathbf{C} \left(\frac{\mathbf{T}_{t+1} - \mathbf{T}_t}{\Delta t} \right) + \mathbf{K} [\alpha \mathbf{T}_{t+1} + (1 - \alpha) \mathbf{T}_t] = \alpha \mathbf{F}_{t+1} + (1 - \alpha) \mathbf{F}_t \quad (4.33)$$

Resultando que:

$$\left[\frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + \alpha \mathbf{K} \right] \mathbf{T}_{t+1} = \alpha \mathbf{F}_{t+1} + (1 - \alpha) \mathbf{F}_t + \left[\frac{\mathbf{C}}{\Delta t} - (1 - \alpha) \mathbf{K} \right] \mathbf{T}_t \quad (4.34)$$

$$\mathbf{K}^{eff} \mathbf{T}_{t+1} = \mathbf{F}^{eff} \quad (4.35)$$

donde

$$\mathbf{K}^{eff} = \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} + \alpha \mathbf{K} \quad ; \quad \mathbf{F}^{eff} = \alpha \mathbf{F}_{t+1} + (1 - \alpha) \mathbf{F}_t + \left[\frac{\mathbf{C}}{\Delta t} - (1 - \alpha) \mathbf{K} \right] \mathbf{T}_t \quad (4.36)$$

4.6 Análisis Dinámico a través de Integración Numérica

La aproximación más genérica para la solución de la respuesta dinámica en estructuras es la *integración numérica directa* de las ecuaciones de equilibrio dinámico:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4.37)$$

Cuya ecuación debe cumplir para todo tiempo t , luego también es válida en el tiempo $t + \Delta t$:

$$M\ddot{U}_{t+\Delta t} + C\dot{U}_{t+\Delta t} + KU_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} \quad (4.38)$$

donde M es la matriz de masa, C es la matriz de amortiguamiento, K es la matriz de rigidez de la estructura, F es el vector de fuerzas externas, y U , \dot{U} , \ddot{U} son los desplazamientos, velocidades, y aceleraciones, respectivamente. La ausencia de subíndices de paso de tiempo en las matrices M , C , K nos indica un problema lineal, es decir, que estas matrices no dependen de U , \dot{U} , \ddot{U} . En el caso que la estructura presente una no-linealidad del material, la matriz K dependerá del vector desplazamiento U .

Para un sistema sin amortiguamiento ($C = \theta$) la energía se conserva, caracterizando un sistema sin disipación de energía, y la suma de la energía cinética ($\frac{1}{2}\dot{U}^T M \dot{U}$) y de la energía de deformación ($\frac{1}{2}U^T K U$) es constante para todo paso de tiempo:

$$2E = \dot{U}_t^T M \dot{U}_t + U_t^T K U_t = \dot{U}_{t+\Delta t}^T M \dot{U}_{t+\Delta t} + U_{t+\Delta t}^T K U_{t+\Delta t} \quad (4.39)$$

El análisis numérico del sistema dinámico (4.37) en estructural puede resultar no eficiente donde C es el responsable por el amortiguamiento (disipación de energía) de la estructura. Por ello algunos métodos fueron desarrollados con el objetivo de introducir un amortiguamiento numérico (artificial) que en general viene controlado por un parámetro. Por ejemplo, podemos reemplazar la matriz de amortiguamiento C por una combinación lineal del tipo:

$$C = \alpha K + \beta M \quad (4.40)$$

Por esto estudiaremos algunos métodos que aún que explícitamente no presente la matriz C , presentará un amortiguamiento artificial (numérico).

Diversas técnicas numéricas, dentro de la integración numérica directa, han sido desarrolladas para obtener la solución del sistema de ecuaciones (4.38). Podemos clasificar estas técnicas como *Explícitas*, *Implícitas*, o *Mixtas*.

Los métodos Explícitos no necesitan información en el paso de tiempo $t + \Delta t$ para predecir la respuesta en el tiempo $t + \Delta t$, es decir:

$$U_{t+\Delta t} = f(U_t, \dot{U}_t, \ddot{U}_t, \dot{U}_{t-\Delta t}, \dots) \quad (4.41)$$

Estos métodos son *condicionalmente estables* eso implica que el tamaño del incremento de tiempo (Δt) tiene que ser menor que un valor crítico (Δt_{cr}), en caso contrario la solución no es estable, es decir, la solución diverge.

Los métodos Implícitos utilizan información en el paso de tiempo $t + \Delta t$ para predecir la respuesta en el tiempo $t + \Delta t$:

$$U_{t+\Delta t} = f(U_t, \dot{U}_{t+\Delta t}, \ddot{U}_{t+\Delta t}, \dots) \quad (4.42)$$

Con estos métodos es posible utilizar pasos de tiempo mayores que los utilizados en los explícitos. Métodos implícitos pueden ser *incondicionalmente* o *condicionalmente estables*. En general, los métodos que son *incondicionalmente estables* la única limitación para el tamaño del incremento de tiempo es la precisión de la solución.

4.6.1 Familia de Métodos de Newmark

Newmark en 1959 presentó una familia de métodos de integración para la solución de problemas estructurales dinámicos. Para ilustrar los métodos, partiremos del siguiente sistema discreto de ecuaciones:

$$M\ddot{U}_{t+\Delta t} + C\dot{U}_{t+\Delta t} + KU_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} \quad (4.43)$$

Podemos aplicar la serie de Taylor para aproximar las funciones U , \dot{U} :

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t \dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{U}_t + \frac{\Delta t^3}{3!} \dddot{U}_t + \dots \quad (4.44)$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \Delta t \ddot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{2!} \dddot{U}_t + \dots \quad (4.45)$$

Newmark truncó las expresiones anteriores como:

$$U_{t+\Delta t} \approx U_t + \Delta t \dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_t + \beta \Delta t^3 \ddot{U}_t \quad (4.46)$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} \approx \dot{U}_t + \Delta t \ddot{U}_t + \gamma \Delta t^2 \ddot{U}_t \quad (4.47)$$

Asumiendo que la aceleración varía linealmente dentro del intervalo $[t, t + \Delta t]$, podemos aplicar diferencia finita para aproximar \ddot{U}_t :

$$\ddot{U}_t = \frac{\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t}{\Delta t} \quad (4.48)$$

Reemplazando (4.48) en las expresiones (4.47) y (4.46), obtenemos que:

$$\begin{aligned} U_{t+\Delta t} &\approx U_t + \Delta t \dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_t + \beta \Delta t^3 \frac{\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t}{\Delta t} \\ &\approx U_t + \Delta t \dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_t + \beta \Delta t^2 \ddot{U}_{t+\Delta t} - \beta \Delta t^2 \ddot{U}_t \\ &\approx U_t + \Delta t \dot{U}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{U}_t + \beta \Delta t^2 \ddot{U}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{t+\Delta t} &\approx \dot{U}_t + \Delta t \ddot{U}_t + \gamma \Delta t^2 \frac{\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t}{\Delta t} \\ &\approx \dot{U}_t + \Delta t \ddot{U}_t + \gamma \Delta t \ddot{U}_{t+\Delta t} - \gamma \Delta t \ddot{U}_t \\ &\approx \dot{U}_t + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{U}_t + \gamma \Delta t \ddot{U}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Resumiendo así las aproximaciones del campo de desplazamiento y de velocidad para el método de Newmark como:

$\begin{aligned} U_{t+\Delta t} &= U_t + \Delta t \dot{U}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{U}_t + \beta \Delta t^2 \ddot{U}_{t+\Delta t} \\ \dot{U}_{t+\Delta t} &= \dot{U}_t + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{U}_t + \gamma \Delta t \ddot{U}_{t+\Delta t} \\ M\ddot{U}_{t+\Delta t} + C\dot{U}_{t+\Delta t} + KU_{t+\Delta t} &= F_{t+\Delta t} \end{aligned}$	<p><i>Método de Newmark</i> (4.51)</p>
--	---

Este método es incondicionalmente estable cuando:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (4.52)$$

Despejamos $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ a partir del campo de desplazamiento dado por (4.51), obteniendo que:

$$\begin{aligned} \beta\Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t - \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_t \\ \Rightarrow \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{U}}_t \end{aligned} \quad (4.53)$$

Reemplazando (4.53) en la expresión de la velocidad dada por (4.51) resultando que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{U}}_t + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t + \gamma\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \\ &= \dot{\mathbf{U}}_t + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t + \gamma\Delta t \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{U}}_t \right] \\ &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{U}}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t \end{aligned} \quad (4.54)$$

Resumiendo

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{U}}_t \\ \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{U}}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t \end{cases} \quad (4.55)$$

Reemplazando las expresiones dadas por (4.55) en la expresión (4.43) obtenemos que:

$$\mathbf{K}^{eff} \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{eff} \quad (4.56)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{eff} &= \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right] \\ \mathbf{F}^{eff} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \left[\frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{U}_t + \left[\frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t} - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{U}}_t - \left[\left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \mathbf{M} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \mathbf{C} \right] \ddot{\mathbf{U}}_t \end{aligned} \quad (4.57)$$

También podemos expresar las relaciones anteriores como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{eff} &= [b_1 \mathbf{M} + b_4 \mathbf{C} + \mathbf{K}] \\ \mathbf{F}^{eff} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{M} [b_1 \mathbf{U}_t - b_2 \dot{\mathbf{U}}_t - b_3 \ddot{\mathbf{U}}_t] + \mathbf{C} [b_4 \mathbf{U}_t - b_5 \dot{\mathbf{U}}_t - b_6 \ddot{\mathbf{U}}_t] \end{aligned} \quad (4.58)$$

donde

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\beta\Delta t^2} \quad ; \quad b_2 = -\frac{1}{\beta\Delta t} \quad ; \quad b_3 = 1 - \frac{1}{2\beta} \\ b_4 &= \gamma\Delta t b_1 \quad ; \quad b_5 = 1 + \gamma\Delta t b_2 \quad ; \quad b_6 = \Delta t [1 - \gamma + \gamma b_3] \end{aligned} \quad (4.59)$$

Los campos de velocidad y de desplazamiento también puede ser expresados en función de los parámetros (4.59) como:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = b_1(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) + b_2\dot{\mathbf{U}}_t + b_3\ddot{\mathbf{U}}_t \\ \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = b_4(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) + b_5\dot{\mathbf{U}}_t + b_6\ddot{\mathbf{U}}_t \end{cases} \quad (4.60)$$

A continuación aplicaremos la misma metodología para resolver el siguiente sistema:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} \quad (4.61)$$

Dado el campo $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ y su aproximación a través de la serie de Taylor (4.44), donde truncamos en el término de segundo orden:

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta t\dot{\mathbf{U}}_t + \alpha\Delta t^2\ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.62)$$

Considerando la siguiente aproximación para $\ddot{\mathbf{U}}_t$:

$$\ddot{\mathbf{U}}_t = \frac{\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{U}}_t}{\Delta t} \quad (4.63)$$

Con lo cual el vector $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta t\dot{\mathbf{U}}_t + \alpha\Delta t^2 \frac{\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{U}}_t}{\Delta t} \quad (4.64)$$

Pudiendo así expresar $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ como:

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t}(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) + \frac{1}{\alpha}(\alpha-1)\dot{\mathbf{U}}_t \quad (4.65)$$

Reemplazando (4.65) en la expresión (4.61) obtenemos que:

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}\left[\frac{1}{\alpha\Delta t}(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) + \frac{1}{\alpha}(\alpha-1)\dot{\mathbf{U}}_t\right] + \mathbf{K}\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} \\ \Rightarrow & \left[\frac{1}{\alpha\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\left[\frac{1}{\alpha\Delta t}\mathbf{U}_t - \frac{1}{\alpha}(\alpha-1)\dot{\mathbf{U}}_t\right] \\ \Rightarrow & \left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} + \alpha\mathbf{K}\right]\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \alpha\mathbf{F}_{t+\Delta t} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}\mathbf{U}_t + (1-\alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_t \end{aligned} \quad (4.66)$$

Podemos expresar $\dot{\mathbf{U}}_t$ a través de la siguiente expresión:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{K}\mathbf{U}_t = \mathbf{F}_t \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{U}}_t = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{F}_t - \mathbf{K}\mathbf{U}_t) \quad (4.67)$$

Reemplazando (4.67) en (4.66) resulta:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} + \alpha\mathbf{K}\right]\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \alpha\mathbf{F}_{t+\Delta t} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}\mathbf{U}_t + (1-\alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_t \\ \Rightarrow & \left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} + \alpha\mathbf{K}\right]\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \alpha\mathbf{F}_{t+\Delta t} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}\mathbf{U}_t + (1-\alpha)\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{F}_t - \mathbf{K}\mathbf{U}_t) \\ \Rightarrow & \left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} + \alpha\mathbf{K}\right]\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \alpha\mathbf{F}_{t+\Delta t} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}\mathbf{U}_t + (1-\alpha)\mathbf{F}_t - (1-\alpha)\mathbf{K}\mathbf{U}_t \\ \Rightarrow & \left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} + \alpha\mathbf{K}\right]\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \alpha\mathbf{F}_{t+\Delta t} + (1-\alpha)\mathbf{F}_t + \left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} - (1-\alpha)\mathbf{K}\right]\mathbf{U}_t \end{aligned} \quad (4.68)$$

o aun:

$$\mathbf{K}^{eff} \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{eff} \quad (4.69)$$

donde

$$\mathbf{K}^{eff} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \alpha \mathbf{K} \quad (4.70)$$
$$\mathbf{F}^{eff} = \alpha \mathbf{F}_{t+\Delta t} + (1 - \alpha) \mathbf{F}_t + \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} - (1 - \alpha) \mathbf{K} \right] \mathbf{U}_t$$

Verificamos que la expresión (4.69) es la misma expresión obtenida a través del método alfa empleado para el problema transitorio de temperatura, ver expresión (4.34).

4.6.1.1 Esquema de Newmark para la Integración Directa

I. Parámetros Iniciales

I.1. Construimos las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} .

I.2. Obtenemos los parámetros:

$$b_1 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \quad ; \quad b_2 = -\frac{1}{\beta \Delta t} \quad ; \quad b_3 = 1 - \frac{1}{2\beta}$$

$$b_4 = \gamma \Delta t b_1 \quad ; \quad b_5 = 1 + \gamma \Delta t b_2 \quad ; \quad b_6 = \Delta t [1 - \gamma + \gamma b_3]$$

I.3. Construimos la matriz \mathbf{K}^{eff} :

$$\mathbf{K}^{eff} = [b_1 \mathbf{M} + b_4 \mathbf{C} + \mathbf{K}]$$

I.4. Dadas las condiciones iniciales \mathbf{U}_0 , $\dot{\mathbf{U}}_0$, obtenemos $\ddot{\mathbf{U}}_0$:

$$\ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{F}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{K} \mathbf{U}_0]$$

I.5. Actualizamos las variables:

$$\mathbf{U}_t \leftarrow \mathbf{U}_0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{U}}_0 \quad ; \quad \ddot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{U}}_0$$

II. Para cada Paso de Tiempo $t + \Delta t$

II.1. Obtenemos el vector de fuerzas efectivo:

$$\mathbf{F}^{eff} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{M} [b_1 \mathbf{U}_t - b_2 \dot{\mathbf{U}}_t - b_3 \ddot{\mathbf{U}}_t] + \mathbf{C} [b_4 \mathbf{U}_t - b_5 \dot{\mathbf{U}}_t - b_6 \ddot{\mathbf{U}}_t]$$

II.2. Resolvemos el sistema:

$$\mathbf{K}^{eff} \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{eff}$$

II.3. Calculamos los vectores $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$, $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = b_1 (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) + b_2 \dot{\mathbf{U}}_t + b_3 \ddot{\mathbf{U}}_t \\ \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = b_4 (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) + b_5 \dot{\mathbf{U}}_t + b_6 \ddot{\mathbf{U}}_t \end{cases}$$

II.4. Actualizamos las variables:

$$\mathbf{U}_t \leftarrow \mathbf{U}_{t+\Delta t} \quad ; \quad \dot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \quad ; \quad \ddot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$$

$$\text{Si es el caso } \mathbf{F}_{t+\Delta t} \leftarrow \mathbf{F}(t + \Delta t, \mathbf{U}_{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}, \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}, \dots)$$

Ir al paso II.1 con $t + \Delta t$.

Subrutina para la integración directa utilizando el método de Newmark para un grado de libertad (FORTRAN):

[Subroutine Newmar1](#)

4.6.2 Método de la Aceleración Media

El método de la aceleración media es idéntico a la regla del trapecio, ver Figura 4.8, donde tomamos como aproximación para el campo de aceleración como el promedio de los valores extremos:

$$\ddot{U}_{t+\tau}(\tau) = \frac{\ddot{U}_t + \ddot{U}_{t+\Delta t}}{2} \quad ; \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t \quad (4.71)$$

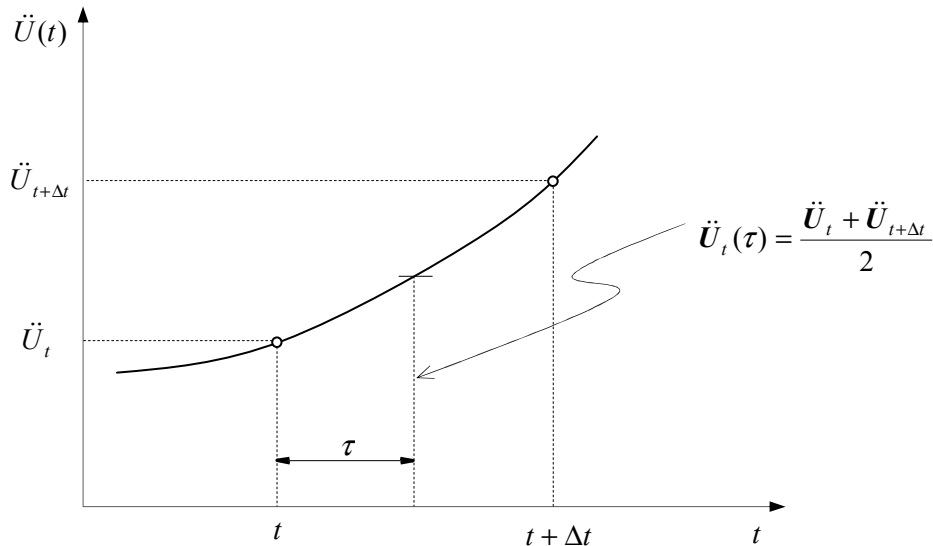


Figura 4.8: Aceleración media.

