

Elementos Estructurales Unidimensionales

1 Introducción

Algunos elementos estructurales, por presentar ciertas características de geometría y de cargas pueden asumir ciertas simplificaciones en las ecuaciones que gobiernan el problema, sin acarrear un error significativo en el resultado. En este apartado serán esbozados algunos de estos elementos estructurales. Dichos elementos estructurales están formados por material homogéneo, elástico lineal e isótropo.

2 Elementos Estructurales Unidimensionales

Los elementos estructurales que presentan una de las dimensiones mucho más grande que las otras dos dimensiones presentan ciertas características que pueden simplificar enormemente el problema. Es decir, un problema que por naturaleza es tridimensional se puede tratar como un problema unidimensional. Dentro de esta clase de problema podemos citar: vigas, celosías, arcos entre otros.

Como las dimensiones son más pequeñas que la tercera dimensión y además estando en el régimen de pequeñas deformaciones, nos garantiza que la sección de la barra cuando se deforme permanezca plana y como resultado, la variación del campo de desplazamiento en la sección es lineal, y consecuentemente la deformación y la tensión, ya que la tensión varía linealmente con la deformación. Por ejemplo Figura 1 y Figura 2 muestran estos campos cuando la viga esté sometida únicamente a flexión.

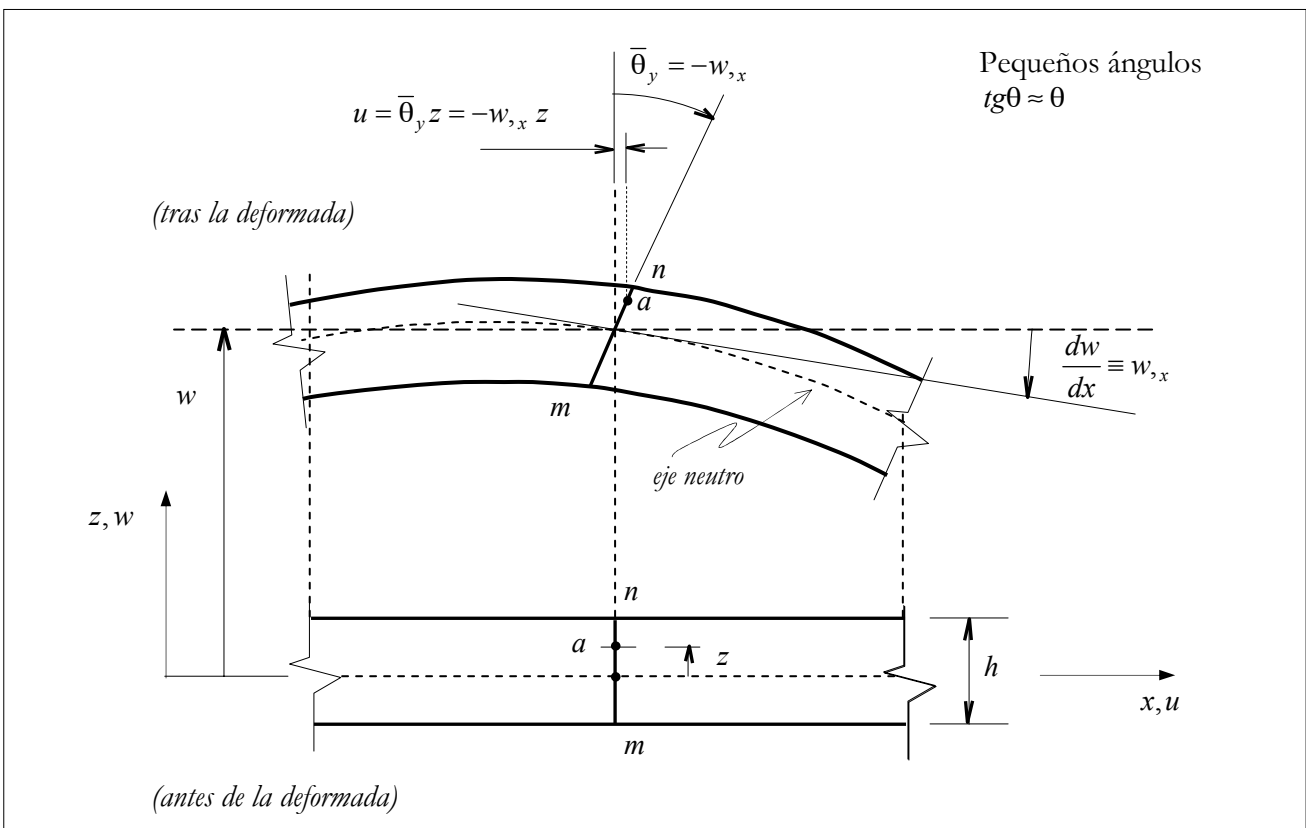


Figura 1: Desplazamiento en un sección transversal de la viga.