Integrando la expresión (4.71) hallamos el siguiente campo de velocidad:

$$\dot{U}_{t+\tau}(\tau) = \tau \left(\frac{\ddot{U}_t + \ddot{U}_{t+\Delta t}}{2} \right) + C_1 = \dot{U}_t + \tau \left(\frac{\ddot{U}_t + \ddot{U}_{t+\Delta t}}{2} \right) \quad (4.72)$$

donde la constante de integración fue obtenida a través de la siguiente condición inicial, $\dot{U}_{t+\tau}(\tau=0) = \dot{U}_t \Rightarrow C_1 = \dot{U}_t$. Para obtener el campo de desplazamiento integramos la expresión (4.72), obteniendo así que:

$$U_{t+\tau}(\tau) = \tau \dot{U}_t + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\ddot{U}_t + \ddot{U}_{t+\Delta t}}{2} \right) + C_2 = U_t + \tau \dot{U}_t + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\ddot{U}_t + \ddot{U}_{t+\Delta t}}{2} \right) \quad (4.73)$$

Una vez más aplicamos las condiciones iniciales para obtener la constante de integración $U_{t+\tau}(\tau=0) = U_t \Rightarrow C_2 = U_t$.

Haciendo $\tau = \Delta t$ los campos de desplazamiento y de velocidad vienen dados por:

$$\begin{aligned} U_{t+\Delta t} &= U_t + \Delta t \dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{U}_{t+\Delta t} \\ \dot{U}_{t+\Delta t} &= \dot{U}_t + \frac{\Delta t}{2} \ddot{U}_t + \frac{\Delta t}{2} \ddot{U}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Las expresiones dadas por (4.74) son las mismas dadas para el método de Newmark con los valores de $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$, ver expresiones (4.49) y (4.50).

A través de las expresiones (4.74) obtenemos los valores $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ y $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ en función de $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ y de los valores actuales: \mathbf{U}_t , $\dot{\mathbf{U}}_t$, $\ddot{\mathbf{U}}_t$. El campo de desplazamiento dado por (4.74) nos permite obtener $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ como

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_t - \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.75)$$

A su vez reemplazamos (4.75) en el campo de velocidades dado por (4.74), resultando:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t}{2}\left[\frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_t - \ddot{\mathbf{U}}_t\right] \\ &= \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \dot{\mathbf{U}}_t \end{aligned} \quad (4.76)$$

Reemplazamos el campo de velocidad (4.76) y el campo de aceleración (4.75) en la ecuación de equilibrio dinámico en el tiempo $t + \Delta t$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} \\ \mathbf{M}\left\{\frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_t - \ddot{\mathbf{U}}_t\right\} + \mathbf{C}\left\{\frac{2}{\Delta t}(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \dot{\mathbf{U}}_t\right\} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Reestructurando

$$\left[\frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \left[\frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C}\right]\mathbf{U}_t + \left[\frac{4}{\Delta t}\mathbf{M} + \mathbf{C}\right]\dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.78)$$

O aún

$$\mathbf{K}^{eff}\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{eff} \quad (4.79)$$

donde hemos considerado que:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{eff} &= \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K} \\ \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{eff} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \left[\frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C}\right]\mathbf{U}_t + \left[\frac{4}{\Delta t}\mathbf{M} + \mathbf{C}\right]\dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_t \end{aligned} \quad (4.80)$$

4.6.2.1 Esquema de la Aceleración Media para la Integración Directa

I. Parámetros Iniciales

I.1. Construimos las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} .

I.2. Dadas las condiciones iniciales \mathbf{U}_0 , $\dot{\mathbf{U}}_0$, obtenemos $\ddot{\mathbf{U}}_0$:

$$\ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{U}_0)$$

I.3. Construimos la matriz \mathbf{K}^{eff} :

$$\mathbf{K}^{eff} = \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}$$

I.4. Actualizamos las variables:

$$\mathbf{U}_t \leftarrow \mathbf{U}_0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{U}}_0 \quad ; \quad \ddot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{U}}_0$$

II. Para cada Paso de Tiempo $t + \Delta t$

II.1. Obtenemos el vector de fuerzas efectivo:

$$\mathbf{F}^{eff} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \left[\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{U}_t + \left[\frac{4}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_t$$

II.2. Resolvemos el sistema:

$$\mathbf{K}^{eff} \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{eff}$$

II.3. Calculamos los vectores $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$, $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \dot{\mathbf{U}}_t \\ \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} [\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{U}}_t] - \ddot{\mathbf{U}}_t \end{cases}$$

II.4. Actualizamos las variables:

$$\mathbf{U}_t \leftarrow \mathbf{U}_{t+\Delta t} \quad ; \quad \dot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \quad ; \quad \ddot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$$

$$\text{Si es el caso } \mathbf{F}_{t+\Delta t} \leftarrow \mathbf{F}(t + \Delta t, \mathbf{U}_{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}, \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}, \dots)$$

Ir al paso II.1 con $t + \Delta t$.

Subrutina para la integración directa utilizando el método de la aceleración media para un grado de libertad (FORTRAN):

[Subroutine Trapecio](#)

4.6.3 Método de la Aceleración Lineal

En este método consideramos una variación lineal para el campo de aceleración en el intervalo $[t, t + \Delta t]$, ver Figura 4.9:

$$\ddot{U}_{t+\tau}(\tau) = \ddot{U}_t + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t) \quad (4.81)$$

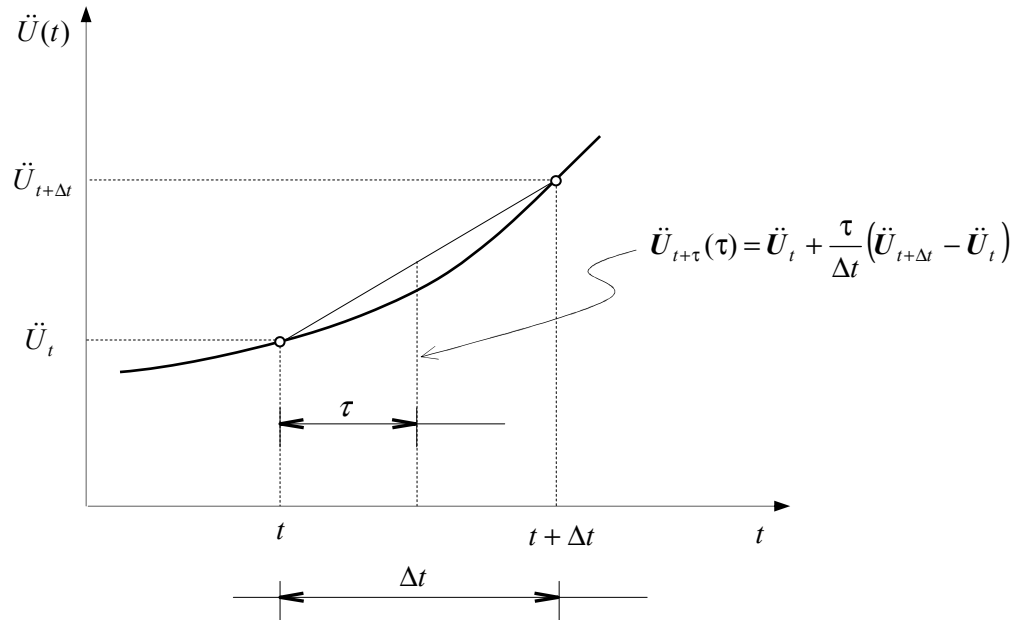


Figura 4.9: Método de la aceleración lineal.

El campo de velocidad se obtiene al integrar la expresión (4.81), resultando:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{t+\tau}(\tau) &= \tau \ddot{U}_t + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t) + C_1 \\ &= \dot{U}_t + \tau \ddot{U}_t + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t) \end{aligned} \quad (4.82)$$

donde hemos aplicado la condición inicial para obtener la constante de integración, es decir, en $\tau = 0$ tenemos que $\dot{U}_{t+\tau}(\tau = 0) = \dot{U}_t \Rightarrow C_1 = \dot{U}_t$.

Integrando ahora la expresión (4.82) obtenemos el campo de desplazamiento:

$$\begin{aligned} U_{t+\tau}(\tau) &= \tau \dot{U}_t + \frac{\tau^2}{2} \ddot{U}_t + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t) + C_2 \quad \because U_{t+\tau}(\tau = 0) = U_t \Rightarrow C_2 = U_t \\ &= U_t + \tau \dot{U}_t + \frac{\tau^2}{2} \ddot{U}_t + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t) \end{aligned} \quad (4.83)$$

Haciendo $\tau = \Delta t$ obtenemos que:

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t \dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{6}(\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t) \quad (4.84)$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \Delta t \ddot{U}_t + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{U}_{t+\Delta t} - \ddot{U}_t) = \dot{U}_t + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{U}_{t+\Delta t} + \ddot{U}_t) \quad (4.85)$$

A través de la expresión (4.84) despejamos $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{6}{\Delta t^2} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{6}{\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t - 2\ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.86)$$

A su vez sustituimos (4.86) en (4.85) obteniendo así que:

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{3}{\Delta t} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - 2\dot{\mathbf{U}}_t - \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.87)$$

Reemplazamos entonces el campo de velocidad (4.87) y el campo de aceleración (4.86) en la ecuación de equilibrio dinámico, resultando que:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} \\ \mathbf{M} \left\{ \frac{6}{\Delta t^2} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{6}{\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t - 2\ddot{\mathbf{U}}_t \right\} \\ &+ \mathbf{C} \left\{ \frac{3}{\Delta t} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - 2\dot{\mathbf{U}}_t - \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{U}}_t \right\} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Reestructurando la expresión anterior del tal manera que:

$$\mathbf{K}^{eff} \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{eff} \quad (4.89)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{eff} &= \frac{6}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \\ \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{eff} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \left[\frac{6}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{U}_t + \left[\frac{6}{\Delta t} \mathbf{M} + 2\mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{U}}_t + \left[2\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right] \ddot{\mathbf{U}}_t \end{aligned} \quad (4.90)$$

El método de la aceleración lineal coincide con el de método de Newmark cuando $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{6}$. Verificamos este hecho al reemplazar los valores de $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{6}$ en las expresiones (4.51), obteniendo así los campos de velocidad y desplazamiento:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{1}{6} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{3} \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{6} \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \\ \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{U}}_t + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\mathbf{U}}_t + \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}] \end{aligned} \quad (4.91)$$

que coinciden con las expresiones obtenidas para el método de la aceleración lineal, ver expresiones (4.84) y (4.85).

4.6.3.1 Esquema de la Aceleración Lineal para la Integración Directa

I. Parámetros Iniciales

I.1. Construimos las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} .

I.2. Dadas las condiciones iniciales \mathbf{U}_0 , $\dot{\mathbf{U}}_0$, obtenemos $\ddot{\mathbf{U}}_0$:

$$\ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{U}_0)$$

I.3. Construimos la matriz \mathbf{K}^{eff} :

$$\mathbf{K}^{eff} = \frac{6}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}$$

I.4. Actualizamos las variables:

$$\mathbf{U}_t \leftarrow \mathbf{U}_0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{U}}_0 \quad ; \quad \ddot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{U}}_0$$

II. Para cada Paso de Tiempo $t + \Delta t$

II.1. Obtenemos el vector de fuerzas efectivo:

$$\mathbf{F}^{eff} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \left[\frac{6}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{U}_t + \left[\frac{6}{\Delta t} \mathbf{M} + 2\mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{U}}_t + \left[2\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right] \ddot{\mathbf{U}}_t$$

II.2. Resolvemos el sistema:

$$\mathbf{K}^{eff} \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{eff}$$

II.3. Calculamos los vectores $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$, $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{6}{\Delta t^2} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{6}{\Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t - 2\ddot{\mathbf{U}}_t \\ \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{U}}_t) \end{cases}$$

II.4. Actualizamos las variables:

$$\mathbf{U}_t \leftarrow \mathbf{U}_{t+\Delta t} \quad ; \quad \dot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \quad ; \quad \ddot{\mathbf{U}}_t \leftarrow \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$$

Si es el caso $\mathbf{F}_{t+\Delta t} \leftarrow \mathbf{F}(t + \Delta t, \mathbf{U}_{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}, \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}, \dots)$

Ir al paso II.1 con $t + \Delta t$.

Subrutina para la integración directa utilizando el método de la aceleración lineal para un grado de libertad (FORTRAN):

[Subroutine ACELIN](#)

4.6.4 Método de la Diferencia Finita Centrada

Este método explícito asume que los campos de velocidad y de aceleración vienen dados por el método de la diferencia finita centrada para aproximar la primera y segunda derivada:

$$\begin{aligned}\dot{U}_t &= \frac{U_{t+\Delta t} - U_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \\ \ddot{U}_t &= \frac{U_{t+\Delta t} - 2U_t + U_{t-\Delta t}}{\Delta t^2}\end{aligned}\quad (4.92)$$

Reemplazando las expresiones (4.92) en la ecuación de equilibrio dinámico en el tiempo t , $M\ddot{U}_t + C\dot{U}_t + KU_t = F_t$, resulta que:

$$\begin{aligned}M \frac{U_{t+\Delta t} - 2U_t + U_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} + C \frac{U_{t+\Delta t} - U_{t-\Delta t}}{2\Delta t} + KU_t &= F_t \\ \Rightarrow \left[\frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \right] U_{t+\Delta t} &= F_t + \left(\frac{2M}{\Delta t^2} - K \right) U_t + \left(\frac{C}{2\Delta t} - \frac{M}{\Delta t^2} \right) U_{t-\Delta t} \\ \Rightarrow K^{eff} U_{t+\Delta t} &= F^{eff}\end{aligned}\quad (4.93)$$

donde

$$\begin{aligned}K^{eff} &= \frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \\ F^{eff} &= F_t + \left(\frac{2M}{\Delta t^2} - K \right) U_t + \left(\frac{C}{2\Delta t} - \frac{M}{\Delta t^2} \right) U_{t-\Delta t}\end{aligned}\quad (4.94)$$

En el tiempo $t=0$ tenemos que calcular $U_{0-\Delta t}$, cuyo valor se obtiene a través de las expresiones (4.92):

$$\begin{aligned}\dot{U}_0 &= \frac{U_{0+\Delta t} - U_{0-\Delta t}}{2\Delta t} \quad \Rightarrow \quad U_{0+\Delta t} = 2\Delta t \dot{U}_0 + U_{0-\Delta t} \\ \ddot{U}_0 &= \frac{U_{0+\Delta t} - 2U_0 + U_{0-\Delta t}}{\Delta t^2} \quad \Rightarrow \quad U_{0+\Delta t} = \Delta t^2 \ddot{U}_0 + 2U_0 - U_{0-\Delta t}\end{aligned}\quad (4.95)$$

A continuación igualamos las expresiones anteriores resultando que:

$$\begin{aligned}\Delta t^2 \ddot{U}_0 + 2U_0 - U_{0-\Delta t} &= 2\Delta t \dot{U}_0 + U_{0-\Delta t} \\ \Rightarrow 2U_{0-\Delta t} &= \Delta t^2 \ddot{U}_0 + 2U_0 - 2\Delta t \dot{U}_0 \\ \Rightarrow U_{0-\Delta t} &= U_0 - \Delta t \dot{U}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_0\end{aligned}\quad (4.96)$$

4.6.4.1 Esquema de Diferencia Finita Centrada para la Integración Directa

I. Parámetros Iniciales

I.1. Construimos las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} .

I.2. Dadas las condiciones iniciales \mathbf{U}_0 , $\dot{\mathbf{U}}_0$, obtenemos $\ddot{\mathbf{U}}_0$:

$$\ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{U}_0)$$

I.3. Construimos la matriz \mathbf{K}^{eff} :

$$\mathbf{K}^{eff} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t}$$

I.4. Calculamos $\mathbf{U}_{0-\Delta t}$:

$$\mathbf{U}_{0-\Delta t} = \mathbf{U}_0 - \Delta t\dot{\mathbf{U}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{U}}_0$$

I.4. Actualizamos las variables:

$$\mathbf{U}_{t-\Delta t} \leftarrow \mathbf{U}_{0-\Delta t} \quad ; \quad \mathbf{U}_t \leftarrow \mathbf{U}_0 \quad ; \quad \mathbf{F}_t = \mathbf{F}_0$$

II. Para cada Paso de Tiempo t

II.1. Obtenemos el vector de fuerzas efectivo:

$$\mathbf{F}^{eff} = \mathbf{F}_t + \left(\frac{2\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \mathbf{K}\right)\mathbf{U}_t + \left(\frac{\mathbf{C}}{2\Delta t} - \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2}\right)\mathbf{U}_{t-\Delta t}$$

II.2. Resolvemos el sistema:

$$\mathbf{K}^{eff}\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{eff}$$

II.3. Calculamos los vectores $\dot{\mathbf{U}}_t$, $\ddot{\mathbf{U}}_t$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_t = \frac{\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{U}}_t = \frac{\mathbf{U}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{U}_t + \mathbf{U}_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \end{cases}$$

II.4. Actualizamos las variables:

$$\mathbf{U}_{t-\Delta t} \leftarrow \mathbf{U}_t \quad ; \quad \mathbf{U}_t \leftarrow \mathbf{U}_{t+\Delta t}$$

$$\text{Si es el caso } \mathbf{F}_{t+\Delta t} \leftarrow \mathbf{F}(t + \Delta t, \mathbf{U}_{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}, \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}, \dots)$$

Ir al paso II.1 con $t + \Delta t$.

Subrutina para la integración directa utilizando el método de la diferencia finita centrada para un grado de libertad (FORTRAN):

[Subroutine Centrada](#)

El método de la diferencia finita centrada es un método de integración explícito y condicionalmente estable y requiere que el paso de tiempo Δt sea menor que el valor crítico:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_{\min}}{\pi} = \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (4.97)$$

donde T_{\min} es el menor periodo natural y ω_{\max} es la máxima frecuencia del sistema discreto, siendo el mayor autovalor del determinante característico:

$$|\mathbf{K} + \omega^2 \mathbf{M}| = |\mathbf{K} + \lambda \mathbf{M}| = 0 \quad (4.98)$$

Los métodos de integración explícito no necesitan de la factorización de la matriz de rigidez efectiva (\mathbf{K}^{eff}) mientras que los métodos de integración implícitos sí que lo necesitan.