Según la Figura 1 podemos concluir que:

$$u = -w_{,x} z \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -\frac{d^2 u}{dx^2} z \equiv -w_{,xx} z \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x = -Ew_{,xx} z \quad (1)$$

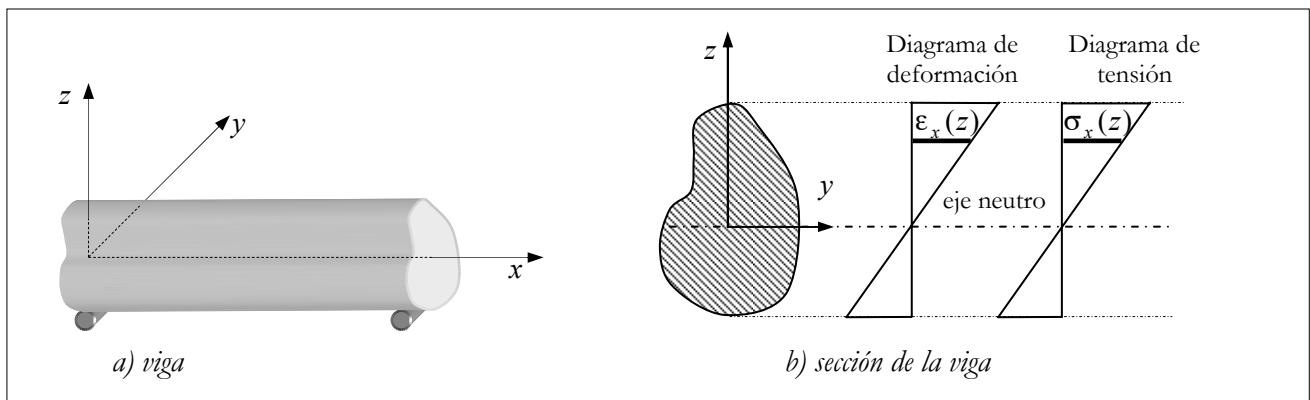


Figura 2: Vigas.

Si hacemos un corte en una sección según la orientación del plano Π , el estado tensional de un punto situado en esta sección será el indicado en la Figura 3. La intensidad o la existencia de las tensiones σ_x , τ_{xy} y τ_{xz} dependerá del tipo de carga que esté sometida la viga.

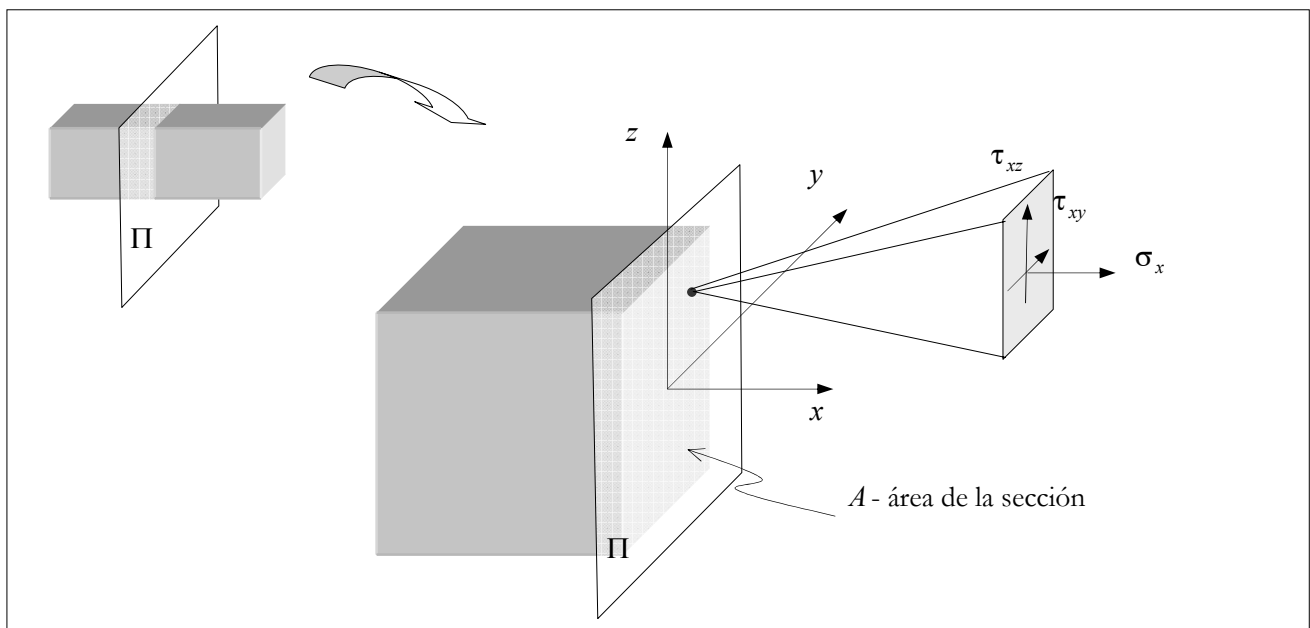


Figura 3: Tensiones en un sección de viga.

La integración de las tensiones sobre el área nos proporciona los esfuerzos: N - Normal; M - Momento flector; Q - Cortante; M_T - Momento torsor. A continuación esbozaremos cómo obtener estos esfuerzos.

3 Esfuerzo Normal y Momento Flector

Como la sección permanece plana tras la deformación, la distribución de tensión en la sección varía según ecuación de un plano, Figura 4. Podemos descomponer la tensión normal σ_x como se indica en la

Figura 4. Solamente debido a la tensión normal podemos obtener el esfuerzo normal (N) y los momentos flectores (M_y y M_z).