4.6.5 Método del Factor θ de Wilson

El método del factor θ de Wilson (1968) es una extensión del método de la aceleración lineal (método de Newmark con $\gamma = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{6}$). Aproximamos el campo de aceleración en el intervalo $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$, ver Figura 4.10, donde $\theta \geq 1$. Cuando $\theta = 1$ recaemos en el método de la aceleración lineal.

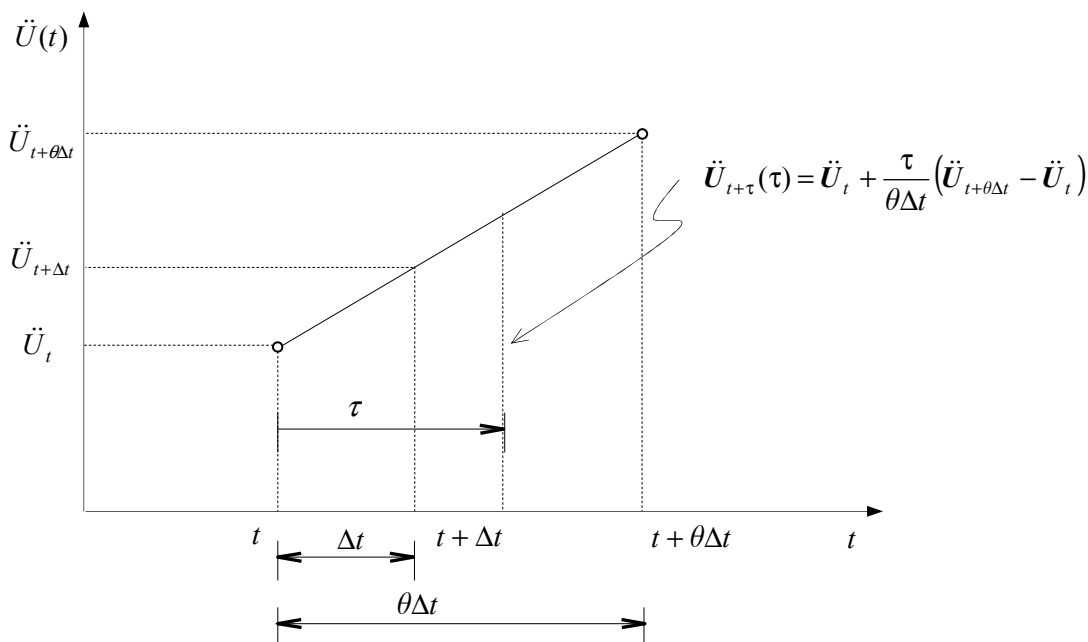


Figura 4.10: Aproximación de la aceleración - Método del factor θ de Wilson.

A través de la Figura 4.10 el campo de aceleración queda:

$$\ddot{U}_{t+\tau}(\tau) = \ddot{U}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t} (\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t) \quad (4.99)$$

Integrando la expresión anterior obtenemos el siguiente campo de velocidades:

$$\dot{U}_{t+\tau}(\tau) = \dot{U}_t + \tau \ddot{U}_t + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t) \quad (4.100)$$

Integrando el campo de velocidad (4.100) obtenemos el siguiente campo de desplazamiento:

$$U_{t+\tau}(\tau) = U_t + \tau \dot{U}_t + \frac{\tau^2}{2} \ddot{U}_t + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t} (\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t) \quad (4.101)$$

Considerando que $\tau = \theta\Delta t$ el campo de velocidad queda:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{t+\theta\Delta t} &= \dot{U}_t + \theta\Delta t \ddot{U}_t + \frac{(\theta\Delta t)^2}{2\theta\Delta t} (\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t) \\ &= \dot{U}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} (\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{U}_t) \end{aligned} \quad (4.102)$$

y el campo de desplazamiento:

$$\begin{aligned} U_{t+\theta\Delta t} &= U_t + \theta\Delta t \dot{U}_t + \frac{(\theta\Delta t)^2}{2} \ddot{U}_t + \frac{(\theta\Delta t)^3}{6\theta\Delta t} (\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t) \\ &= U_t + \theta\Delta t \dot{U}_t + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6} (\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{U}_t) \end{aligned} \quad (4.103)$$

A continuación despejamos $\ddot{U}_{t+\theta\Delta t}$ de la expresión anterior:

$$\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} (U_{t+\theta\Delta t} - U_t) - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{U}_t - 2\ddot{U}_t \quad (4.104)$$

A continuación reemplazamos (4.104) en la expresión de la velocidad (4.102) resultando:

$$\dot{U}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t} (U_{t+\theta\Delta t} - U_t) - 2\dot{U}_t - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{U}_t \quad (4.105)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de equilibrio dinámico en $t + \theta\Delta t$:

$$M\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} + C\dot{U}_{t+\theta\Delta t} + KU_{t+\theta\Delta t} = \hat{F}_{t+\theta\Delta t} \quad (4.106)$$

donde $\hat{F}_{t+\theta\Delta t} = \theta F_{t+\theta\Delta t} + (1-\theta)F_t$, y reemplazando los valores de $\dot{U}_{t+\theta\Delta t}$ y $\ddot{U}_{t+\theta\Delta t}$ dados por (4.105) y (4.104) respectivamente, podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$K^{eff} U_{t+\theta\Delta t} = F^{eff} \quad (4.107)$$

donde

$$\begin{aligned} K^{eff} &= \frac{6M}{\theta^2\Delta t^2} + \frac{3C}{\theta\Delta t} + K \\ F^{eff} &= \theta F_{t+\theta\Delta t} + (1-\theta)F_t + \left(\frac{6M}{\theta^2\Delta t^2} + \frac{3C}{\theta\Delta t}\right)U_t + \left(\frac{6M}{\theta\Delta t} + 2C\right)\dot{U}_t + \left(2M + \frac{\theta\Delta t}{2}C\right)\ddot{U}_t \end{aligned} \quad (4.108)$$

Tras la resolución del sistema (4.107) obtenemos $U_{t+\theta\Delta t}$ nos permitiendo calcular $U_{t+\Delta t}$, $\dot{U}_{t+\Delta t}$ y $\ddot{U}_{t+\Delta t}$. Para ello, consideremos la expresión (4.99) con $\tau = \Delta t$ resultando:

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \ddot{U}_t + \frac{1}{\theta} (\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t) \quad (4.109)$$

Reemplazando la expresión de $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t}$ dado por (4.104) obtenemos que:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{1}{\theta}(\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t) \\ &= \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{1}{\theta} \left[\frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (\mathbf{U}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t - 2\ddot{\mathbf{U}}_t - \ddot{\mathbf{U}}_t \right] \\ &= \frac{6}{\theta^3 \Delta t^2} (\mathbf{U}_{t+\theta\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{6}{\theta^2 \Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t + \left(1 - \frac{3}{\theta}\right) \ddot{\mathbf{U}}_t\end{aligned}\quad (4.110)$$

Para obtener $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ utilizamos la ecuación (4.100) con $\tau = \Delta t$, resultando:

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t}{2\theta} (\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t) \quad (4.111)$$

Según expresión (4.109) podemos sacar que $\frac{1}{\theta}(\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t) = \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t$ y al reemplazarlo en la expresión anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t) \\ &= \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{U}}_t)\end{aligned}\quad (4.112)$$

Para obtener el desplazamiento $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$ hacemos que $\tau = \Delta t$ en la expresión (4.101), resultando que:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{6\theta} (\ddot{\mathbf{U}}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t) \\ &= \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_t) \\ &= \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{U}}_t)\end{aligned}\quad (4.113)$$

4.6.5.1 Esquema del Factor θ de Wilson para la Integración Directa

I. Parámetros Iniciales

I.1. Construimos las matrices M , C , K .

I.2. Dadas las condiciones iniciales U_0 , \dot{U}_0 , obtenemos \ddot{U}_0 :

$$\ddot{U}_0 = M^{-1}(F_0 - C\dot{U}_0 - KU_0)$$

I.3. Calculamos la matriz K^{eff} :

$$K^{eff} = \frac{6M}{\theta^2 \Delta t^2} + \frac{3C}{\theta \Delta t} + K$$

I.4. Actualizamos las variables:

$$U_t \leftarrow U_0 \quad ; \quad \dot{U}_t \leftarrow \dot{U}_0 \quad ; \quad \ddot{U}_t \leftarrow \ddot{U}_0$$

II. Para cada Paso de Tiempo $t + \Delta t$

II.1. Obtenemos el vector de fuerzas efectivo:

$$F^{eff} = \theta F_{t+\theta\Delta t} + (1-\theta)F_t + \left(\frac{6M}{\theta^2 \Delta t^2} + \frac{3C}{\theta \Delta t}\right)U_t + \left(\frac{6M}{\theta \Delta t} + 2C\right)\dot{U}_t + \left(2M + \frac{\theta \Delta t}{2}C\right)\ddot{U}_t$$

II.2. Resolvemos el sistema:

$$K^{eff} U_{t+\theta\Delta t} = F^{eff}$$

II.3. Calculamos los vectores $\ddot{U}_{t+\Delta t}$, $\dot{U}_{t+\Delta t}$ y $U_{t+\Delta t}$:

$$\begin{cases} \ddot{U}_{t+\Delta t} = \frac{6}{\theta^3 \Delta t^2} (U_{t+\theta\Delta t} - U_t) - \frac{6}{\theta^2 \Delta t} \dot{U}_t + \left(1 - \frac{3}{\theta}\right) \ddot{U}_t \\ \dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{U}_{t+\Delta t} + \ddot{U}_t) \\ U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t \dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{U}_{t+\Delta t} + 2\ddot{U}_t) \end{cases}$$

II.4. Actualizamos las variables:

$$U_t \leftarrow U_{t+\Delta t} \quad ; \quad \dot{U}_t \leftarrow \dot{U}_{t+\Delta t} \quad ; \quad \ddot{U}_t \leftarrow \ddot{U}_{t+\Delta t}$$

$$\text{Si es el caso } F_{t+\theta\Delta t} \leftarrow F(t + \theta\Delta t, U_{t+\theta\Delta t}, \dot{U}_{t+\theta\Delta t}, \ddot{U}_{t+\theta\Delta t}, \dots)$$

Ir al paso II.1 con $t + \Delta t$.

4.6.6 Método de Houbolt

El método de Houbolt(1950) es un método mixto, y consiste en aproximar el campo de desplazamientos por una función cúbica en el tiempo que va de $t - 2\Delta t$ hasta $t + \Delta t$, según la siguiente función:

$$U_{t+\tau}(\tau) = a\tau^3 + b\tau^2 + c\tau + d \quad (4.114)$$

donde los coeficientes a , b , c y d vienen dados por:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{6\Delta t^3} [-U_{t-2\Delta t} + 3U_{t-\Delta t} - 3U_t + U_{t+\Delta t}] \\ b &= \frac{1}{2\Delta t^2} [U_{t-\Delta t} - 2U_t + U_{t+\Delta t}] \\ c &= \frac{1}{6\Delta t} [U_{t-2\Delta t} - 6U_{t-\Delta t} + 3U_t + 2U_{t+\Delta t}] \\ d &= U_t \end{aligned} \quad (4.115)$$

La primera y segunda derivada de (4.114) vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{t+\tau}(\tau) &= 3a\tau^2 + 2b\tau + c \\ \ddot{U}_{t+\tau}(\tau) &= 6a\tau + 2b \end{aligned} \quad (4.116)$$

Haciendo $\tau = \Delta t$ obtenemos que:

$$\begin{cases} \dot{U}_{t+\Delta t} = 3a\Delta t^2 + 2b\Delta t + c \\ \ddot{U}_{t+\Delta t} = 6a\Delta t + 2b \end{cases} \quad (4.117)$$

Reemplazando los valores de a , b y c dados por (4.115) en las expresiones de (4.117) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{6\Delta t} [11U_{t+\Delta t} - 18U_t + 9U_{t-\Delta t} - 2U_{t-2\Delta t}] \\ \ddot{U}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t^2} [2U_{t+\Delta t} - 5U_t + 4U_{t-\Delta t} - U_{t-2\Delta t}] \end{aligned} \quad (4.118)$$

NOTA: Este método es incondicionalmente estable pero proporciona amortiguamiento artificial (amortiguamiento numérico) que es muy alto para una respuesta de baja frecuencia.

Considerando la ecuación de equilibrio en $t + \Delta t$, $M\ddot{U}_{t+\Delta t} + C\dot{U}_{t+\Delta t} + KU_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t}$, y reemplazando los valores de $\dot{U}_{t+\Delta t}$ y $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ dados por (4.118), resulta que:

$$\mathbf{K}^{eff} \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{eff} \quad (4.119)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{eff} &= \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{11}{6\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \\ \mathbf{F}^{eff} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \left(\frac{5\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{3\mathbf{C}}{\Delta t} \right) \mathbf{U}_t - \left(\frac{4\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{3\mathbf{C}}{2\Delta t} \right) \mathbf{U}_{t-\Delta t} + \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{C}}{3\Delta t} \right) \mathbf{U}_{t-2\Delta t} \end{aligned} \quad (4.120)$$

Análogamente al método de la diferencia finita centrada el método de Houbolt necesita un tratamiento previo en $t=0$ para obtener los valores $U_{0-\Delta t}$ y $U_{0-2\Delta t}$. Para ello expresamos los valores de $\dot{U}_{t+\tau}(\tau)$ y $\ddot{U}_{t+\tau}(\tau)$, dados por las expresiones (4.116), en $\tau=0$, resultando:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{t+0}(\tau=0) &= c = \frac{1}{6\Delta t} [U_{t-2\Delta t} - 6U_{t-\Delta t} + 3U_t + 2U_{t+\Delta t}] \\ \ddot{U}_{t+0}(\tau=0) &= 2b = \frac{1}{\Delta t^2} [U_{t-\Delta t} - 2U_t + U_{t+\Delta t}] \end{aligned} \tag{4.121}$$

Es decir, estamos aplicando en el tercer punto de integración, ver Figura 4.11.

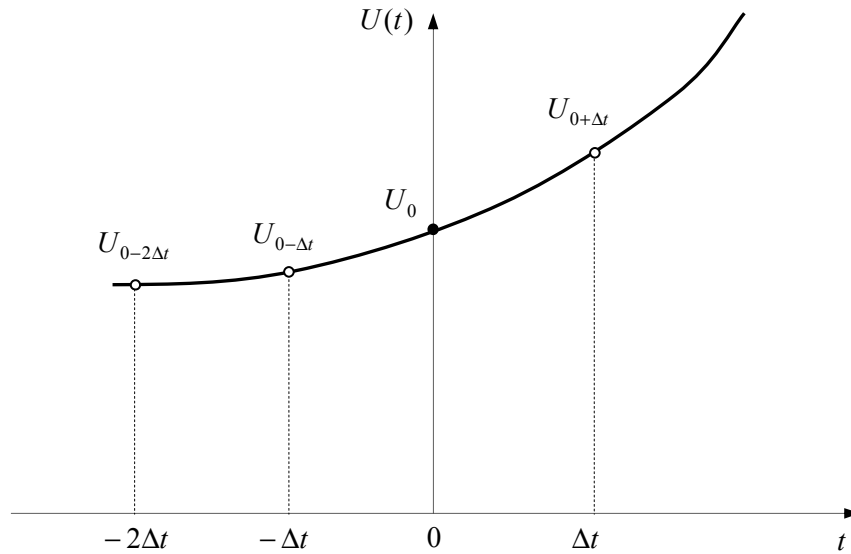


Figura 4.11: Método de Houbolt en $t=0$.

Aplicando las expresiones (4.121), en $t=0$, resulta que:

$$\begin{aligned} \dot{U}_0 &= \frac{1}{6\Delta t} [U_{0-2\Delta t} - 6U_{0-\Delta t} + 3U_0 + 2U_{0+\Delta t}] \\ \ddot{U}_0 &= \frac{1}{\Delta t^2} [U_{0-\Delta t} - 2U_0 + U_{0+\Delta t}] \end{aligned} \tag{4.122}$$

Partiendo de la expresión de la aceleración dada por (4.122) despejamos $U_{0-\Delta t}$:

$$U_{0-\Delta t} = \Delta t^2 \ddot{U}_0 + 2U_0 - U_{0+\Delta t} \tag{4.123}$$

Reemplazamos $U_{0-\Delta t}$ en la expresión de la velocidad (\dot{U}_0), dada por (4.122), y a su vez despejamos $U_{0-2\Delta t}$, obtenemos que:

$$U_{0-2\Delta t} = 6\Delta t \dot{U}_0 + 6\Delta t^2 \ddot{U}_0 - 8U_{0+\Delta t} + 9U_0 \tag{4.124}$$

En $t=0$ el sistema de ecuaciones (4.119) vienen dados por:

$$\mathbf{K}^{eff} \mathbf{U}_{0+\Delta t} = \mathbf{F}^{eff} \tag{4.125}$$

donde

$$\mathbf{K}^{eff} = \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{11}{6\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}$$

$$\mathbf{F}^{eff} = \mathbf{F}_{0+\Delta t} + \left(\frac{5\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{3\mathbf{C}}{\Delta t} \right) \mathbf{U}_0 - \left(\frac{4\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{3\mathbf{C}}{2\Delta t} \right) \mathbf{U}_{0-\Delta t} + \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{C}}{3\Delta t} \right) \mathbf{U}_{0-2\Delta t}$$
(4.126)

Fijemos que $\mathbf{U}_{0-\Delta t}$ y $\mathbf{U}_{0-2\Delta t}$ también son funciones de la incógnita $\mathbf{U}_{0+\Delta t}$. Reemplazando los valores de $\mathbf{U}_{0-\Delta t}$ y $\mathbf{U}_{0-2\Delta t}$ dadas por (4.123) y (4.124) en el sistema de ecuaciones (4.125) y reestructurando la expresión obtenemos el siguiente sistema:

$$\hat{\mathbf{K}}^{eff} \mathbf{U}_{0+\Delta t} = \hat{\mathbf{F}}^{eff}$$
(4.127)

donde

$$\hat{\mathbf{K}}^{eff} = \frac{6}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}$$

$$\hat{\mathbf{F}}^{eff} = \mathbf{F}_{0+\Delta t} + \left(\frac{6\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{3\mathbf{C}}{\Delta t} \right) \mathbf{U}_0 + \left(\frac{6\mathbf{M}}{\Delta t} + 2\mathbf{C} \right) \dot{\mathbf{U}}_0 + \left(2\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right) \ddot{\mathbf{U}}_0$$
(4.128)

Resolvemos el sistema (4.127) obteniendo así $\mathbf{U}_{0+\Delta t}$ que nos permite calcular los valores $\mathbf{U}_{0-\Delta t}$ y $\mathbf{U}_{0-2\Delta t}$ a través de las expresiones (4.123) y (4.124) respectivamente.

Es interesante observar que las expresiones dadas por (4.128) son las mismas obtenidas por el método de la aceleración lineal, ver expresiones (4.90).

4.6.6.1 Esquema de Houbolt para la Integración Directa

I. Parámetros Iniciales

I.1. Construimos las matrices M , C , K .

I.2. Dadas las condiciones iniciales U_0 , \dot{U}_0 , obtenemos \ddot{U}_0 :

$$\ddot{U}_0 = M^{-1}(F_0 - C\dot{U}_0 - KU_0)$$

I.3. Calculamos las siguientes matrices:

$$\hat{K}^{eff} = \frac{6}{\Delta t^2}M + \frac{3}{\Delta t}C + K$$

$$\hat{F}^{eff} = F_{0+\Delta t} + \left(\frac{6M}{\Delta t^2} + \frac{3C}{\Delta t}\right)U_0 + \left(\frac{6M}{\Delta t} + 2C\right)\dot{U}_0 + \left(2M + \frac{\Delta t}{2}C\right)\ddot{U}_0$$

I.4. Resolvemos el sistema:

$$\hat{K}^{eff} U_{0+\Delta t} = \hat{F}^{eff}$$

I.5. Calculamos los vectores $U_{0-\Delta t}$, $U_{0-2\Delta t}$ y $\dot{U}_{0+\Delta t}$, $\ddot{U}_{0+\Delta t}$:

$$U_{0-\Delta t} = \Delta t^2 \ddot{U}_0 + 2U_0 - U_{0+\Delta t} \text{ y } U_{0-2\Delta t} = 6\Delta t \dot{U}_0 + 6\Delta t^2 \ddot{U}_0 - 8U_{0+\Delta t} + 9U_0$$

$$U_{0-\Delta t} = \Delta t^2 \ddot{U}_0 + 2U_0 - U_{0+\Delta t} \quad ; \quad U_{0-2\Delta t} = 6\Delta t \dot{U}_0 + 6\Delta t^2 \ddot{U}_0 - 8U_{0+\Delta t} + 9U_0$$

$$\dot{U}_{0+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} [11U_{0+\Delta t} - 18U_0 + 9U_{0-\Delta t} - 2U_{0-2\Delta t}] \quad ; \quad \ddot{U}_{0+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} [2U_{0+\Delta t} - 5U_0 + 4U_{0-\Delta t} - U_{0-2\Delta t}]$$

I.6. Calculamos la matriz efectiva K^{eff} :

$$K^{eff} = \frac{2}{\Delta t^2}M + \frac{11}{6\Delta t}C + K$$

I.7. Actualizamos las variables:

$$U_{t-2\Delta t} \leftarrow U_{0-\Delta t} \quad ; \quad U_{t-\Delta t} \leftarrow U_0 \quad ; \quad U_t \leftarrow U_{0+\Delta t}$$

II. Para cada Paso de Tiempo $t + \Delta t$

II.1. Obtenemos el vector de fuerzas efectivo:

$$F^{eff} = F_{t+\Delta t} + \left(\frac{5M}{\Delta t^2} + \frac{3C}{\Delta t}\right)U_t - \left(\frac{4M}{\Delta t^2} + \frac{3C}{2\Delta t}\right)U_{t-\Delta t} + \left(\frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{3\Delta t}\right)U_{t-2\Delta t}$$

II.2. Resolvemos el sistema:

$$K^{eff} U_{t+\Delta t} = F^{eff}$$

II.3. Calculamos los vectores $\dot{U}_{t+\Delta t}$, $\ddot{U}_{t+\Delta t}$:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} [11U_{t+\Delta t} - 18U_t + 9U_{t-\Delta t} - 2U_{t-2\Delta t}] \quad ; \quad \ddot{U}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} [2U_{t+\Delta t} - 5U_t + 4U_{t-\Delta t} - U_{t-2\Delta t}]$$

II.4. Actualizamos las variables:

$$U_{t-2\Delta t} \leftarrow U_{t-\Delta t} \quad ; \quad U_{t-\Delta t} \leftarrow U_t \quad ; \quad U_t \leftarrow U_{t+\Delta t}$$

$$\text{Si es el caso } F_{t+\Delta t} \leftarrow F(t + \Delta t, U_{t+\Delta t}, \dot{U}_{t+\Delta t}, \ddot{U}_{t+\Delta t}, \dots)$$

Ir al paso II.1 con $t + \Delta t$.

4.6.7 Método de Hilber-Hughes-Taylor (HHT)

El método HHT (también conocido como método alfa) utiliza los mismos campos de desplazamiento y de velocidad empleados en el método de Newmark. La diferencia de este método está en el tratamiento de la ecuación de equilibrio dinámico:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta_H\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_t + \beta_H \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \\
 \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + (1 - \gamma_H) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t + \gamma_H \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \\
 \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + (1 + \alpha_H) \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \alpha_H \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_t + (1 + \alpha_H) \mathbf{K} \mathbf{U}_{t+\Delta t} - \alpha_H \mathbf{K} \mathbf{U}_t = \mathbf{F}_{t+\Delta t}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{Método de} \\
 \text{Hilber-} \\
 \text{Hughes-} \\
 \text{Taylor}
 \end{array}
 \quad (4.129)$$

con $\alpha_H < 0$.

A través de la expresión del desplazamiento $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$, dado por (4.129), podemos expresar $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ como:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta_H \Delta t^2} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{1}{\beta_H \Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t - \left(\frac{1}{2\beta_H} - 1\right) \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.130)$$

Reemplazando la ecuación (4.130) en la expresión de la velocidad $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$, dada por (4.129), obtenemos que:

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma_H}{\beta_H \Delta t} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) + \left(1 - \frac{\gamma_H}{\beta_H}\right) \dot{\mathbf{U}}_t + \left(1 - \frac{\gamma_H}{2\beta_H}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.131)$$

Reemplazando (4.130) y (4.131) en la ecuación de equilibrio dinámico dada por (4.129), obtenemos que:

$$\mathbf{K}^{eff} \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{eff} \quad (4.132)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{eff} &= \frac{1}{\beta_H \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1 + \alpha_H) \gamma_H}{\beta_H \Delta t} \mathbf{C} + (1 + \alpha_H) \mathbf{K} \\
 \mathbf{F}^{eff} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \left[\frac{\mathbf{M}}{\beta_H \Delta t^2} + \frac{(1 + \alpha_H) \gamma_H}{\beta_H \Delta t} \mathbf{C} + \alpha_H \mathbf{K} \right] \mathbf{U}_t + \\
 &+ \left[\frac{\mathbf{M}}{\beta_H \Delta t} - \left(1 - \frac{\gamma_H (1 + \alpha_H)}{\beta_H}\right) \mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{U}}_t + \left[\left(\frac{1}{2\beta_H} - 1\right) \mathbf{M} - (1 + \alpha_H) \left(1 - \frac{\gamma_H}{2\beta_H}\right) \Delta t \mathbf{C} \right] \ddot{\mathbf{U}}_t
 \end{aligned} \quad (4.133)$$

En el caso particular $\alpha_H = 0$ recuperamos el método de Newmark. Además tiene precisión de segundo orden y es incondicionalmente estable cuando:

$$-\frac{1}{3} \leq \alpha_H \leq 0 \quad ; \quad \gamma_H = \frac{1}{2} (1 - 2\alpha_H) \quad ; \quad \beta_H = \frac{1}{4} (1 - \alpha_H)^2 \quad (4.134)$$

Cuanto menor α_H mayor será el amortiguamiento numérico. El amortiguamiento numérico es pequeño para una respuesta de baja frecuencia y será alto para una respuesta de alta frecuencia.

4.6.8 Método de Bossak

El método Bossak también utiliza los mismos campos de desplazamiento y de velocidad que fueran empleados en el método de Newmark. La diferencia de este método está en el tratamiento de la ecuación de equilibrio dinámico:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta_B\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_t + \beta_B \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \\ \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{U}}_t + (1 - \gamma_B) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t + \gamma_B \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \\ (1 - \alpha_B) \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \alpha_B \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} \end{aligned}} \quad \text{Método de Bossak} \quad (4.135)$$

En el caso que $\alpha_B = 0$ recuperamos el formato inicial del método de Newmark.

La condición de estabilidad se cumple cuando:

$$\alpha_B \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad \beta_B \geq \frac{\gamma_B}{2} \geq \frac{1}{4} \quad ; \quad \alpha_B + \beta_B \geq \frac{1}{2} \quad (4.136)$$

A través de la expresión del desplazamiento $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$, dado por (4.135), podemos expresar $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ como:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta_B \Delta t^2} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{1}{\beta_B \Delta t} \dot{\mathbf{U}}_t - \left(\frac{1}{2\beta_B} - 1\right) \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.137)$$

Reemplazando la ecuación (4.137) en la expresión de la velocidad $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$, dada por (4.135), obtenemos que:

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma_B}{\beta_B \Delta t} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) + \left(1 - \frac{\gamma_B}{\beta_B}\right) \dot{\mathbf{U}}_t + \left(1 - \frac{\gamma_B}{2\beta_B}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.138)$$

Reemplazando (4.137) y (4.138) en la ecuación de equilibrio dinámico dada por (4.135), obtenemos que:

$$\mathbf{K}^{eff} \mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{eff} \quad (4.139)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{eff} &= \frac{(1 - \alpha_B)}{\beta_B \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma_B}{\beta_B \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \\ \mathbf{F}^{eff} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \left[\frac{(1 - \alpha_B)}{\beta_B \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma_B}{\beta_B \Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{U}_t + \\ &+ \left[\frac{(1 - \alpha_B)}{\beta_B \Delta t} \mathbf{M} - \left(1 - \frac{\gamma_B}{\beta_B}\right) \mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{U}}_t + \left[\left(\frac{1 - \alpha_B}{2\beta_B} - 1\right) \mathbf{M} - \left(1 - \frac{\gamma_B}{2\beta_B}\right) \Delta t \mathbf{C} \right] \ddot{\mathbf{U}}_t \end{aligned} \quad (4.140)$$

4.6.9 Método α -Generalizado

El método α -Generalizado fue introducido por Chung&Hulbert(1993), y considera la siguiente ecuación de equilibrio dinámico:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t-\alpha_m} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t-\alpha_f} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{t+\Delta t-\alpha_f} = \mathbf{F}_{t+\Delta t-\alpha_f}(\bar{t}) \quad \text{Método } \alpha\text{-Generalizado} \quad (4.141)$$

donde

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\mathbf{U}_{t+\Delta t} + \alpha_f\mathbf{U}_t \quad (4.142)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \alpha_f\dot{\mathbf{U}}_t \quad (4.143)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t-\alpha_m} = (1-\alpha_m)\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} + \alpha_m\ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.144)$$

$$\bar{t} = (1-\alpha_f)(t+\Delta t) + \alpha_f t \quad (4.145)$$

con

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \Delta t\dot{\mathbf{U}}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{\mathbf{U}}_t + \beta\Delta t^2\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \quad (4.146)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + (1-\gamma)\Delta t\ddot{\mathbf{U}}_t + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \quad (4.147)$$

Observemos que los campos de desplazamientos y de velocidades son los mismos empleados para los métodos de Bossak y HHT. Análogamente a estos métodos podemos expresar $\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ y $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ como:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.148)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{U}}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{\mathbf{U}}_t \quad (4.149)$$

Reemplazando (4.142), (4.143), (4.144), y (4.148), (4.149) en la ecuación (4.141) resulta que:

$$\mathbf{K}^{eff}\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{eff} \quad (4.150)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{eff} &= \frac{(1-\alpha_m)}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + (1-\alpha_f)\mathbf{K} \\ \mathbf{F}^{eff} &= \mathbf{F}_{t+\alpha_f} + \left[\frac{(1-\alpha_m)}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} - \alpha_f\mathbf{K}\right]\mathbf{U}_t + \\ &+ \left[\frac{(1-\alpha_m)}{\beta\Delta t}\mathbf{M} - \left(1 - \frac{\gamma(1-\alpha_f)}{\beta}\right)\mathbf{C}\right]\dot{\mathbf{U}}_t + \left[\left(\frac{(1-\alpha_m)}{2\beta} - 1\right)\mathbf{M} - (1-\alpha_f)\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\mathbf{C}\right]\ddot{\mathbf{U}}_t \end{aligned} \quad (4.151)$$

Podemos verificar que cuando $\alpha_f = \alpha_m = 0$ recaemos en las mismas expresiones dadas por el método de Newmark, ver expresiones (4.57). Cuando $\alpha_f = 0$ y $\alpha_m = \alpha_B$ recaemos en el método de Bossak, ver expresiones (4.140). Cuando $\alpha_m = 0$ recaemos en el método HHT.

4.6.10 Método de Park-Housner

El método de Park-Housner es un método semi-implícito. La matriz de masa (M) es una matriz diagonal y la matriz K se descompone en dos matrices triangulares, $K = K_L + K_U$ con $K_L = K_U^T$

El algoritmo sigue a continuación:

Construcción de K y de la matriz diagonal M ;

Construcción de las matrices $K = K_L + K_U$

Construcción de las matrices del sistema:

$$L = M(\mathbf{1} + \alpha\beta\Delta t^2 M^{-1} K_L) \quad ; \quad Q = \mathbf{1} + \alpha\beta\Delta t^2 M^{-1} K_U$$

$$g_{t+\Delta t} = \alpha\beta\Delta t^2 [\beta f_{t+\Delta t} + (1-\beta)f_t] + M(U_t + \beta\Delta t \dot{U}_t)$$

Resuelve los siguientes sistemas:

$$Ly_{t+\Delta t} = g_{t+\Delta t} \quad ; \quad QU_{t+\Delta t}^* = y_{t+\Delta t}$$

Actualiza

$$U_{t+\Delta t} \leftarrow \frac{1}{\beta} [U_{t+\Delta t}^* - (1-\beta)U_t]$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} \leftarrow \frac{1}{\alpha\Delta t} [U_{t+\Delta t} - U_t] - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \dot{U}_t$$

4.6.11 Método de Trujillo

Trujillo (1977) presentó un método semi-implícito, aplicándolo en un problema dinámico estructural lineal.

El método de Trujillo separa las matrices de rigidez y de amortiguamiento en dos matrices triangulares superior e inferior.

$$K = K_L + K_U \quad ; \quad C = C_L + C_U \tag{4.152}$$

La matriz de masa (M) es una matriz diagonal. A continuación sigue el esquema de Trujillo:

Sustitución hacia a tras

$$U_{t+\frac{1}{2}} = K_{(1)}^{-1} \left\{ \left[M + \frac{\Delta t}{2} C_L - \frac{\Delta t^2}{8} K_U \right] U_t + \frac{\Delta t}{2} \left[M + \frac{\Delta t}{4} (C_L - C_U) \right] \dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{16} [F_{t+\Delta t} + F_t] \right\}$$

con

$$K_{(1)} = \left[M + \frac{\Delta t}{2} C_L + \frac{\Delta t^2}{8} K_L \right]$$

$$\dot{U}_{t+\frac{1}{2}} = \frac{4}{\Delta t} \left[U_{t+\frac{1}{2}} - U_t \right] - \dot{U}_t$$

Sustitución hacia adelante

$$U_{t+1} = K_{(2)}^{-1} \left\{ \left[M + \frac{\Delta t}{2} C_U - \frac{\Delta t^2}{8} K_L \right] U_{t+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \left[M + \frac{\Delta t}{4} (C_U - C_L) \right] \dot{U}_{t+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{16} [F_{t+\Delta t} + F_t] \right\}$$

con

$$K_{(2)} = \left[M + \frac{\Delta t}{2} C_U + \frac{\Delta t^2}{8} K_U \right]$$

$$\dot{U}_{t+1} = \frac{4}{\Delta t} \left[U_{t+1} - U_{t+\frac{1}{2}} \right] - \dot{U}_{t+\frac{1}{2}}$$

4.7 Ejemplos

Consideremos un modelo mecánico de un grado de libertad tal y como se muestra en la Figura 4.12. En esta figura podemos apreciar un cuerpo de masa m que está conectado a dos dispositivos, uno elástico (*Structural*), caracterizado por un muelle de constante elástica k , y un amortiguador con constante viscosa c (*Damping*), éste es el responsable por la disipación de energía del sistema. El sistema es conservativo cuando $c = 0$.

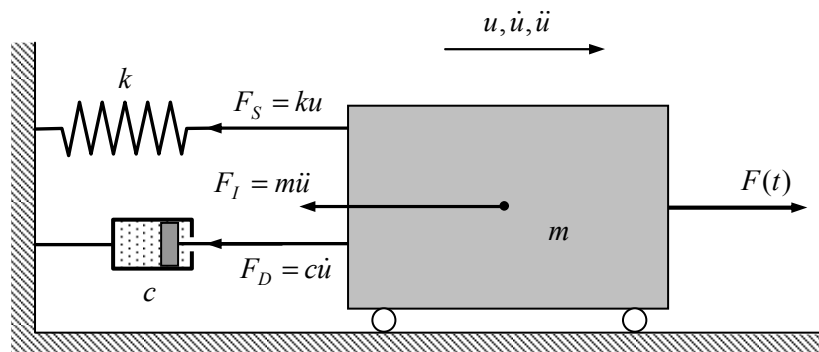


Figura 4.12: Modelo mecánico.

Cuando un cuerpo está sometido a un campo de aceleración, surge una fuerza de resistencia al movimiento debido a su masa, a esta fuerza denominamos de fuerzas inercias y viene dada por $F_I = m\ddot{u}$ (*Inertia Force*), donde $\ddot{u} \equiv a$ es la aceleración del cuerpo.

La ecuación de gobierno para el problema inicialmente propuesto, Figura 4.12, se puede obtener a través del equilibrio de fuerzas:

$$F_I + F_D + F_S = F(t) \quad (4.153)$$

o aún:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \quad (4.154)$$

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = F(t)$$

Si el cuerpo está libre de fuerzas externas $F(t) = 0$, la ecuación de gobierno se denomina de *vibración libre*.