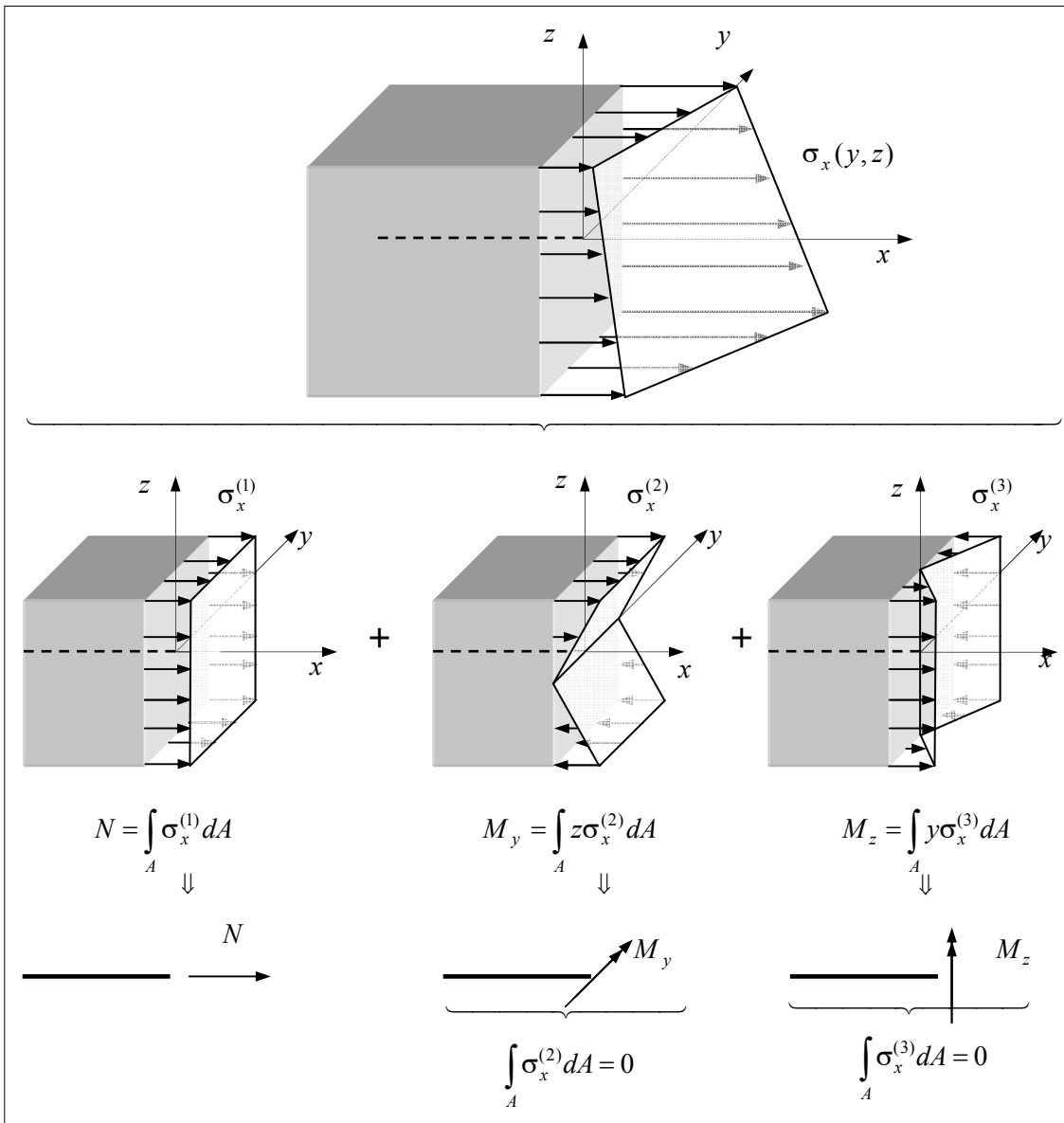


Figura 4: Esfuerzo normal y momento flector.

Considerando Figura 5, también podemos decir que el momento flector M_y puede ser expresado como:

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \int_A \frac{\sigma_s z}{c} z dA = \frac{\sigma_s}{c} \int_A z^2 dA = \frac{\sigma_s}{c} I_y \quad (2)$$

donde I_y es el momento de inercia respecto al eje y . Teniendo en cuenta que $\frac{\sigma_s}{c} = \frac{\sigma_x}{z}$ obtenemos que:

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} z \quad (3)$$

Análogamente, podemos obtener que:

$$\sigma_x(y) = \frac{M_z}{I_z} y \quad (4)$$

Si tenemos en cuenta la ecuación (1) aun podemos concluir que:

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = - \int_A E w_{,xx} z z dA = - E w_{,xx} \int_A z^2 dA = - E I_y w_{,xx} \quad (5)$$

También se puede demostrar que:

$$Q_z = - E I_y \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (6)$$

y la carga uniformemente distribuida puede ser representada por:

$$q = E I_y \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (7)$$

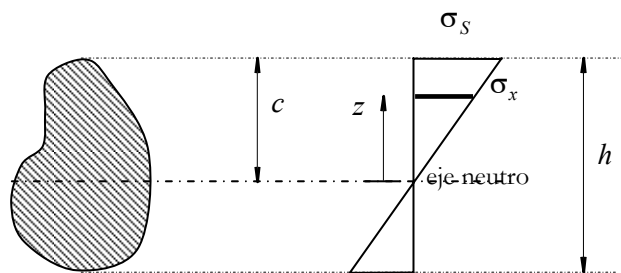


Figura 5: Distribución de tensión en una sección de viga.

4 Esfuerzo Cortante y Momento Torsor

Debido a las tensiones tangenciales, puede surgir esfuerzo cortante (Q_y, Q_z), Figura 6, y momento torsor (M_T), Figura 7 .

$$M_T = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{yz} z) dA \quad (8)$$

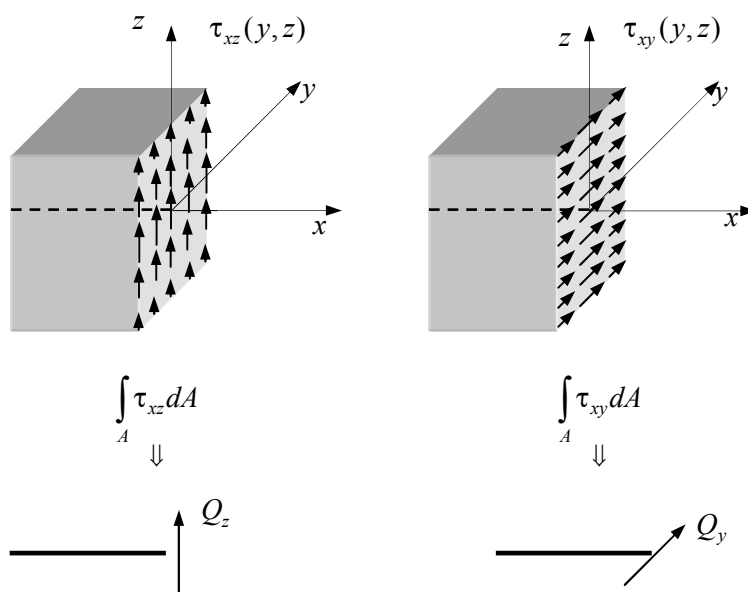


Figura 6: Tensiones tangenciales – Esfuerzo cortante.