La ecuación (4.154) también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{F(t)}{m} \quad (4.155)$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \omega^2 u = \frac{F(t)}{m}$$

donde definimos el parámetro:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\omega] \equiv \text{rad} / \text{s} \quad \text{Frecuencia circular natural} \quad (4.156)$$

4.7.1 Movimiento Oscilatorio

El modelo mecánico que representa un modelo oscilatorio viene caracterizado por un cuerpo de masa m conectado únicamente por un dispositivo tipo de muelle de constante elástica k , ver Figura 4.13.

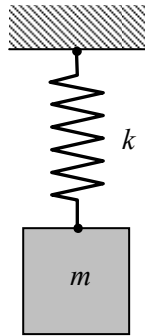


Figura 4.13: Modelo mecánico de un problema oscilatorio.

Un movimiento oscilatorio es un sistema conservativo ya que no hay disipación de energía. La ecuación de gobierno viene representada matemáticamente por:

$$m\ddot{u} + ku = F = 0 \quad (4.157)$$

donde $F = 0$ (vibración libre).

Consideremos como ejemplo que $m = 26$, $k = 21000$, y $F = 0$. Como condiciones de contorno e inicia tenemos que:

$$u(t=0) \equiv u_0 = 2 \quad ; \quad \dot{u}(t=0) \equiv \dot{u}_0 = -3 \quad (4.158)$$

La solución exacta viene dada por la siguiente función harmónica:

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin(\omega t) + u_0 \cos(\omega t) \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.159)$$

Definimos también los siguientes parámetros del modelo:

Frecuencia natural:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi} \approx 2,52 \text{ Hz} \quad \text{Frecuencia natural} \quad (4.160)$$

Periodo natural:

$$T = \frac{1}{f} \approx 0,22108 \text{ sec} \quad \text{Periodo natural} \quad (4.161)$$

A través de integración numérica presentaremos los resultados con un incremento de tiempo igual a $\Delta t = 0,01$.

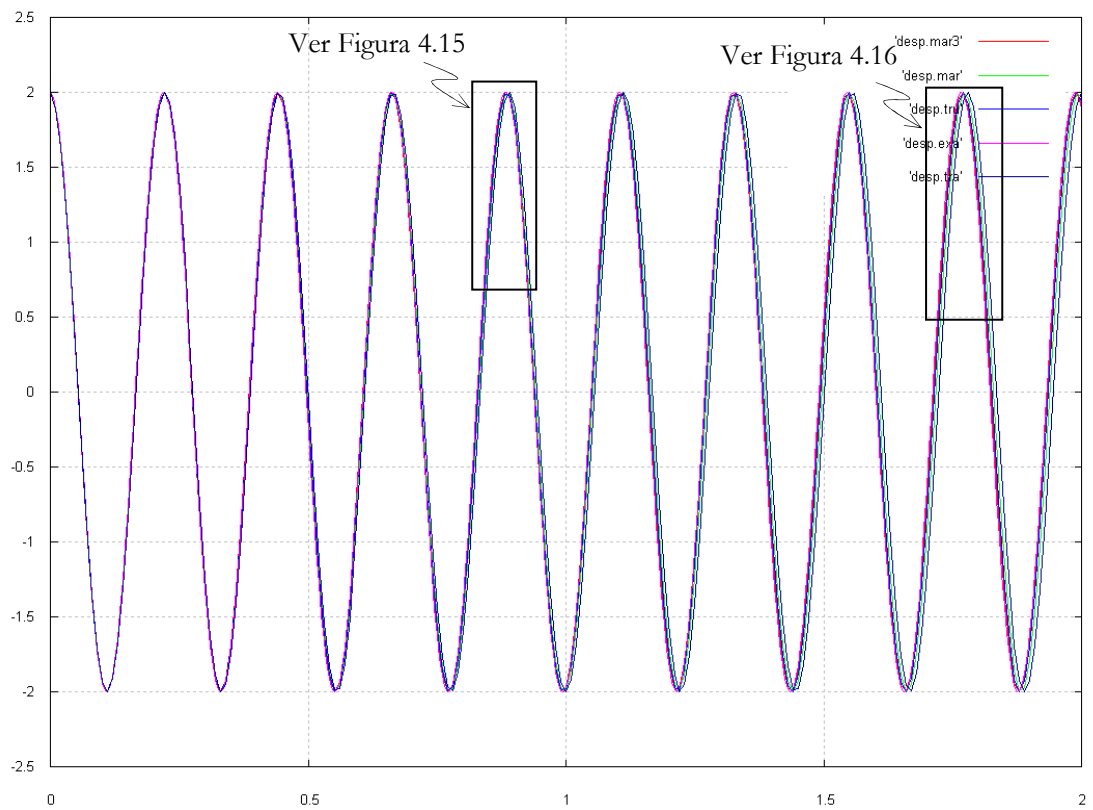


Figura 4.14: Curva desplazamiento x tiempo ($\Delta t = 0,01$).

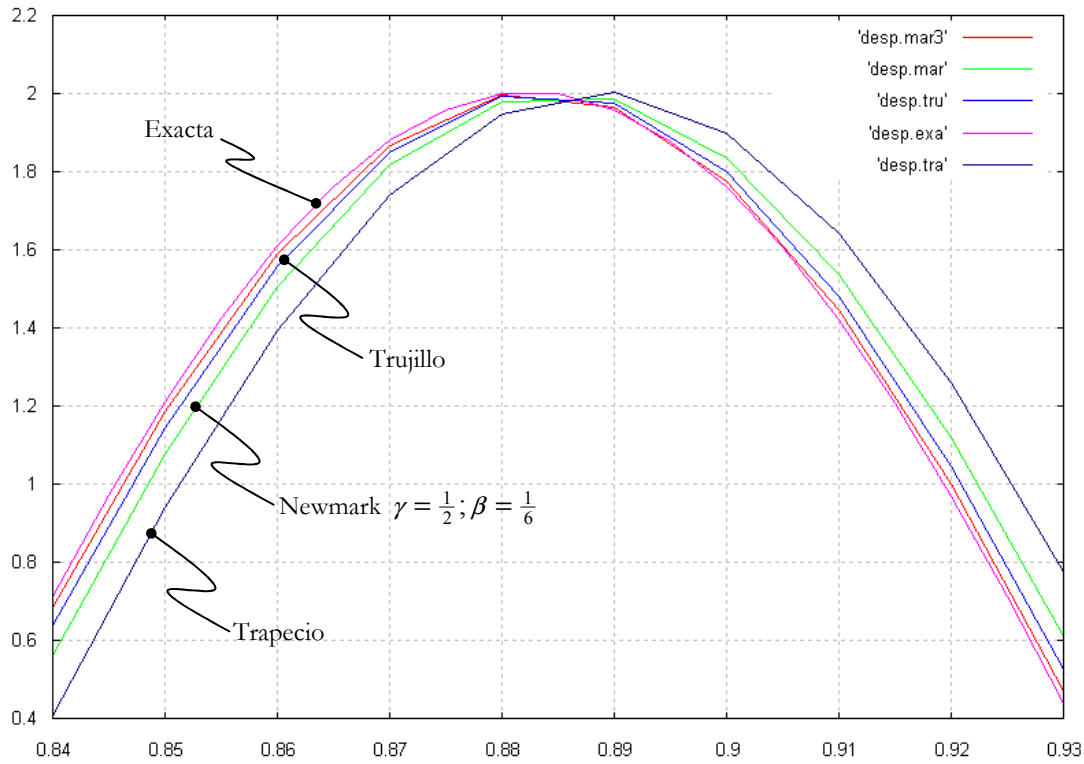


Figura 4.15: Curva desplazamiento x tiempo[0,84:0,93], ($\Delta t = 0,01$).

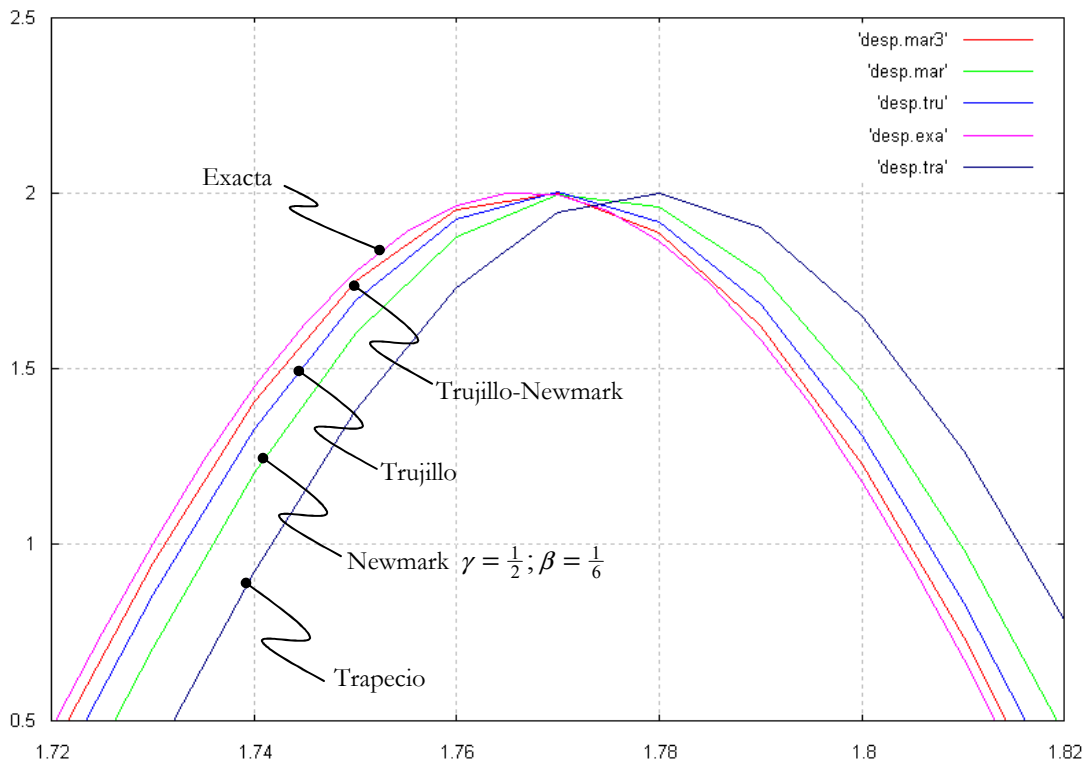


Figura 4.16: Curva desplazamiento x tiempo[1,72:1,82], ($\Delta t = 0,01$).

4.7.2 Vibración Libre con Amortiguamiento

Consideremos un modelo mecánico, ver Figura 4.17, que representa el problema de vibración libre ($F(t) = 0$) con amortiguamiento ($c \neq 0$).

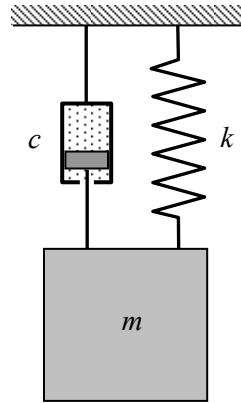


Figura 4.17: Modelo mecánico de vibración libre con amortiguamiento.

Como visto anteriormente la ecuación de gobierno viene dada por:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (4.162)$$

o aún:

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \quad (4.163)$$

Asumiendo que $u(t) = C_1 e^{st}$ la expresión anterior queda:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (4.164)$$

Cuya solución viene dada por:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (4.165)$$

Podemos tener tres posibilidades: radicando igual a cero (dos raíces reales e iguales), mayor que cero (dos raíces reales y distintas) y menor que cero (dos raíces imaginarias).

- *Radicando igual a cero (Amortiguamiento Crítico)*

En este caso tenemos que.

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega \quad \Rightarrow \quad c = 2m\omega \quad (4.166)$$

En esta situación el coeficiente de amortiguamiento recibe el nombre de coeficiente de amortiguamiento crítico:

$$\boxed{c_c = 2m\omega} \quad \text{coeficiente de amortiguamiento crítico} \quad (4.167)$$

De carácter general definiremos un parámetro denominado de factor de amortiguamiento (ζ) que sirve para indicar si el sistema está *subamortiguado* ($\zeta < 1$, *amortiguamiento subcrítico*) o *superamortiguado* ($\zeta > 1$, *amortiguamiento supercrítico*), y viene definido por:

$$\boxed{\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega}} \quad \text{factor de amortiguamiento} \quad (4.168)$$

El caso particular que estamos analizado, cuando el radicando de la ecuación (4.165) es igual a cero, tenemos que $\zeta = 1$, y recibe el nombre de *amortiguamiento crítico*.

Aún de carácter general podemos reescribir la expresión (4.164) como:

$$s^2 + 2\omega\zeta s + \omega^2 = 0 \quad (4.169)$$

Cuya solución viene dada por:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega \quad (4.170)$$

En el caso de amortiguamiento crítico, $\zeta = 1$, tenemos que $s_{1,2} = -\zeta\omega$.

La solución exacta de la ecuación diferencial (4.163) viene dada por:

$$u(t) = e^{-\omega t} \left\{ \dot{u}_0 + \omega u_0 \right\} t + u_0 \quad \text{con} \quad (\dot{u}_0 \neq 0; u_0 \neq 0) \quad (4.171)$$

▪ *Amortiguamiento supercrítico* $\zeta > 1$

En esta situación tendremos dos raíces reales y distintas dadas por (4.170). Y la solución de la ecuación diferencial (4.163) queda:

$$u(t) = Ae^{-s_1 t} + Be^{-s_2 t} \quad (4.172)$$

donde

$$A = \frac{\dot{u}_0 + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega u_0}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad ; \quad B = \frac{-\dot{u}_0 - \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega u_0}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (4.173)$$

▪ *Amortiguamiento subcrítico* $\zeta < 1$

En este caso la solución de (4.170) viene dada por:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2} \right) \omega \quad (4.174)$$

Y la solución de la ecuación diferencial (4.163) queda:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[A \sin\left(\omega t \sqrt{1 - \zeta^2} \right) + B \cos\left(\omega t \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \right] \quad (4.175)$$

o aún:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega u_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + u_0 \cos(\omega_d t) \right] \tag{4.176}$$

donde $\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$

4.7.2.1 Ejemplo de Vibración Libre con Amortiguamiento

En este ejemplo consideramos que $m = 0,0052$, $c = 0,1$, $k = 12$. Con las siguientes condiciones iniciales:

$$u_0 = 1,5 \quad ; \quad \dot{u}_0 = 0 \tag{4.177}$$

A continuación presentamos resultados utilizando integración directa con un incremento de tiempo igual a $\Delta t = 0,017$.

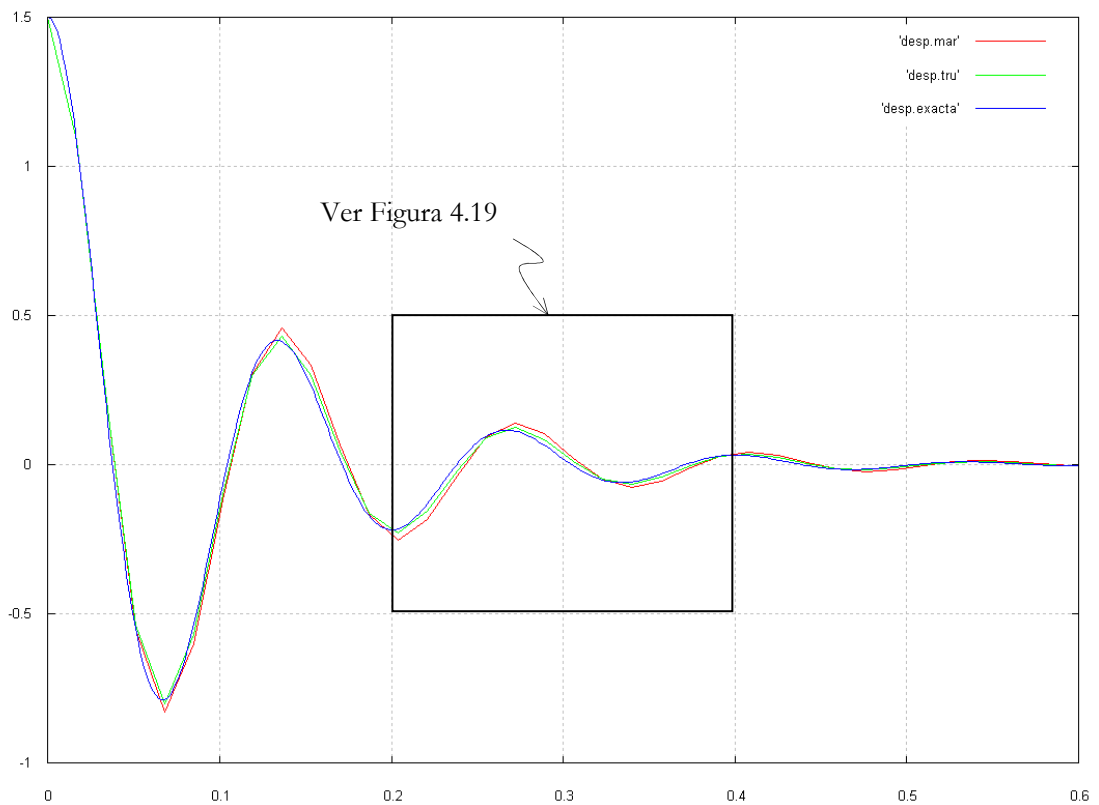


Figura 4.18: Curva desplazamiento x tiempo, ($\Delta t = 0,017$).