El alabeo de la sección es un fenómeno que surge debido al aumento de las tensiones tangenciales en un punto y disminución en otro, ver Figura 8(a). En secciones circulares no hay alabeo, ya que la distribución de la tensión tangencial en la sección varía como se muestra en la Figura 8(b).

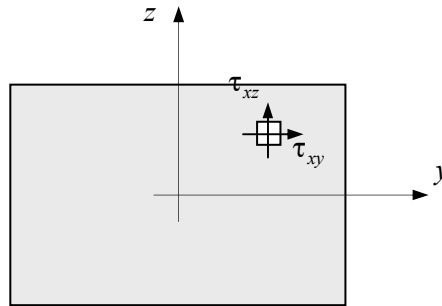


Figura 7: Tensiones tangenciales – Momento torsor.

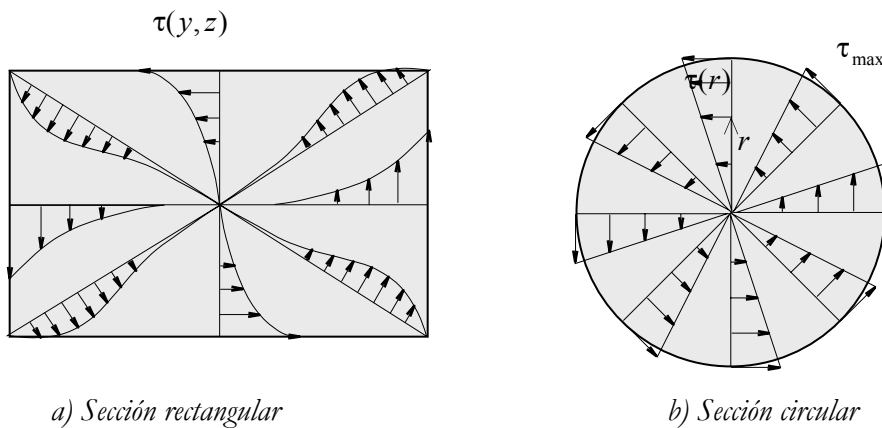


Figura 8: Distribución de tensiones tangenciales.

5 Energía de Deformación

La energía de deformación asociada a la tensión normal $\sigma_x^{(1)} = E\varepsilon_x^{(1)}$ (Figura 4) puede ser expresada en función del esfuerzo normal:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x^{(1)} \varepsilon_x^{(1)} dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma_x^{(1)2}}{E} dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA^2} \int_A dAdx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx \quad (9)$$

Análogamente, podemos obtener la energía de deformación asociada a la tensión normal $\sigma_x^{(2)} = E\varepsilon_x^{(2)}$:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x^{(2)} \varepsilon_x^{(2)} dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{M_y}{I_y} z \frac{M_y}{EI_y} z dAdx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y^2} \int_A z^2 dAdx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y} dx \quad (10)$$

Análogamente, si consideramos $\sigma_x^{(3)}$, obtenemos:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2}{EI_z} dx \quad (11)$$

Siguiendo el mismo procedimiento podemos obtener que la energía de deformación de una barra en función de los esfuerzos viene dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{\zeta Q_y^2}{GA} + \frac{\zeta Q_z^2}{GA} + \frac{M_T^2}{EJ_T} \right) dx \quad (12)$$

donde ζ es el factor de forma de la sección; J_T es el momento de inercia a torsión.

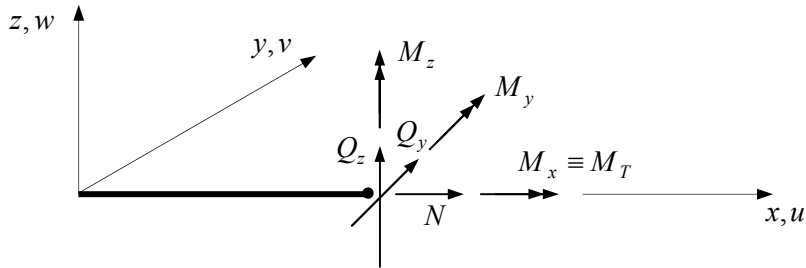


Figura 5.1: Esfuerzos en un elemento tipo barra.