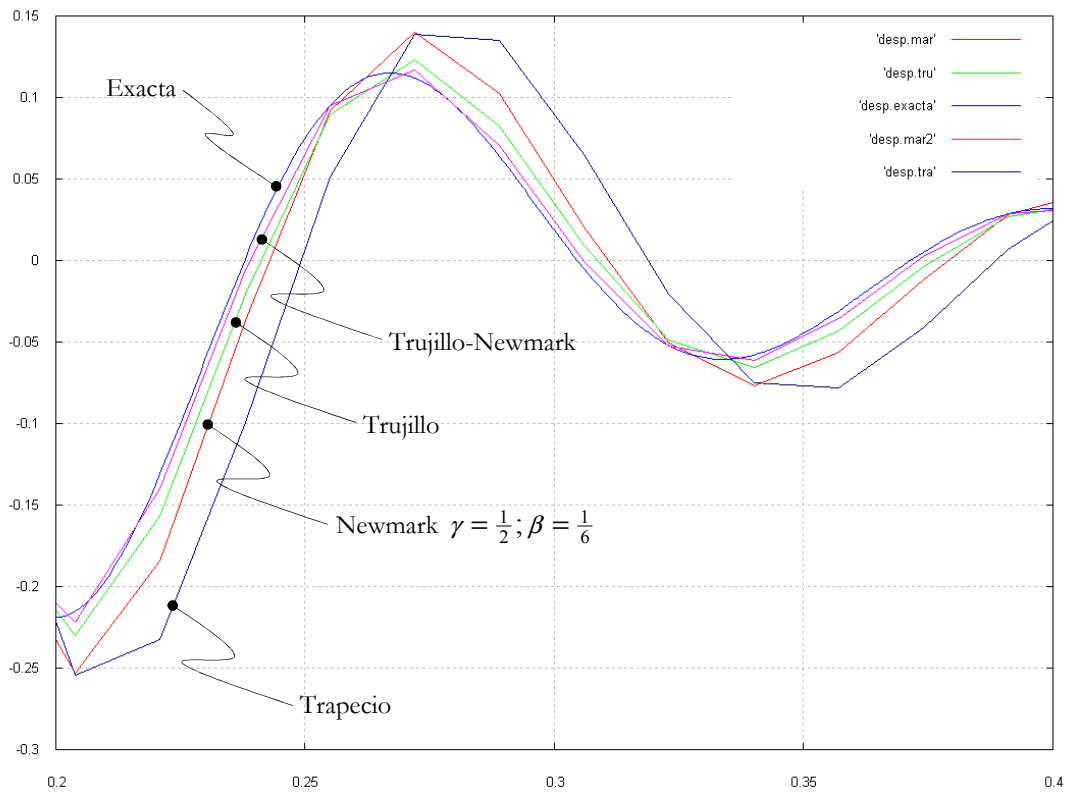


Figura 4.19: Curva desplazamiento x tiempo $[0,2;0,4]$, $(\Delta t = 0,017)$.

4.7.3 Ejemplos Diversos

4.7.3.1 Péndulo

Consideremos un péndulo como se muestra en la Figura 4.20.

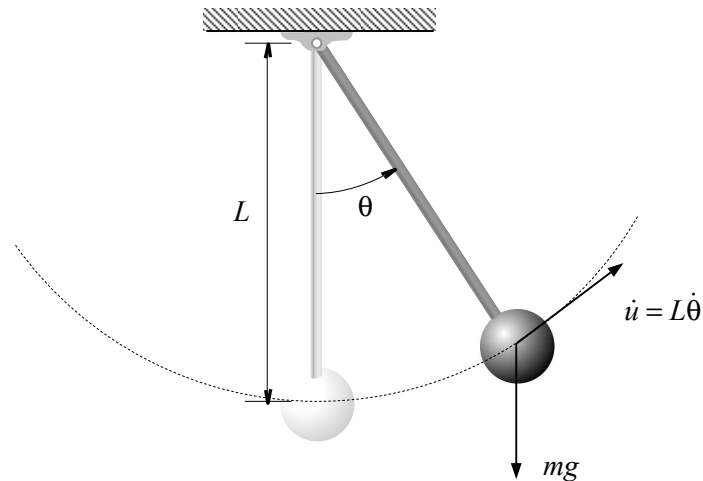


Figura 4.20: Péndulo.

La ecuación de gobierno viene dada por:

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL \sin(\theta) + cL\dot{\theta} = 0 \quad (4.178)$$

Podemos reescribir la expresión anterior como:

$$m\ddot{\theta} + \frac{c}{L}\dot{\theta} = -\frac{mg}{L} \sin(\theta) = F(t, \theta) \quad (4.179)$$

Consideremos los siguientes parámetros: $L = 10,0$, $m = 1,0$, $c = 2,0$, $g = 10$. Con las siguientes condiciones de contorno e inicial:

$$\theta(t=0) = 0 \quad ; \quad \dot{\theta}(t=0) = 3 \quad (4.180)$$

A continuación presentamos resultados utilizando integración directa con un incremento de tiempo igual a $\Delta t = 0,05$.

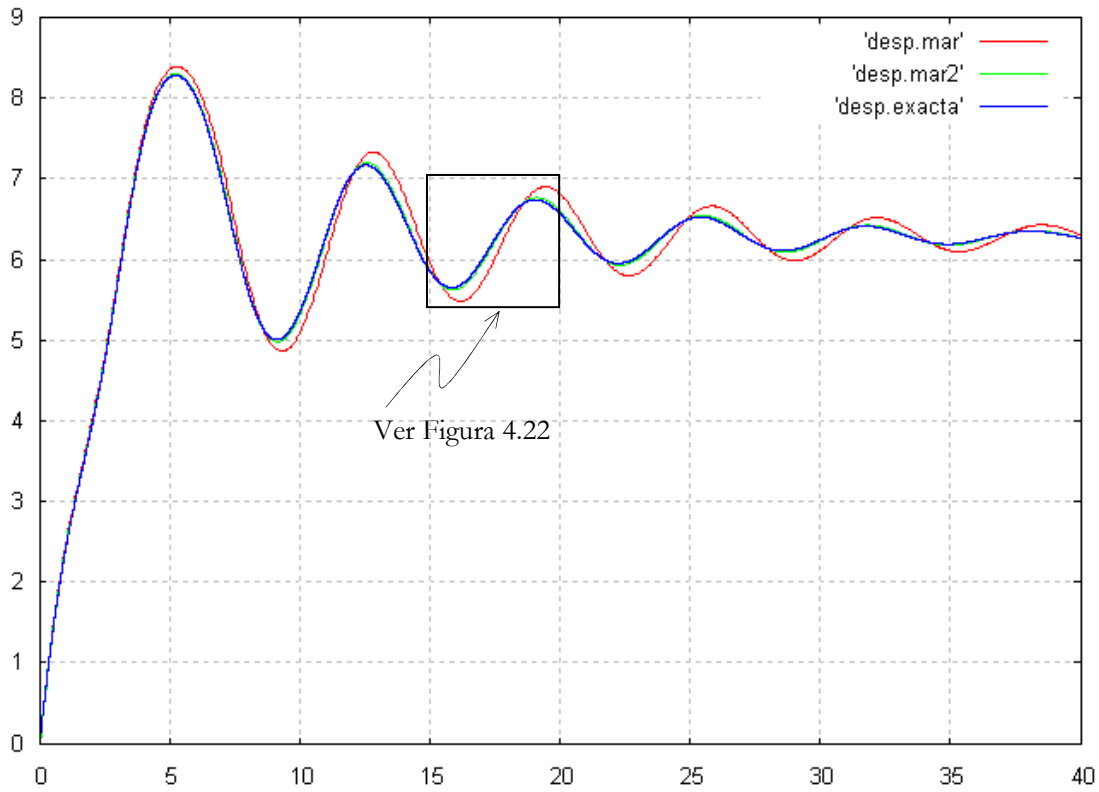


Figura 4.21: Curva desplazamiento x tiempo, ($\Delta t = 0,05$).

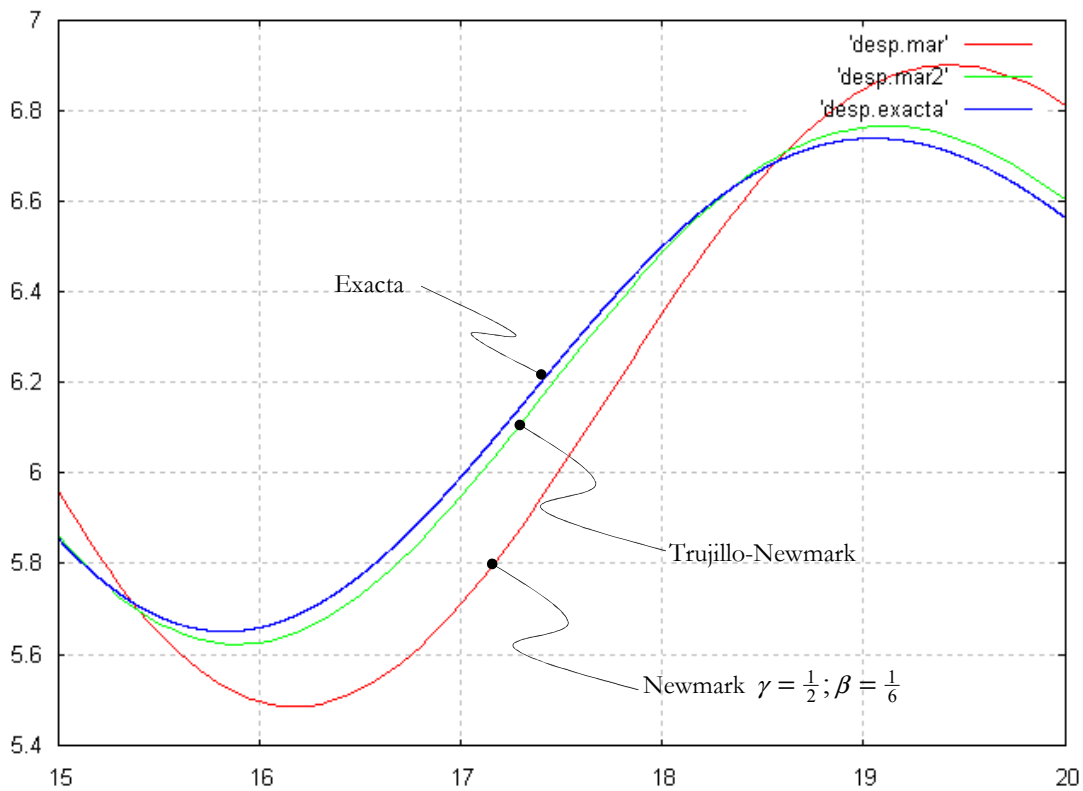


Figura 4.22: Curva desplazamiento x tiempo [15:20], ($\Delta t = 0,05$).

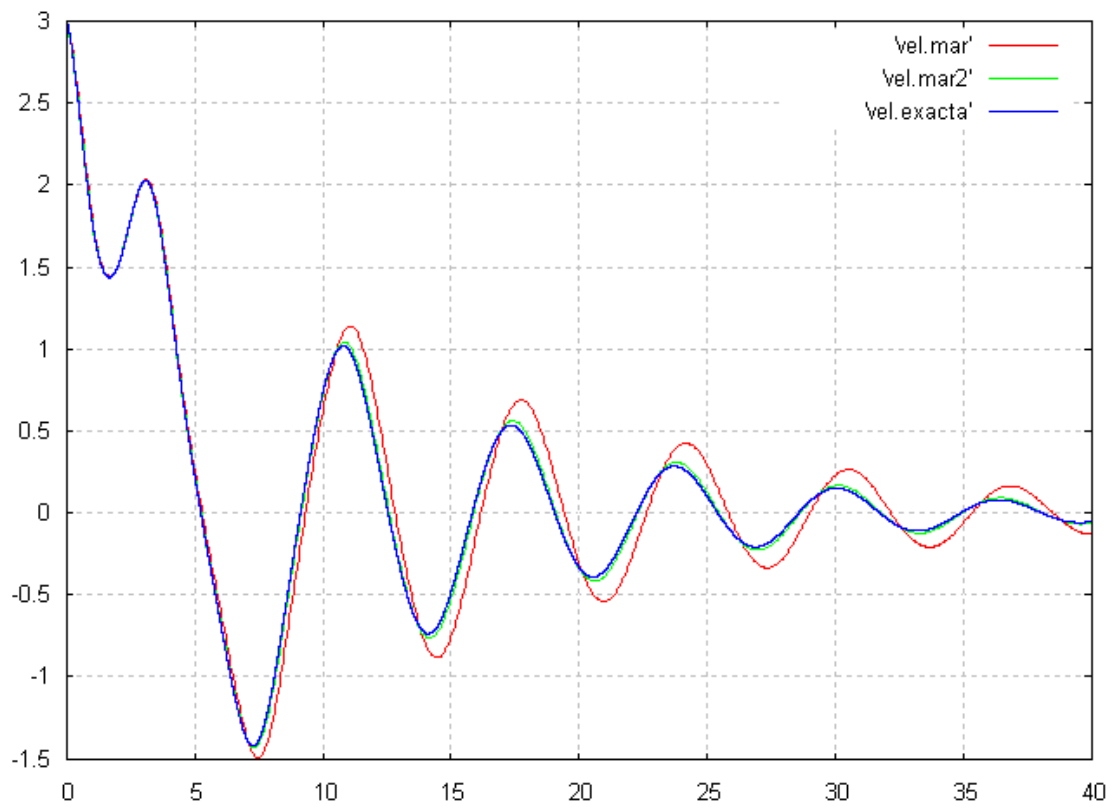


Figura 4.23: Curva velocidad x tiempo, ($\Delta t = 0,05$).

4.7.3.2 Oscilación-Relajación de van der Pol

Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{v} + \alpha(v^2 - 1)\dot{v} + \omega^2 v = 0 \quad (4.181)$$

conocida como ecuación de oscilación-relajación de van der Pol. Podemos reestructurar la expresión anterior como:

$$\ddot{v} - \alpha\dot{v} + \omega^2 v = -\alpha v^2 \dot{v} = F(t, v, \dot{v}) \quad (4.182)$$

Comparando con la ecuación del movimiento:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{F}{m} \quad (4.183)$$

Comparando (4.182) y (4.183) tenemos que: $\frac{c}{m} = -\alpha$, $\frac{k}{m} = \omega^2$, $\frac{F(t, v, \dot{v})}{m} = -\alpha v^2 \dot{v}$.

Consideremos como ejemplo los siguientes valores: $m=1$, $c=-\alpha=-8$, $k=\omega^2=0,25$, y como condiciones iniciales que:

$$v(t=0) \equiv v_0 = 1 \quad ; \quad \dot{v}(t=0) \equiv \dot{v}_0 = 3 \quad (4.184)$$

A continuación presentamos resultados utilizando integración directa con un incremento de tiempo igual a $\Delta t = 0,01$.

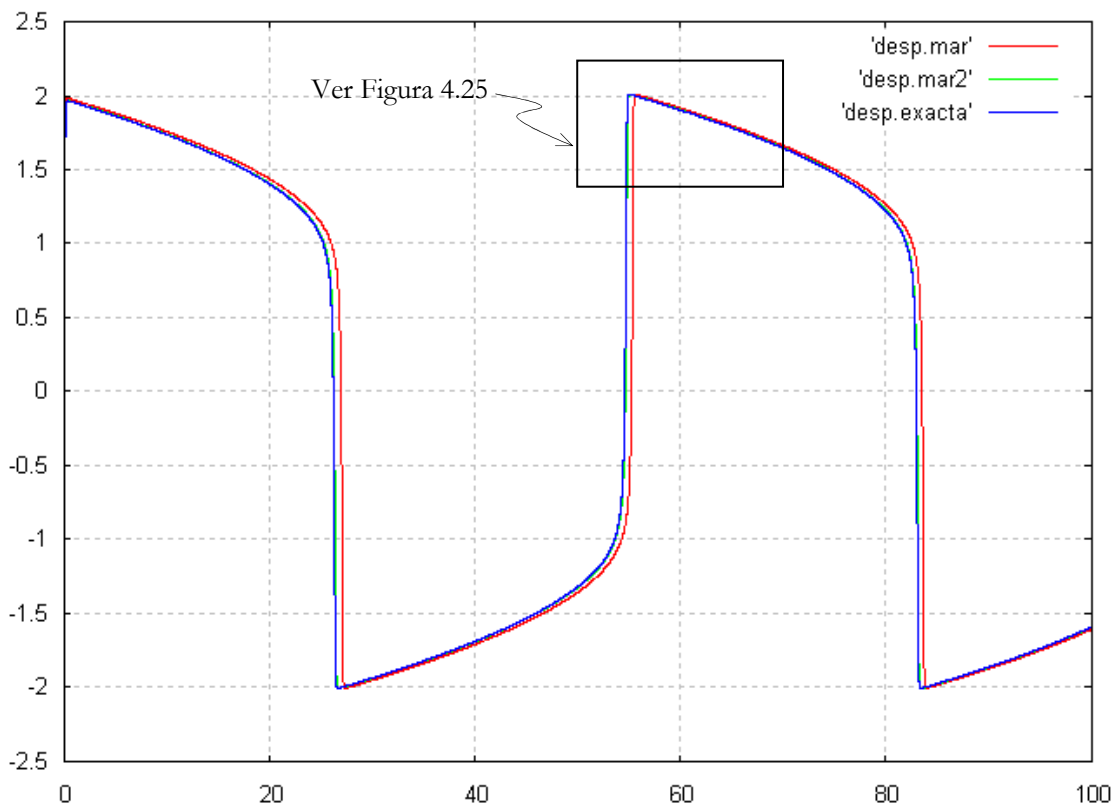


Figura 4.24: Curva “desplazamiento” x tiempo, ($\Delta t = 0,01$).

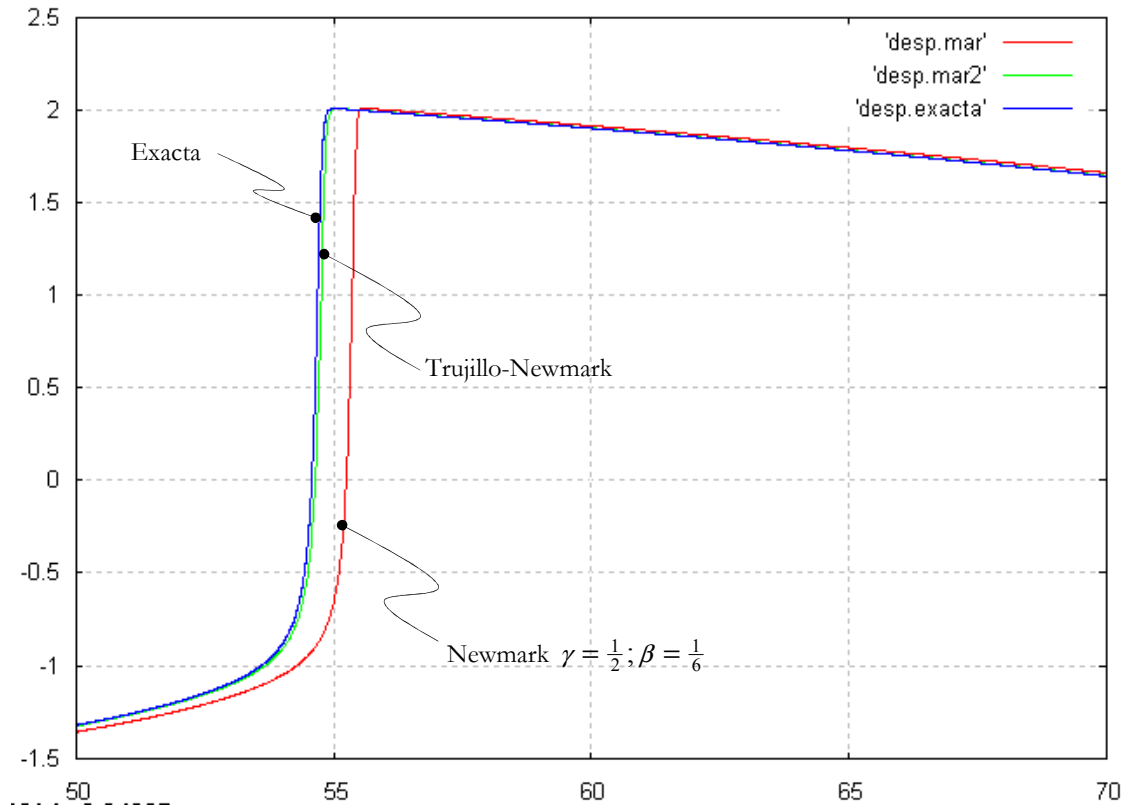


Figura 4.25: Curva “desplazamiento” x tiempo [50:70], ($\Delta t = 0,01$).

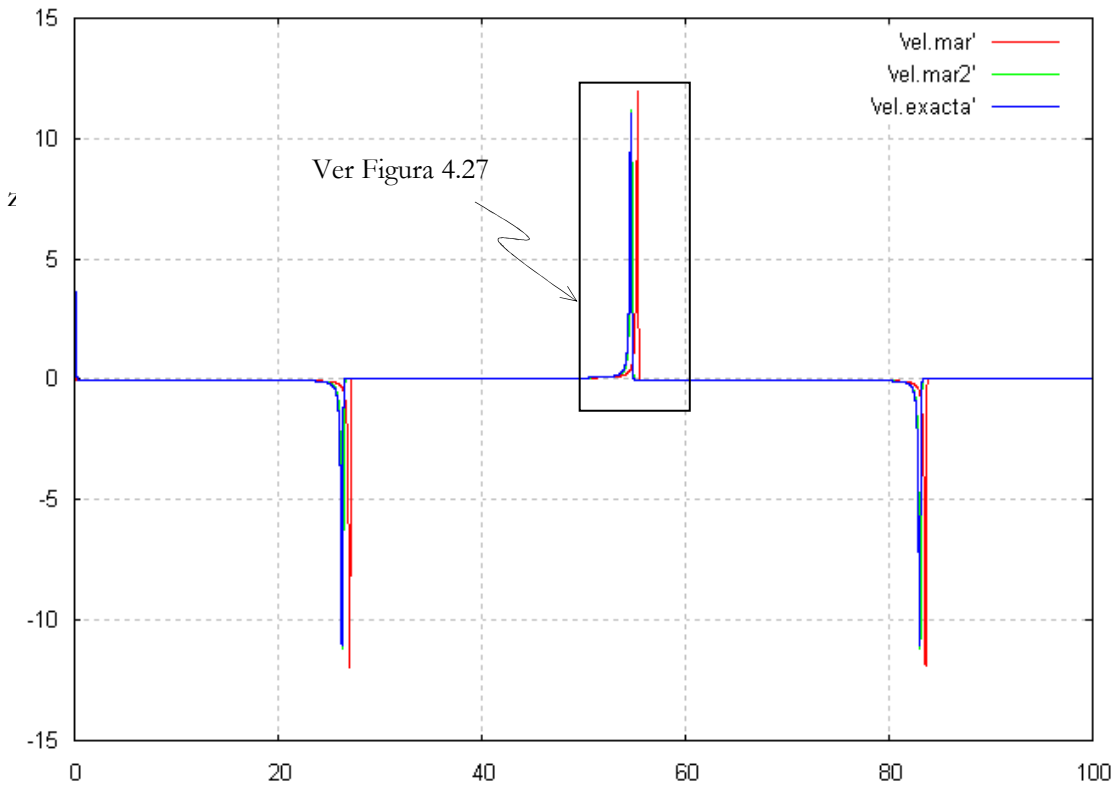


Figura 4.26: Curva “velocidad” x tiempo, ($\Delta t = 0,01$).

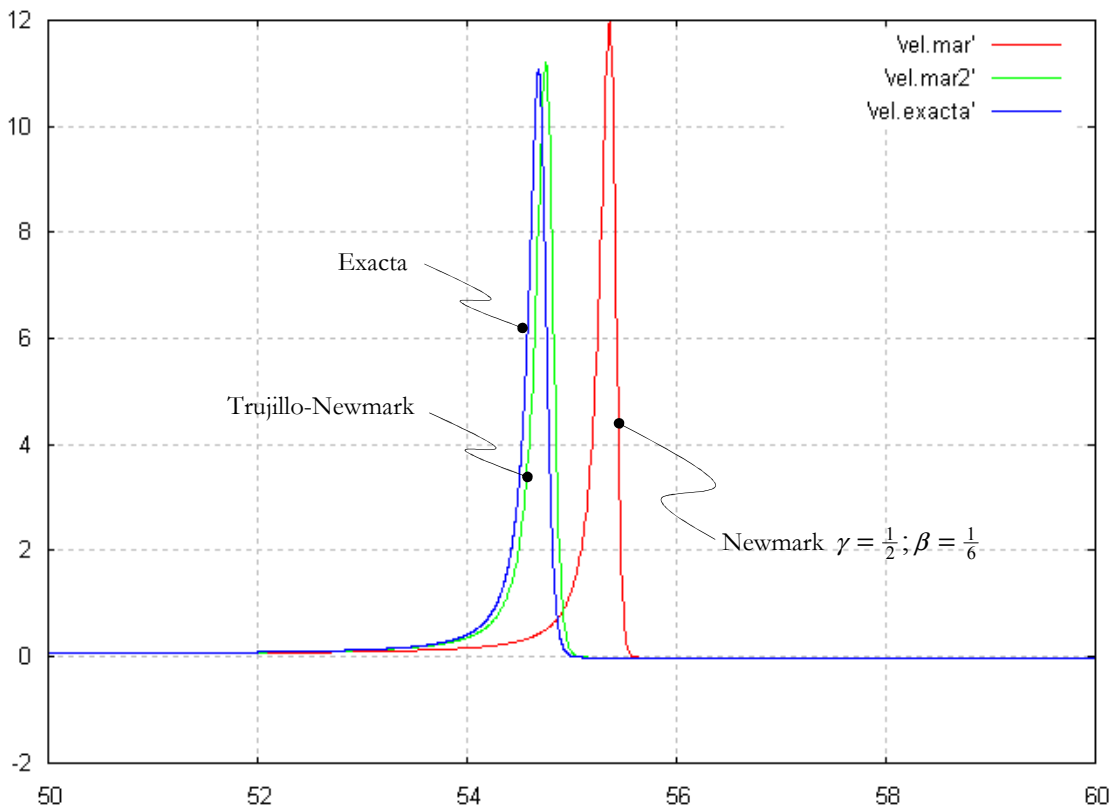


Figura 4.27: Curva “velocidad” x tiempo[50:60], ($\Delta t = 0,01$).

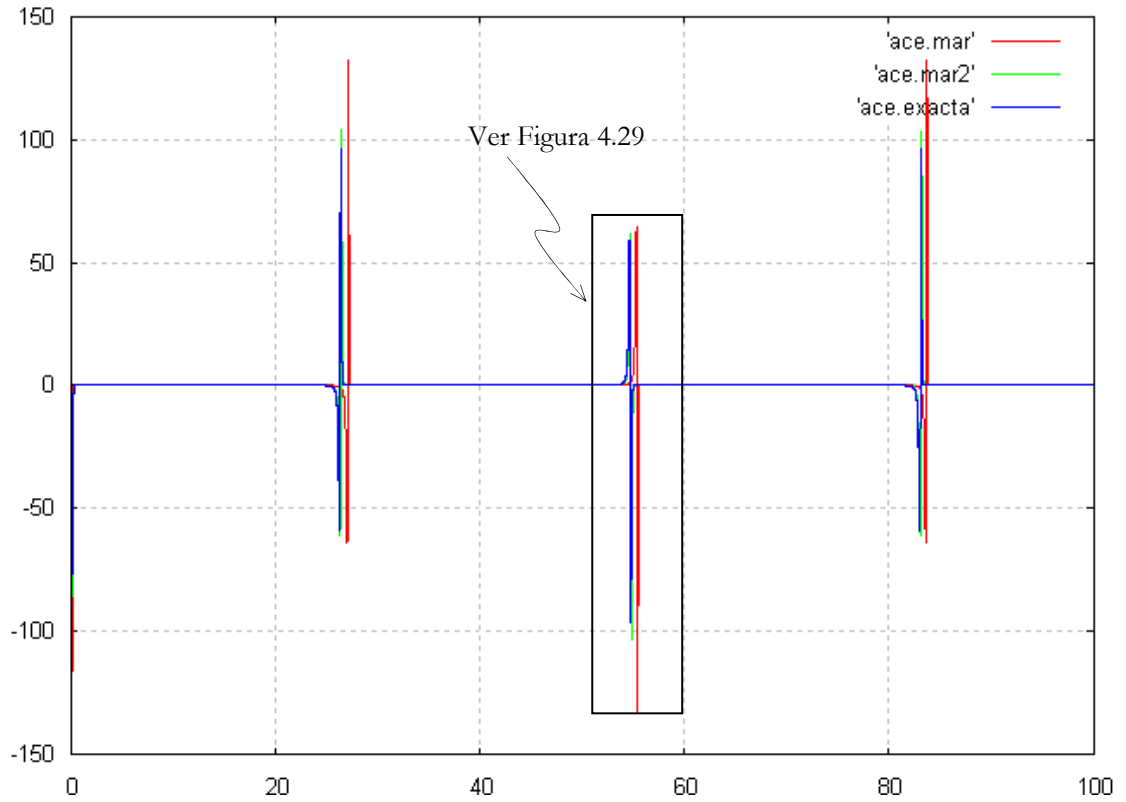


Figura 4.28: Curva “aceleración” x tiempo, ($\Delta t = 0,01$).

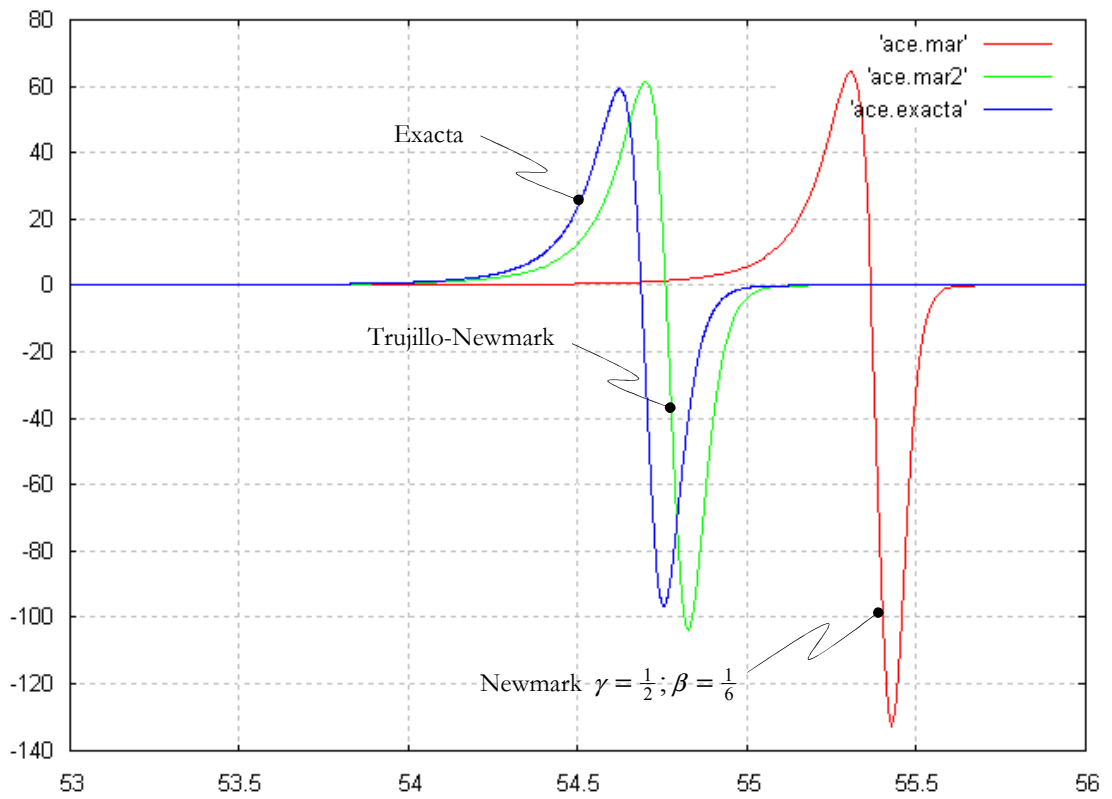


Figura 4.29: Curva “aceleración” x tiempo[53:56], ($\Delta t = 0,01$).

A continuación presentamos resultados utilizando integración directa con un incremento de tiempo igual a $\Delta t = 0,03$.

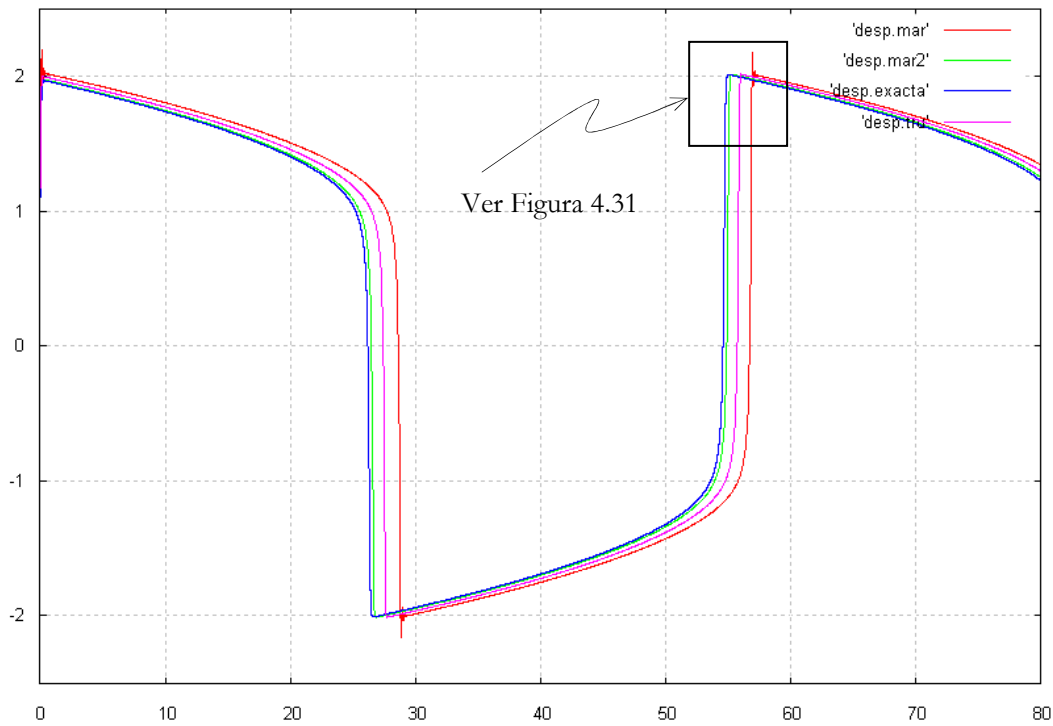


Figura 4.30: Curva “desplazamiento” x tiempo, ($\Delta t = 0,03$).

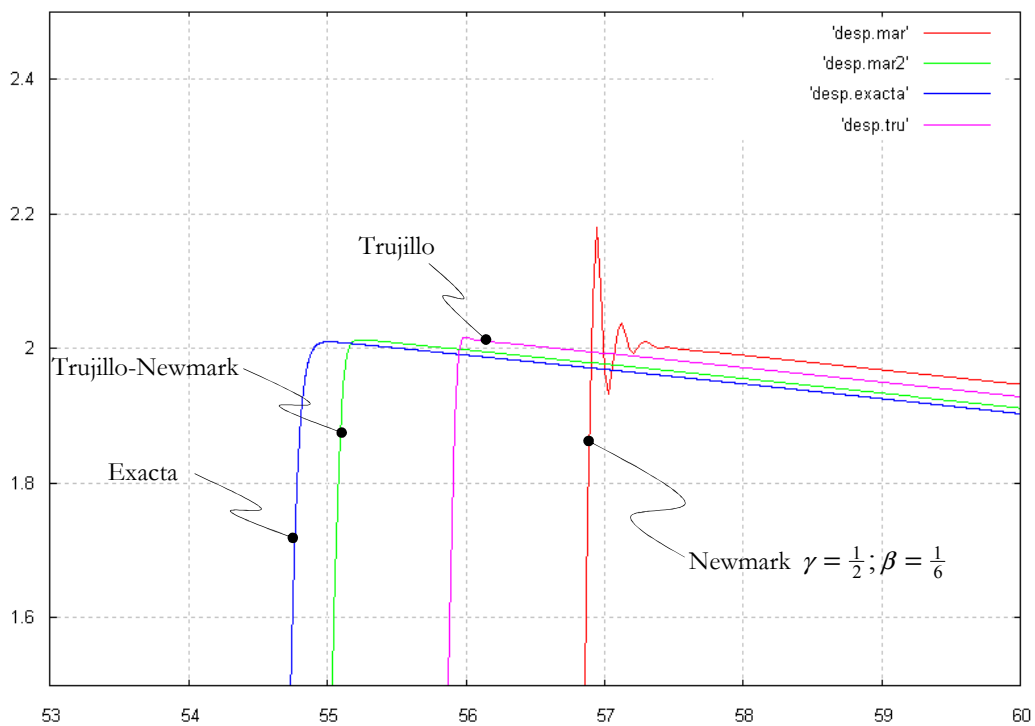


Figura 4.31: Curva “desplazamiento” x tiempo [53:60], ($\Delta t = 0,03$).

A continuación presentamos resultados utilizando integración directa con un incremento de tiempo igual a $\Delta t = 0,05$.

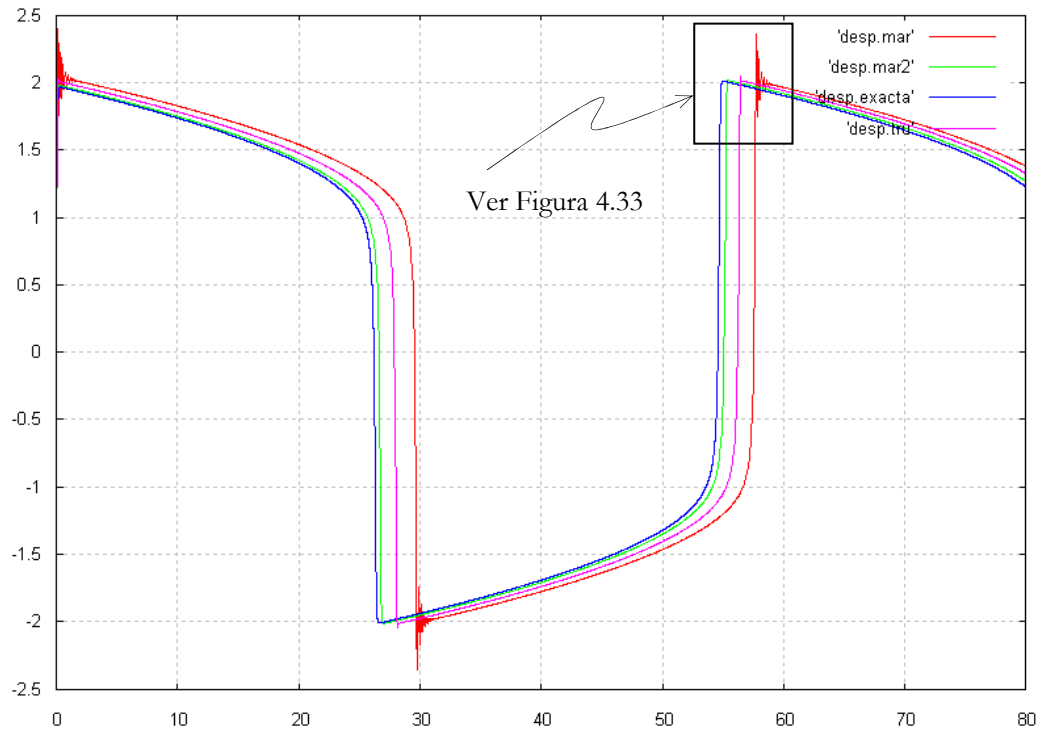


Figura 4.32: Curva “desplazamiento” x tiempo, ($\Delta t = 0,05$).

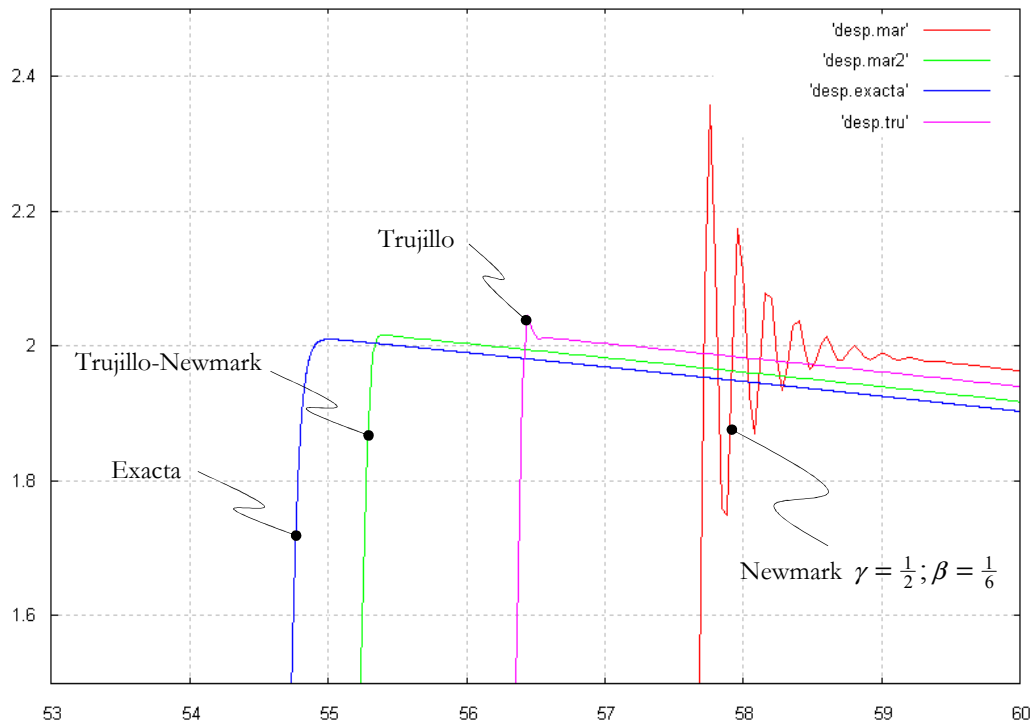


Figura 4.33: Curva “desplazamiento” x tiempo [53:60], ($\Delta t = 0,05$).

La Figura 4.34 muestra la curva “desplazamiento” x tiempo para distintos valores de α .

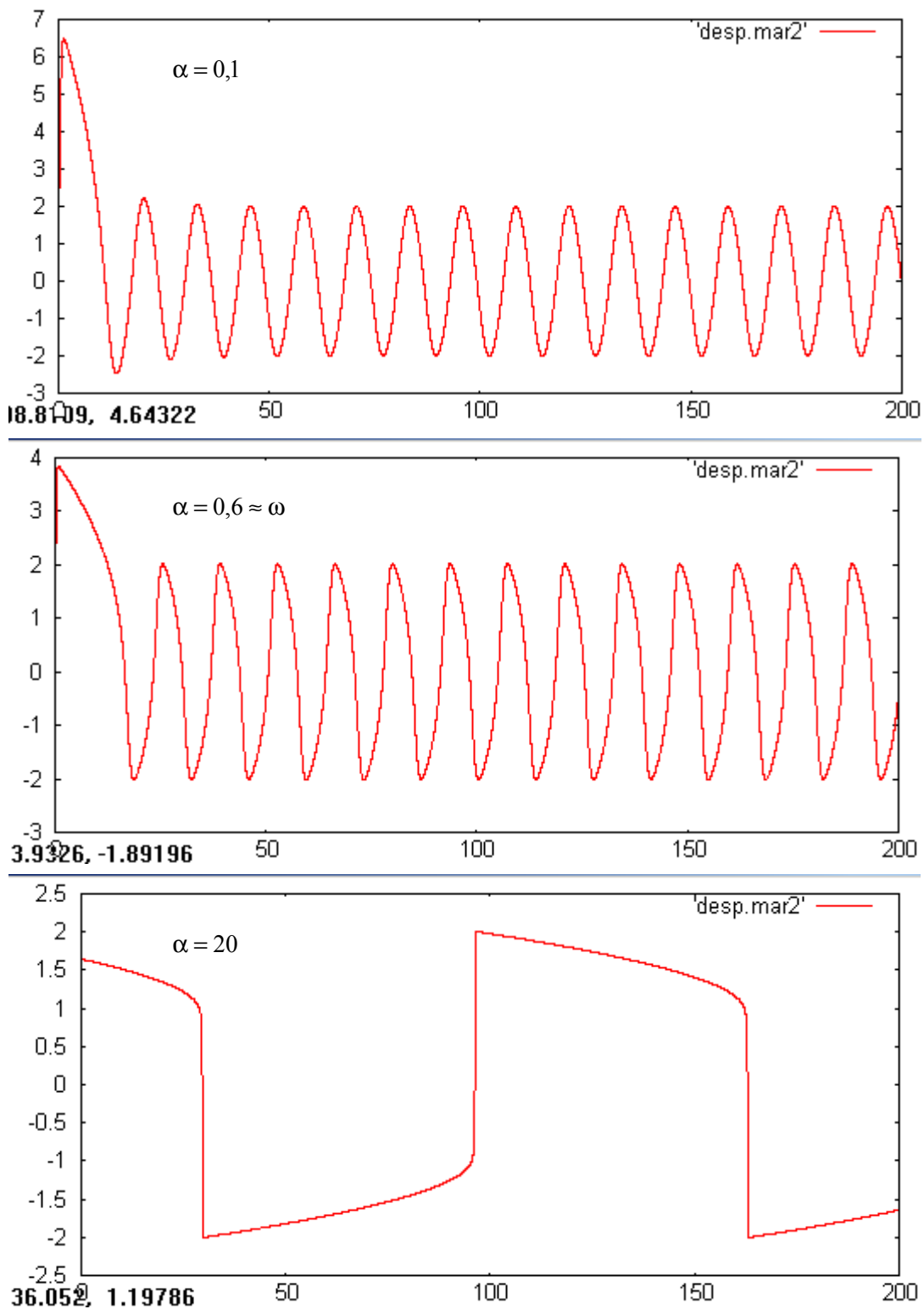


Figura 4.34: Curva “desplazamiento” x tiempo.

4.7.3.3 Respuesta Harmónica Forzada sin Amortiguamiento

Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$m\ddot{u} + ku = F_0 \sin(\Omega t) \quad (4.185)$$

donde Ω es la frecuencia de la excitación. Cuando $\Omega = \omega$ la estructura entra en resonancia.

Consideremos como ejemplo los siguientes valores: $m = 4.5$, $k = 3500$, $F_0 = 100$, $\Omega = 18$, y como condiciones iniciales que:

$$u(t=0) = 15 \quad ; \quad \dot{u}(t=0) = 150 \quad (4.186)$$

A continuación presentamos resultados utilizando integración directa con un incremento de tiempo igual a $\Delta t = 0,01$.

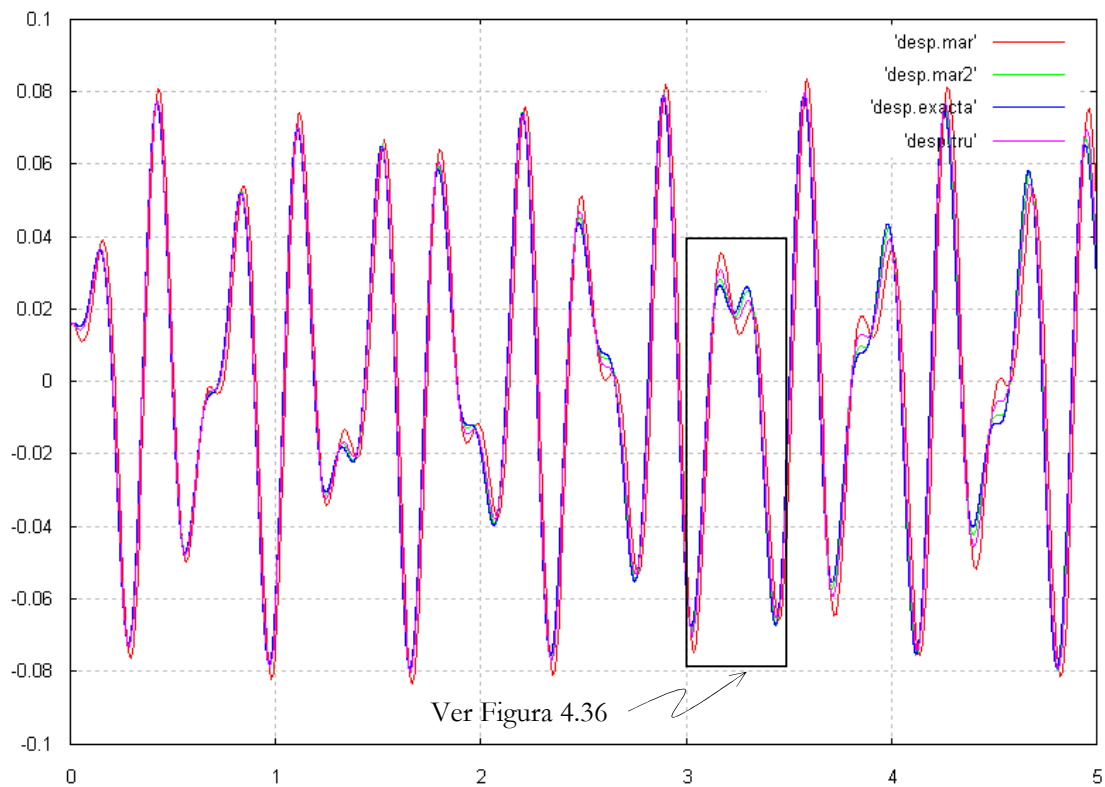


Figura 4.35: Curva desplazamiento x tiempo, ($\Delta t = 0,01$).

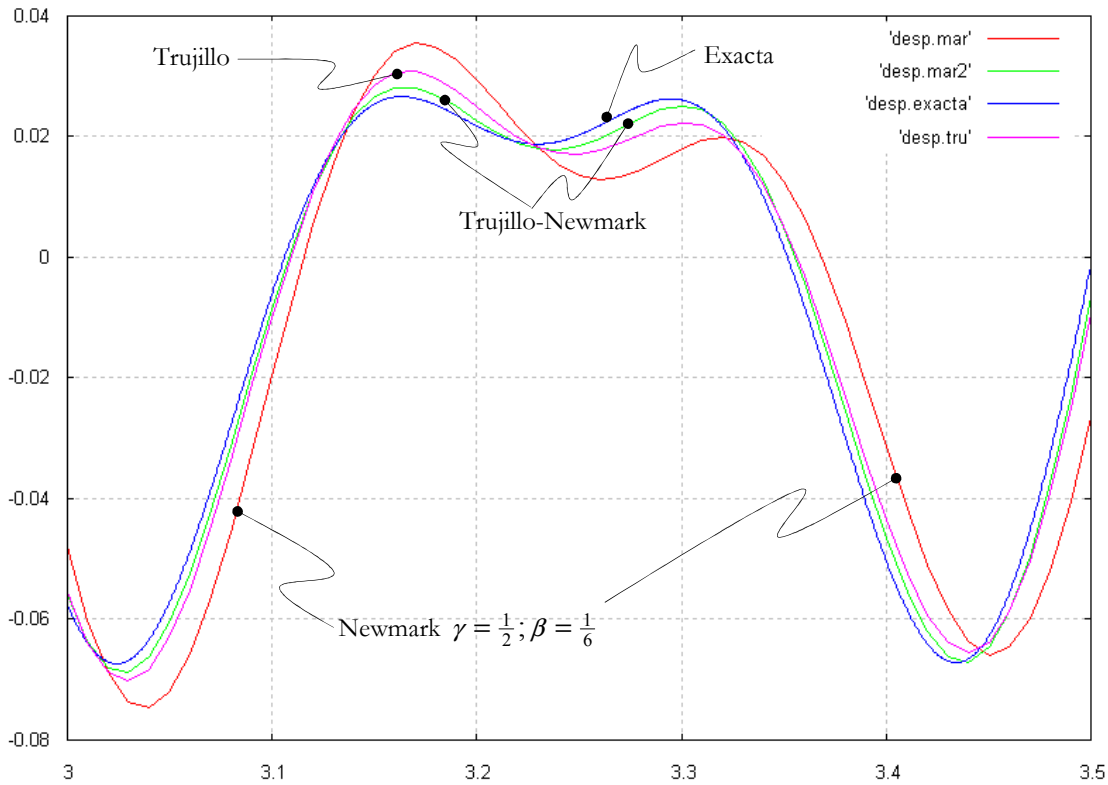


Figura 4.36: Curva desplazamiento x tiempo[3:3.5], ($\Delta t = 0,01$).

Consideremos ahora que las condiciones iniciales son:

$$u(t = 0) = 0 \quad ; \quad \dot{u}(t = 0) = 0 \tag{4.187}$$

Además consideremos que $\Omega = \omega$. Con estas condiciones verificamos que el sistema entra en resonancia, ver Figura 4.37.

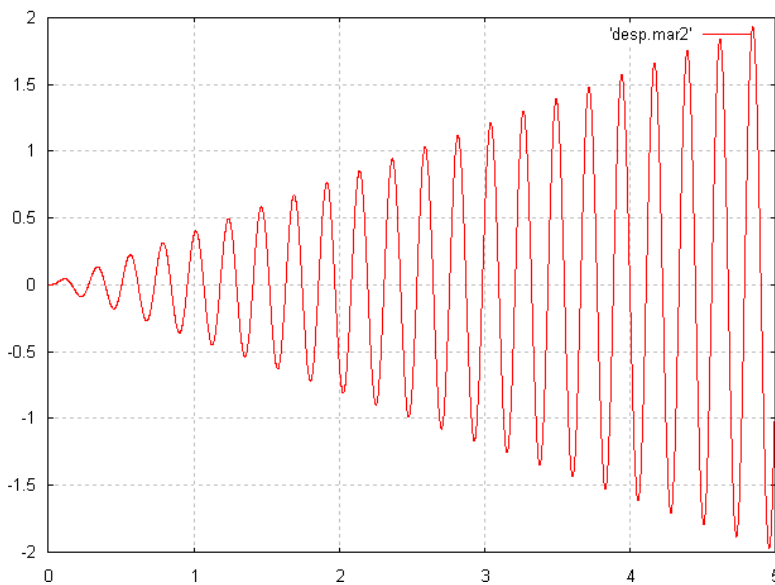


Figura 4.37: Curva desplazamiento x tiempo.

Bibliografía

- CHAPRA, S.C. & CANALE, R.P. (1988). *Métodos Numéricos para Ingenieros. Com aplicaciones en computadores personales*. McGraw-Hill/Interamericana de México, S.A. de C.V.
- CHUNG, J. & HULBERT (1993). A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The Generalized- α method. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 60. pp. 371-375.
- COOK, R.D.; MALKUS, D.S. & PLESHA, M.E. (1989). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons.
- CRISFIELD, M.A.(1997). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol.2. John Wiley & Sons, England.
- HILBER, H.; HUGHES, T.J.R. & TAYLOR, R. L. (1977). Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. N°5, pp. 283-292.
- PARK, K. & HOUSNER, J.M. (1982). Semi-implicit transient analysis procedures for structural dynamics analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 18, pp. 609-622.
- TEDESCO, J.M.; MCDUGAL, W.G. & ROSS, C.A.(1998). *Structural dynamics: theory and applications*. Addison Wesley Longman, Inc.
- TRUJILLO, D.M. (1977). An unconditionally stable explicit algorithm for structural dynamics. *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 11. pp. 1579-1592.
- WOOD, W.L.; BOSSAK, M. & ZIENKIEWICZ, O.C. (1981). An alpha modification of Newmark's methods. *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 15. pp. 1562-1566.